DEZVOLTARE

D1. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Să se arate că funcția derivată f' a funcției f are proprietatea lui Darboux.**
(Teorema lui Darboux)

D2. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Să se arate că dacă funcția $f' \neq 0$ pe I, atunci f' are semn constant pe I.**

D3. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$. Să se arate că dacă f nu are proprietatea lui Darboux, atunci nu există nici o funcție $F: I \to \mathbb{R}$ derivabilă astfel încât $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.**

D4. **Fie funcția**

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, derivata f' este discontinuă şi are proprietatea lui Darboux.

François L'HOSPITAL (1661-1704) matematician francez

Contribuții în cadrul analizei matematice în calculul limitelor de funcții.

8 REGULILE LUI L'HOSPITAL

În operațiile cu limite de funcții s-a observat că deseori se ajunge la nedeterminări de forma $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

În aceste situații este necesar un studiu direct pentru a stabili dacă limita există sau nu există. Metodele care au fost folosite în astfel de situații nu au avut un caracter unitar, iar de multe ori, găsirea limitelor presupunea o experiență deosebită sau chiar inventivitate în organizarea calculului. În acest paragraf va fi prezentată o metodă mai simplă şi unitară care, cu ajutorul derivatelor, permite rezolvarea cazurilor de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ şi $\dfrac{\infty}{\infty}$ într-un număr destul de mare de situații. Celelalte cazuri de nedeterminare se pot reduce cu uşurință la cele două cazuri menționate anterior.

Metoda poartă numele de **regula lui l'Hospital** după numele matematicianului francez François l'Hospital (1661-1704) care a publicat-o în anul 1696.

▣ TEOREMA 11 (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$)

Fie funcțiile $f, g: I \to \mathbb{R}$, I interval şi x_0 un punct de acumulare al acestuia.
Dacă: **a)** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$; **b)** f şi g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

c) $g'(x) \neq 0$ pentru $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$; **d)** există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci funcția $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tgx}$.

Soluție

Fie $f(x) = e^{2x} - 1$, $g(x) = tg\, x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $x_0 = 0$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, deci limita dată este în cazul $\dfrac{0}{0}$.

Funcțiile f şi g sunt derivabile pe intervalul $I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi

$g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \neq 0$, $\forall\, x \in I$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot e^{2x}\cdot \cos^2 x = 2$, aplicând regula lui l'Hospital rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$.

▣ TEOREMA 12 (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Fie funcțiile $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval şi x_0 un punct de acumulare al acestuia.

Dacă: **a)** $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$;

b) f şi g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

c) $g'(x) \neq 0$, pentru $x \in I \setminus \{x_0\}$;

d) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ există în $\overline{\mathbb{R}}$,

atunci funcția $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Soluție

Fie $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$, $x \in (0, \infty)$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$. Funcțiile f şi g sunt derivabile pe $(0, \infty)$, iar $g'(x) = 1 \neq 0$, $\forall\, x \in (0, \infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, cu regula l'Hospital se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcțiile f şi g au derivate de ordin superior şi funcțiile derivate ale acestora satisfac condițiile teoremei lui l'Hospital, atunci se poate aplica repetat regula lui l'Hospital pentru $\frac{f'}{g'}, \frac{f''}{g''}$ până la îndepărtarea nedeterminării.

☞ ***Exemplu***

• Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$.

Soluție

Funcțiile $f(x) = e^{2x}$ şi $g(x) = x^2$ sunt derivabile de orice ordin $n \in \mathbb{N}^*$.

Cu regula lui l'Hospital se obține succesiv:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot e^{2x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = +\infty.$$

2. Regula lui l'Hospital poate fi folosită şi pentru calculul unor limite de şiruri.

☞ ***Exemplu***

• Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$.

Soluție

Considerăm funcțiile $f(x) = \ln^2 x$, $g(x) = x$, $x \in (0, \infty)$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Din definiția cu şiruri a limitei unei funcții, pentru $x_n = n$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Alte cazuri de nedeterminare

Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, interval şi x_0 punct de acumulare al acestuia.

Cazurile de nedeterminare $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ pot fi aduse la unul din cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

$\boxed{\textbf{Cazul } 0 \cdot \infty}$

Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Putem scrie $f \cdot g = f : \left(\frac{1}{g}\right)$, dacă $g(x) \neq 0$ sau $f \cdot g = g : \left(\frac{1}{f}\right)$, dacă $f(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{x_0\}$ şi se obține cazul $\frac{0}{0}$ sau cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x$.

Soluție

Avem succesiv: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}} = 0.$

Cazul $\infty-\infty$

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)$ este în cazul $\infty-\infty$, folosind scrierea:

$f(x)-g(x)=\left(\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}\right):\left(\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}\right)$, se obține cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Soluție

Avem cazul $\infty-\infty$. Acesta se transformă în cazul $\dfrac{0}{0}$ astfel:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

Cazurile 0^0; ∞^0; 1^∞

În aceste cazuri folosim relația $f^g=e^{g\cdot\ln f}$ şi se obține unul dintre cazurile de nedeterminare anterioare.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze: **a)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Soluție

a) Avem cazul 0^0. Rezultă succesiv: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(e^{x\cdot\ln x}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x}$.

Pentru $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ suntem în cazul $0\cdot\infty$.

Se obține: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-x)=0.$

Aşadar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x=e^0=1.$

b) Avem cazul 1^{∞}. Rezultă că $(1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{\ln(1-x)}{\sin x}}$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\sin x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{(1-x)\cdot\cos x} = -1$. Aşadar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^9-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x^4-16}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2+2x+7}{x^4+x^3-2x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$; e) $\lim\limits_{x\to -7}\frac{\sqrt{4+4x+x^2}-5}{x^2-49}$;

f) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{5x-7}-2}{\sqrt{x^2-2x-2}-1}$; g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-2}}{x^2-1}$;

h) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x+24}}{\sqrt[4]{x+13}-2}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^3-x^2}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg}3x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\cos 3x-1}$; l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\frac{x}{2}-1}{1-2\cos x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{x^2-1}-1}{x^2+3x-4}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}-e^x}{x^2+x}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

E2. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+\ln x}{5\ln x+x-4x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{x^2+x+1}}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{\ln(e^x-x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1}-\operatorname{tg}\sqrt{x+1}}{\operatorname{tg}(x^2-1)}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 4x)}$.

E3. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x\cdot\ln x)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x-2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x\cdot\ln(\sin x)$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}e^{-\frac{1}{x}}\cdot\ln x$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$.

E4. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x+1-\ln\left(x^2+1\right)\right]$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{e^{x-1}-1}-\frac{1}{x-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

E5. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)^{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(3^{x+1}-3)^{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(1-2\sin x\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{x-2}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\ln(1+x)\right)^{x}$.

E6. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x+1)^{\frac{1}{2x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)^{\frac{x}{2x^2+1}}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^{x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{4x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\arccos x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+\sin x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

E7. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\frac{1}{x-3}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+4}\right)^{2x+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\sin x}{1+\sin 2x}\right)^{\frac{2}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right]^{x}$.

E8. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, dacă:

a) $a_n=\sqrt[n]{\cos\frac{n\pi}{2n+1}}$;

b) $a_n=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2\right)^{n^2}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-2x^2-\cos x}{x^4}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\ldots\cdot\cos^n nx}{x^2}$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sqrt{|4-x^2|}}{1+x^2}$. Dacă s este suma pătratelor punctelor critice ale funcției f, atunci:

a) $s=0$; b) $s=9$; c) $s=3$; d) $s=4$.

❍ 2. Se dă funcția $f:[1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+ax+b, & x\le2\\ x^2+bx+c, & x>2\end{cases}$ căreia i se poate aplica teorema lui Rolle.