APROFUNDARE

A1. Să se demonstreze proprietățile P_2, P_3, P_4 ale vecinătăților.

A2. Să se arate că următoarele mulțimi $A \subset \mathbb{R}$ nu sunt vecinătăți pentru oricare punct $x_0 \in A$:

a) $A = \mathbb{N}$; b) $A = \mathbb{Z}$; c) $A = \mathbb{Q}$;

d) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

A3. Să se arate că următoarele mulțimi sunt vecinătăți pentru fiecare punct al lor:

a) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

c) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; d) $A = \bigcup\limits_{n \geq 1} \left(0, \dfrac{n}{n+1}\right)$;

e) $\bigcap\limits_{n \geq 1} \left(-\dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right) \setminus \{0, 1\}$.

A4. Să se arate că un interval $I \subset \mathbb{R}$ este deschis dacă şi numai dacă este vecinătate pentru oricare punct al său.

A5. Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulțimile:

a) $A = \mathbb{N}$; b) $A = \mathbb{Z}$; c) $A = \mathbb{Q}$;

d) $A = \mathbb{R}$; e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; f) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

A6. Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulțimile:

a) $A = \left\{ \dfrac{1}{2n} + \sin\dfrac{n\pi}{4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

b) $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} + \cos\dfrac{n\pi}{6} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

c) $A = \left\{ 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

DEZVOLTARE

D1. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi nevide şi A', B' mulțimile punctelor de acumulare. Să se arate că:

a) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$;

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

c) $(A \cap B)' = A' \cap B'$.

5 FUNCȚII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi de numere reale.

O funcție $f : A \to B$ se numeşte **funcție reală de variabilă reală** sau **funcție numerică**.

În clasele anterioare, au fost studiate diferite funcții numerice sub aspectul proprietăților generale ale monotoniei, paritate-imparitate, periodicitate, mărginire, injectivitate, surjectivitate, convexitate-concavitate şi altele. Astfel, aceste proprietăți au fost verificate în studiul câtorva funcții numerice particulare cum sunt: funcția de gradul I, funcția de gradul II, funcția putere cu exponent natural, funcția radical, funcția exponențială, funcția logaritmică şi funcțiile trigonometrice.

Analiza matematică va continua studiul funcțiilor numerice sub aspectul noilor proprietăți sau al găsirii de noi metode de verificare a proprietăților generale.

Acest studiu va pune în evidență câteva clase de funcții în care se vor regăsi şi funcțiile particulare studiate. Ele vor servi ca suport pentru lecturarea şi desprinderea unor proprietăți şi vor constitui exemple sau contraexemple pentru ilustrarea anumitor noțiuni.

De aceea, în acest paragraf se va face o actualizare sumară a elementelor esențiale legate de funcțiile numerice particulare cunoscute, precum şi unele completări.

FUNCŢII POLINOMIALE

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, unde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, se numeşte **funcție polinomială de gradul n**.

Cazuri particulare

a) Pentru $n=0$ se obține funcția constantă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0$. Aceasta este funcție monotonă pe $\mathbb{R}$ şi mărginită.

b) Pentru $n=1$ se obține funcția de gradul I, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_1x+a_0$. Funcția de gradul I este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, bijectivă, inversabilă şi nemărginită. Aceste proprietăți se pot desprinde şi din imaginea geometrică a graficului său, reprezentat de o dreaptă.

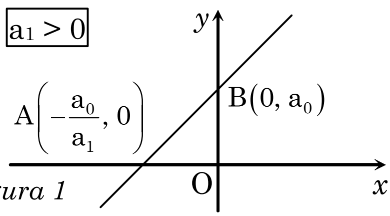


Figura 1

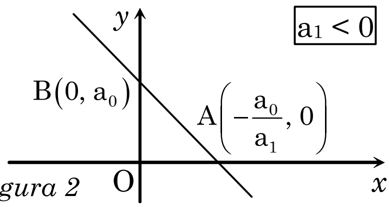


Figura 2

c) Pentru $n=2$ se obține funcția polinomială de gradul II, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$. Imaginea geometrică a graficului funcției de gradul II se numeşte **parabolă**.

d) Funcția putere cu exponent natural, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ este un alt caz particular de funcție polinomială de gradul n.

Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ proprietățile funcției polinomiale de gradul n depind de paritatea numărului $n\in\mathbb{N}$ şi se vor întâlni pe parcursul studierii funcțiilor numerice.

FUNCŢII RAŢIONALE

Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții polinomiale de gradul n, respectiv de gradul m şi $D=\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)=0\}$.

Funcția $h:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se numeşte **funcție rațională**.

Cazuri particulare

• Atunci când funcția polinomială g este constantă, funcția rațională h este funcție polinomială.

Aşadar, funcțiile polinomiale sunt cazuri particulare de funcții raționale.

• Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci se obține funcția rațională $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ (funcția putere cu exponent întreg negativ).

FUNCŢIA PUTERE CU EXPONENT REAL

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un număr real.

Funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ se numeşte **funcția putere cu exponent real**.

Cazuri particulare

• Pentru $\alpha = 0$, se obține funcția constantă $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.

• Pentru $\alpha \in \mathbb{N}$, se obține funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ care este o restricție la intervalul $(0, +\infty)$ a funcției putere cu exponent natural.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

• Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ sau $\alpha = \frac{1}{3}$ se obțin funcțiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, respectiv $g(x) = \sqrt[3]{x}$, adică funcția radical de ordinul 2, respectiv 3.

Mai general, pentru $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se obține funcția radical de ordinul n, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Funcția radical de ordinul n este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, este concavă şi nemărginită, (figura 3).

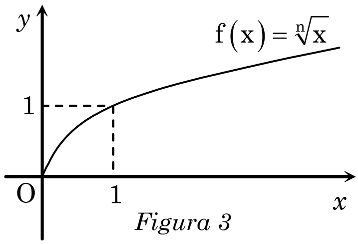


Figura 3

FUNCŢIA RADICAL PENTRU n IMPAR

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, unde $n \in \mathbb{N}$, este număr impar, $n > 1$, se numeşte **funcția radical pentru n impar**. Imaginea geometrică a graficului ei este redată în figura 4.

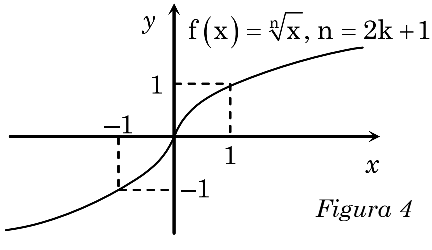


Figura 4

Lectura grafică confirmă următoarele proprietăți:

• este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

• este convexă pe $(-\infty, 0]$ şi este concavă pe $[0, +\infty)$;

• este bijectivă;

• este impară.

FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ

Funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, se numeşte **funcție exponențială**.

Imaginea geometrică a graficului ei este redată în figura 5, pentru $a\in(0,1)$, respectiv pentru $a\in(1,+\infty)$.

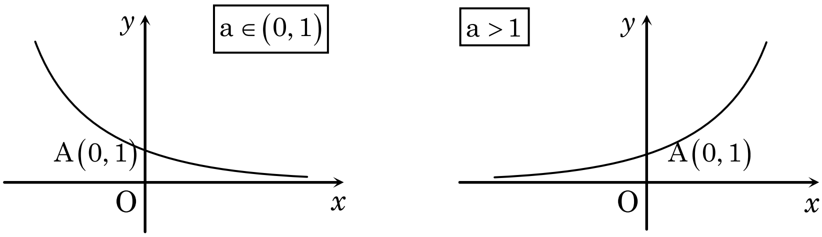


Figura 5

Lecturând graficul funcției exponențiale se confirmă următoarele proprietăți generale:

- funcția este bijectivă;
- funcția este convexă;
- funcția este inversabilă;
- funcția este pozitivă $(a^x>0,\ x\in\mathbb{R})$;
- funcția este nemărginită;
- funcția este strict monotonă pe $\mathbb{R}$ şi anume:
  – dacă $a\in(0,1)$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;
  – dacă $a\in(1,+\infty)$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- axa Ox este asimptotă orizontală a curbei exponențiale.

FUNCŢIA LOGARITMICĂ

Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, se numeşte **funcție logaritmică**.

Curba logaritmică este redată în figura 6 pentru cazurile $a\in(0,1)$ şi $a\in(1,+\infty)$.

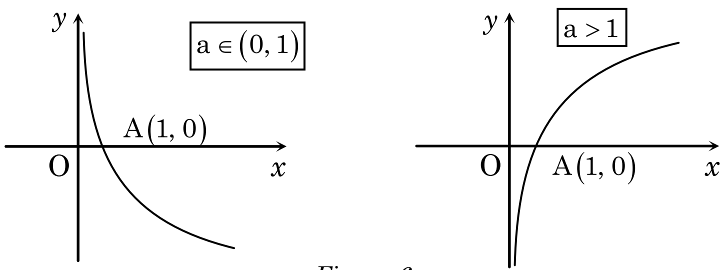


Figura 6

Lecturând graficul funcției logaritmice se confirmă următoarele proprietăți generale:

- este funcție bijectivă;
- este funcție inversabilă;
- nu este funcție mărginită;
- Oy este asimptotă verticală a graficului;
- este funcție monotonă pe $(0, +\infty)$ şi anume:

  – dacă $a \in (0, 1)$ este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$;

  – dacă $a \in (1, +\infty)$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.

- este funcție convexă pe $(0, +\infty)$ dacă $a \in (0, 1)$ şi este funcție concavă pe $(0, +\infty)$ dacă $a \in (1, +\infty)$.

FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE SINUS ŞI COSINUS

Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, reprezintă funcțiile trigonometrice sinus, respectiv cosinus.

Proprietăți ale funcțiilor sinus şi cosinus:

- sunt funcții mărginite: $\sin x \in [-1, 1]$ şi $\cos x \in [-1, 1]$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
- sunt funcții periodice cu perioada principală $T = 2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x,\ \forall\ x \in \mathbb{R};$$

- funcția sinus este funcție impară, iar funcția cosinus este funcție pară:

$$\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x,\ \forall\ x \in \mathbb{R};$$

- sunt funcții surjective şi nu sunt funcții injective;

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor sinus, respectiv cosinus sunt redate pe intervalul $[0, 2\pi]$ în figura 7.

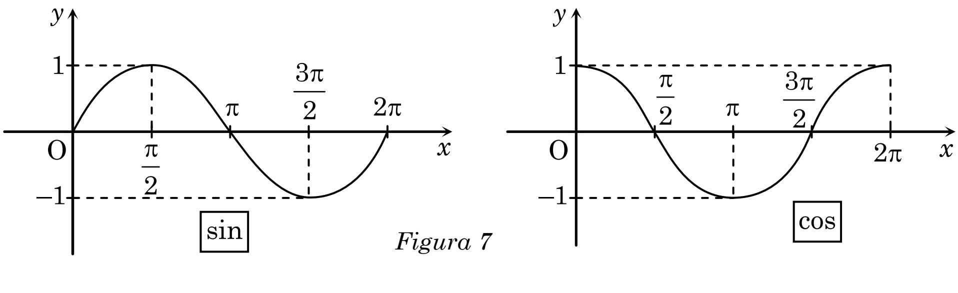


Figura 7

FUNCŢIILE TANGENTĂ ŞI COTANGENTĂ

Se consideră funcțiile:

$f : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ – funcția tangentă;

$g : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$ – funcția cotangentă.

Proprietăți ale funcțiilor tangentă şi cotangentă:

• sunt funcții periodice cu perioada principală $T = \pi$:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

• sunt funcții impare:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

• sunt funcții surjective şi nu sunt funcții injective;

• sunt funcții nemărginite;

• nu sunt funcții strict monotone pe domeniul de existență;

• sunt strict monotone pe orice interval din domeniul de existență;

Curbele reprezentative ale graficelor celor două funcții sunt redate în figura 8 pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, respectiv $(0, \pi)$.

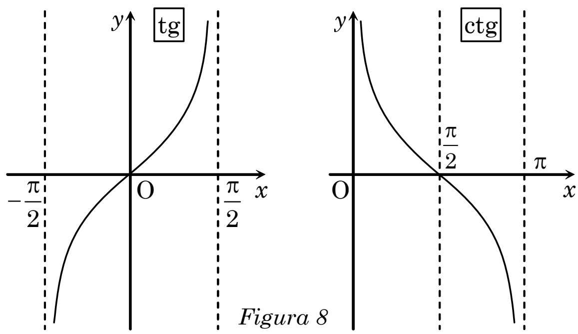


Figura 8

FUNCŢIILE ARCSINUS ŞI ARCCOSINUS

Funcțiile $f:[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$, şi $g:[-1, 1] \to [0, \pi]$, $g(x) = \arccos x$, reprezintă funcțiile arcsinus şi arccosinus.

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor arcsinus şi arccosinus sunt redate în figura 9.

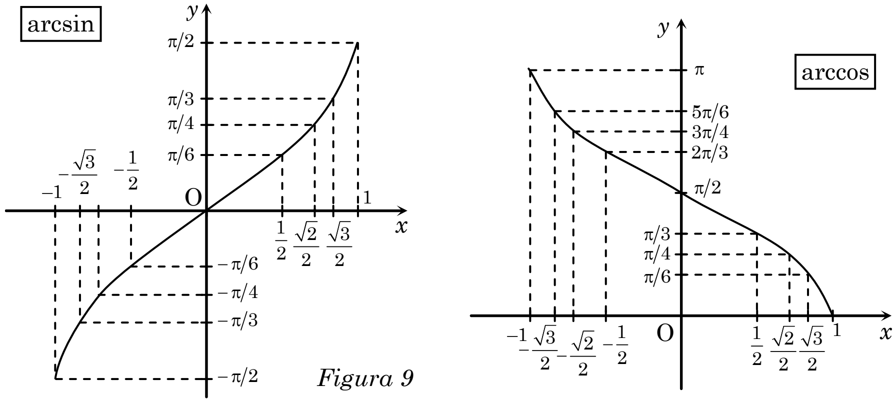


Figura 9

Proprietăți ale funcțiilor arcsin, arccos:

- sunt funcții bijective;
- sunt funcții mărginite:

$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall\ x \in [-1, 1]$ şi $\arccos x \in [0, \pi], \forall\ x \in [-1, 1]$;

- sunt funcții strict monotone pe intervalul $[-1, 1]$: funcția arcsinus este funcție strict crescătoare pe intervalul $[-1, 1]$, iar funcția arccosinus este funcție strict descrescătoare pe $[-1, 1]$;
- arcsinus este funcție impară: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $x \in [-1, 1]$; arccosinus nu este nici funcție pară, nici funcție impară;
- arcsinus este funcție concavă pe $[-1, 0]$ şi convexă pe $[0, 1]$;
- arccosinus este funcție convexă $[-1, 0]$ şi concavă pe $[0, 1]$.

FUNCŢIILE ARCTANGENTĂ ŞI ARCCOTANGENTĂ

Funcția $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \text{arctg}\, x$ reprezintă funcția arctangentă.

Funcția $g : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) = \text{arccotg}\, x$ reprezintă funcția arccotangentă.

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor arctg şi arcctg sunt redate în figura 10.

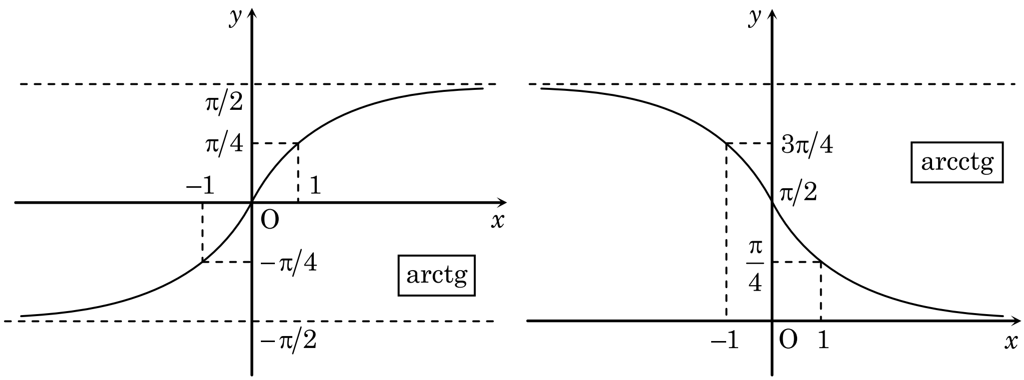


Figura 10

Proprietăți ale funcțiilor arctg şi arcctg:

- sunt funcții bijective;
- sunt funcții mărginite: $\text{arctg}(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\text{arcctg}(\mathbb{R}) = (0, \pi)$;

• sunt funcții strict monotone pe $\mathbb{R}$: funcția arctg este funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar funcția arcctg este funcție strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;

• funcția arctg este funcție impară: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, funcția arcctg nu este nici funcție impară, nici funcție pară;

• funcția arctg este convexă pe $(-\infty, 0]$ şi concavă pe $[0, +\infty)$;

• funcția arcctg este concavă pe $(-\infty, 0]$ şi convexă pe $[0, +\infty)$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Funcțiile constante, funcțiile polinomiale, funcțiile raționale, funcția putere (cu exponent natural, întreg, rațional sau real), funcția exponențială, funcția logaritmică şi funcțiile trigonometrice sunt numite **funcții elementare**.

❻ LIMITE DE ȘIRURI

6.1. ȘIRURI CARE AU LIMITĂ FINITĂ

Problemă rezolvată

Fie (a_n) un şir de numere reale cu termenul general $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine câți termeni ai şirului (a_n) sunt în afara vecinătății $V = \left(\dfrac{9}{10}, \dfrac{11}{10}\right)$ a lui 1.

> **NE REAMINTIM!**
>
> • *O funcție $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ se numeşte şir de numere reale.*
>
> • *Numărul $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte termenul general al şirului.*

b) Să se arate că în afara vecinătății $V = \left(\dfrac{999}{1000}, \dfrac{1001}{1000}\right)$ a lui 1 se află un număr finit de termeni ai şirului.

c) Fie $\varepsilon > 0$ şi $V = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ o vecinătate a lui 1. Să se arate că în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n).

<u>Soluție</u>

a) Din condiția $\dfrac{9}{10} < a_n < \dfrac{11}{10}$ se obține $9 < n$. Aşadar $a_n \in V$ pentru $n \geq 10$, iar termenii $a_1, a_2, \ldots, a_9$ sunt în afara vecinătății V.

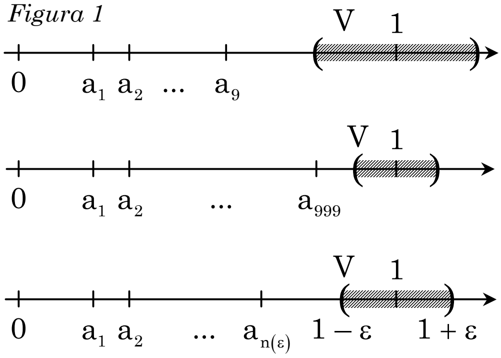
b) Dacă $a_n \in V$, rezultă că $\dfrac{999}{1000} < a_n$ şi se obține $n > 999$. Aşadar în afara vecinătății V se află primii 999 de termeni ai şirului (a_n).

c) Să aflăm mai întâi câți termeni aparțin vecinătății $V = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Din condiția $1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon$ se obține $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

• Dacă $\varepsilon \geq 1$, atunci toți termenii şirului (a_n) aparțin vecinătății V.

• Dacă $\varepsilon < 1$, pentru numărul natural $n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, termenii $a_1, a_2, \ldots, a_{n(\varepsilon)}$ nu aparțin lui V, iar dacă $n > n(\varepsilon)$, avem că $a_n \in V$.

Figura 1



În afara vecinătății V se află un număr finit de termeni pentru ∀ ε > 0.

Din problema rezolvată anterior se observă că în afara oricărei vecinătăți V a lui 1, există un număr finit de termeni ai şirului (a_n).

Aşadar, orice vecinătate $V \in \mathscr{V}(1)$, conține toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit de termeni ai acestuia.

De asemenea, dacă $\varepsilon > 0$, atunci condiția ca $a_n \in V = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ este echivalentă cu $|a_n - 1| < \varepsilon$, sau, altfel spus $d(a_n; 1) < \varepsilon$.

Pentru $\varepsilon > 0$ foarte mic avem că distanța $d(a_n; 1)$ este suficient de mică, putând să considerăm că de la un anumit rang, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, termenii a_n pot fi aproximați cu 1. Vom spune astfel că şirul (a_n) admite pe 1 ca limită.

❖ DEFINIȚIE

• Un număr $\ell \in \mathbb{R}$ se numeşte **limita şirului (a_n)** dacă în afara oricărei vecinătăți a lui ℓ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Pentru limita şirului (a_n) se foloseşte notația $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pentru şirul (a_n), cu termenul general $a_n = \frac{n}{n+1}$, putem scrie $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se arate că $2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1}$.

<u>*Soluție*</u>

Trebuie să arătăm că în afara oricărei vecinătăți $V \in \mathscr{V}(2)$ există un număr finit de termeni ai şirului. Este suficient să considerăm vecinătăți centrate în 2, $V = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$.

Din condiția $\frac{2n+1}{n+1} \in V$, se obține: $2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+1} < 2+\varepsilon$, de unde $n > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}$. (1)

• Pentru $\varepsilon \geq \frac{2}{3}$, relația (1) este adevărată pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, deci în afara vecinătății V nu se află nici un termen al şirului.

• Pentru $\varepsilon < \frac{2}{3}$ şi $n(\varepsilon) = \left[\frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$, avem $n \geq n(\varepsilon)$, deci în afara vecinătății V se află termenii $a_1, a_2, \ldots, a_{n(\varepsilon)}$, în număr finit. Aşadar, $2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1}$.

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} \neq 2$.

<u>*Soluție*</u>

Trebuie arătat că există cel puțin o vecinătate V a lui 2 în afara căreia se află un număr infinit de termeni.

Fie $V = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Deoarece $\frac{n+2}{n+3} < 1 < \frac{3}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, avem că $\frac{n+2}{n+3} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deci toți termenii şirului sunt în afara vecinătății V. Aşadar, $2 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3}$.

➲ OBSERVAȚII

1. Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ nu este limita şirului (a_n) dacă există cel puțin o vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ în afara căreia se află un număr infinit de termeni ai şirului.

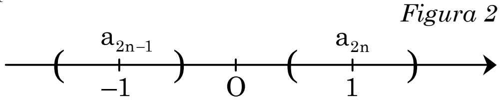
2. Există şiruri de numere reale care nu au limită.

☞ <u>***Exemplu***</u>

Fie (a_n) şirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$. Atunci $a_{2n} = 1, a_{2n-1} = -1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă presupunem că $\ell \in \mathbb{R}$ şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci în oricare vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ se află toți termenii şirului cu excepția unui număr finit dintre aceştia. Deosebim situațiile:

- $\ell \in (-\infty, -1]$. Pentru $V = (-\infty, 0)$, $a_{2n} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
- $\ell \in (-1, 1)$. Pentru $V = (-1, 1)$, $a_n \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
- $\ell \in [1, +\infty)$. Pentru $V = (0, +\infty)$, $a_{2n-1} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Figura 2



În concluzie, nici un număr real ℓ nu poate fi limită a şirului (a_n).

6.2. ȘIRURI CARE AU LIMITĂ INFINITĂ

Fie (a_n) un şir de numere reale.

❖ **DEFINIȚII**

- **Şirul (a_n) are limita** $+\infty$, dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului.
- **Şirul (a_n) are limita** $-\infty$, dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $-\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Fie (a_n) un şir cu termenul general $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $n \geq 1$. Să se arate că $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $-\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

<u>*Soluție*</u>

Fie $V = (a, +\infty)$, $a > 0$, o vecinătate a lui $+\infty$. Din condiția $a_n \in V$, rezultă că $\dfrac{n^2}{n+1} > a$, de unde $n - 1 + \dfrac{1}{n+1} > a$. Dacă $m = [a] + 2$, pentru $n \geq m$, rezultă că $a_n > a$, deci în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni: $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Rezultă că $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

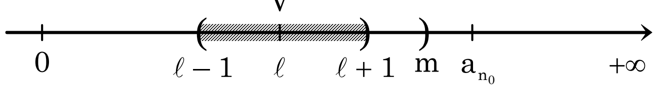
Luând $V = (-\infty, -a)$ vecinătate pentru $-\infty$, în afara lui V se află cel mult primii m – 1 termeni, deci $-\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

☒ **2.** Fie (a_n) un şir nemărginit de numere reale pozitive. Dacă (a_n) are limită, atunci $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

<u>*Soluție*</u>

Să presupunem că $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\ell \in \mathbb{R}$. Atunci în afara vecinătății $V = (\ell - 1, \ell + 1)$ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Figura 3



Fie $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}$ aceşti termeni.

Pentru $m = \max(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}, \ell + 1)$, în vecinătatea $V = (-\infty, m)$ a lui ℓ se află toți termenii şirului (a_n). Dar (a_n) fiind nemărginit superior, există cel puțin un termen a_{n_0}, astfel că $a_{n_0} > m$. Contradicție. Aşadar $\ell \notin \mathbb{R}$. Rezultă astfel că în oricare vecinătate a lui $+\infty$ se află toți termenii şirului (a_n), mai puțin un număr finit de termeni, deci $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

◢ **Temă**

Să se arate că următoarele şiruri au limita infinită:

a) $a_n = 2n + 7$; **b)** $a_n = 3n^2 + 2$; **c)** $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$;

d) $a_n = \dfrac{-n^3}{n+1}$; **e)** $a_n = n - n^2$.

7 PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR CARE AU LIMITĂ

7.1. PROPRIETĂȚI GENERALE

▣ **TEOREMA 4 (Unicitatea limitei unui şir)**

Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie (a_n) un şir de numere reale. Presupunem prin absurd că şirul (a_n) are limitele distincte $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

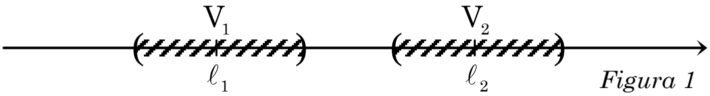


Figura 1

• Dacă $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, din teorema de separare a mulțimii $\mathbb{R}$, rezultă că există vecinătățile $V_1 \in \mathcal{V}(\ell_1)$ şi $V_2 \in \mathcal{V}(\ell_2)$, astfel încât $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, (figura 1). Deoarece $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci în vecinătatea V_1 se află toți termenii şirului (a_n), mai puțin un număr finit de termeni. Aşadar, în vecinătatea V_2 se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n), iar în afara ei un număr infinit de termeni. Aceasta contrazice faptul că $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Aşadar $\ell_1 = \ell_2$.

• Dacă $\ell_1 \in \mathbb{R}$ şi $\ell_2 = +\infty$, atunci pentru $\varepsilon > 0$ considerăm vecinătățile $V_1 \in \mathcal{V}(\ell_1)$, $V_1 = (\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon)$ şi $V_2 \in \mathcal{V}(+\infty)$, $V_2 = (a, +\infty)$, $a > \ell + \varepsilon$, (figura 2). Ca şi în cazul precedent rezultă că în V_1 se află toți termenii şirului (a_n), cu excepția unui număr finit de termeni, deci ℓ_2 nu poate fi limită a şirului (a_n).

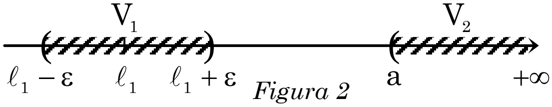


Figura 2

• Celelalte cazuri se tratează analog. ■

❖ DEFINIȚII

- Şirurile de numere reale care au limită finită se numesc **şiruri convergente**.
- Şirurile de numere reale care au limita $+\infty$, $-\infty$ sau nu au limită se numesc **şiruri divergente**.

Se observă uşor că un şir de numere reale care nu este convergent este şir divergent. Aşadar, oricare şir de numere reale este sau şir convergent sau şir divergent.

☞ ***Exemple***

- Şirul (a_n), $a_n = \frac{n}{n+1}$ este şir convergent având limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
- Şirurile cu termenii generali: $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{n^2}{n+1}$, $c_n = \frac{-n^2}{n+1}$ sunt şiruri divergente.

❖ DEFINIȚIE

- Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcție strict crescătoare. Şirul $(a_{\varphi(n)})$ se numeşte **subşir** al şirului (a_n).

☞ ***Exemple***

Dacă (a_n) este şirul cu termenul general $a_n = n$, atunci şirurile (a_{2n-1}), (a_{2n}), (a_{3n}), (a_{10n+3}), $n \ge 1$ sunt subşiruri ale şirului (a_n).

▣ TEOREMA 5

Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Atunci orice subşir al şirului (a_n) are limita ℓ.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $(a_{\varphi(n)})$ un subşir al şirului (a_n). Dacă $V \in \mathcal{V}(\ell)$ este o vecinătate oarecare a lui ℓ, în afara acesteia se află un număr finit de termeni ai şirului, deci şi un număr finit de termeni ai subşirului $(a_{\varphi(n)})$.

În mod evident are loc şi o teoremă reciprocă. ■

▣ TEOREMA 6

Fie (a_n) un şir de numere reale. Dacă toate subşirurile şirului (a_n) au aceeaşi limită $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul (a_n) are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

<u>*Demonstrație:*</u> (Temă)

Problemă rezolvată

☒ Fie (a_n) un şir de numere reale, astfel încât subşirurile (a_{2n}) şi (a_{2n-1}) au aceeaşi limită, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Soluție

Fie $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ un subşir oarecare al şirului (a_n). Atunci $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ poate conține numai termeni ai subşirului (a_{2n}), numai termeni ai subşirului (a_{2n-1}) sau termeni ai ambelor subşiruri. În fiecare caz, conform teoremelor anterioare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = \ell$. Aşadar toate subşirurile şirului (a_n) au aceeaşi limită şi, în consecință, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

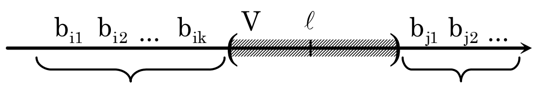
▣ TEOREMA 7

Fie (a_n) un şir de numere reale cu limita $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci, prin înlăturarea sau adăugarea unui număr finit de termeni se obține un şir cu aceeaşi limită ℓ.

Demonstrație

Într-adevăr, dacă $V \in \mathcal{V}(\ell)$, atunci înlăturarea sau adăugarea unui număr finit de termeni nu modifică faptul că în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni. ■

Figura 3



În afara lui V, sunt mai puțini termeni sau mai mulți, dar tot în număr finit.

➲ OBSERVAȚIE

- Fie (a_n) un şir de numere reale care are limita $\ell \in \mathbb{R}$. Prin adăugarea unui număr infinit de termeni, şirul obținut are aceeaşi limită ℓ sau nu are limită.

☞ ***Exemple***

• Fie $a_n = \dfrac{1}{n}$ şi $b_n = (-1)^n \dfrac{2}{n}$, $n \ge 1$. Se observă uşor că $b_{2n} = a_n$ şi $b_{2n-1} = \dfrac{-2}{2n-1}$. În acest caz, prin adăugarea termenilor b_{2n-1}, $n \ge 1$, s-a obținut un şir cu aceeaşi limită: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

• Fie $a_n = 1$ şi $b_n = (-1)^n$, $n \ge 1$. Se observă că $b_{2n} = a_n$ şi $b_{2n-1} = -1$. În acest caz, noul şir (b_n) nu mai are limită, deoarece are două subşiruri cu limite diferite.

7.2. PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR CONVERGENTE

După cum se ştie, un şir este convergent dacă acesta are limita finită. Astfel, orice şir convergent are proprietățile întâlnite până acum pentru şirurile care au limită.

Dar există şi proprietăți specifice şirurilor convergente.

▣ TEOREMA 8 (Limita modulului)

Fie (a_n) un şir convergent de numere reale. Atunci şirul $(|a_n|)$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$, (limita modulului este egală cu modulul limitei).

➲ OBSERVAȚII

1. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată.

De exemplu, pentru şirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$, avem că $|a_n| = \left|(-1)^n\right| = 1$, deci $|a_n|$ este convergent, dar şirul (a_n) nu este convergent.

2. Fie (a_n) un şir convergent şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Afirmațiile următoare sunt echivalente:

a) $\ell = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$.

▣ TEOREMA 9

Orice şir convergent este mărginit.

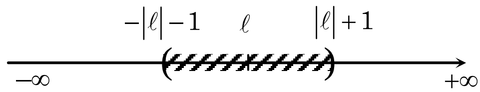


Figura 4

Demonstrație

Fie şirul de numere reale (a_n) şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci, în oricare vecinătate a lui ℓ se află toți termenii şirului cu excepția unui număr finit dintre aceştia.

În particular, în afara vecinătății $V = (-1-|\ell|, 1+|\ell|)$ se află un număr finit de termeni: $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}$. Luând $M = \max\left\{|a_{n_1}|, |a_{n_2}|, \dots, |a_{n_p}|, 1+|\ell|\right\}$, toți termenii şirului sunt în intervalul $(-M, M)$, deci şirul este mărginit. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Reciproca teoremei nu este adevărată.

Într-adevăr, şirul (a_n), $a_n = (-1)^n$ este mărginit, dar nu este convergent.

2. Putem formula condiții suplimentare pentru ca un şir mărginit să fie convergent.

☞ ***Exemplu***

Fie (a_n) un şir care are limită. Atunci (a_n) este convergent dacă şi numai dacă este mărginit.

3. Dacă un şir este nemărginit sau are un subşir nemărginit, atunci şirul este divergent. Aşadar, condiția de mărginire este condiție necesară pentru ca un şir să fie convergent.

7.3. TRECEREA LA LIMITĂ ÎN INEGALITĂȚI

▣ TEOREMA 10

Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive şi $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci $a \geq 0$.

<u>*Demonstrație*</u>

Folosim metoda reducerii la absurd.

Presupunem că $a < 0$. Din relația $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, rezultă că orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$, conține toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit dintre aceştia.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, considerăm vecinătatea $V = \left(-\infty, \dfrac{a}{2}\right)$, iar pentru $a = -\infty$, considerăm $V = (-\infty, -1)$, figura 5.

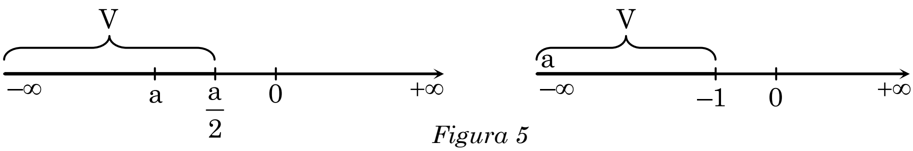


Figura 5

Vecinătatea V conține o infinitate de termeni ai şirului (a_n), de unde rezultă că şirul (a_n) are şi termeni negativi, în contradicție cu ipoteza. Aşadar $a \geq 0$. ■

➲ <u>OBSERVAȚII</u>

1. Rezultatul este adevărat şi dacă şirul are limită şi conține termeni pozitivi, începând de la un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

2. Dacă şirul (a_n) are limită, conține o infinitate de termeni negativi, dar are un subşir $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ cu termeni pozitivi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Dacă şirul (a_n) are limită şi toți termenii săi sunt negativi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 0$.

▣ TEOREMA 11 (de trecere la limită în inegalități)

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri care au limită şi au proprietatea că $a_n \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Deosebim cazurile:

• $a = -\infty$. În acest caz vom avea că $a = -\infty \le b$.

• $a = +\infty$. În acest caz şirul (a_n) este nemărginit superior, deci şi (b_n) este nemărginit superior. Cum (b_n) are limită, aceasta nu poate fi decât $+\infty$. Aşadar $a \le b$.

• $a \in \mathbb{R}$. În acest caz (a_n) este convergent, deci este şir mărginit. Rezultă că (b_n) este şi el mărginit inferior, deci nu poate avea limita $-\infty$. Dacă $b = +\infty$, atunci $a \le b$.

• Rămâne de analizat cazul $a, b \in \mathbb{R}$. Presupunem prin absurd că $b < a$. Din teorema de separare a lui $\mathbb{R}$, există vecinătățile $V_1 \in \mathcal{V}(a)$ şi $V_2 = \mathcal{V}(b)$ cu proprietatea că $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, (figura 6).

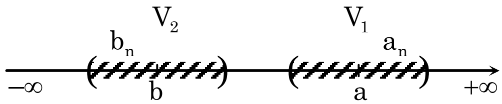


Figura 6

Vecinătatea V_2 conține o infinitate de termeni ai şirului (b_n), în afara ei fiind un număr finit de termeni ai şirului (b_n). Astfel, există termeni $b_n \in V_2$, cu proprietatea $b_n < a_n$, şi se contrazice relația $a_n \le b_n$. În concluzie $a \le b$ şi teorema este complet demonstrată. ■

➲ OBSERVAȚIE

• Dacă pentru şirurile (a_n) şi (b_n) există relația $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, nu rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

☞ <u>***Exemplu***</u>

Fie (a_n) şi (b_n) cu $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. Se observă că $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Din teorema de trecerea la limită în inegalități rezultă uşor următoarele consecințe.

▣ CONSECINȚA 1

Fie (a_n) un şir de numere reale convergent şi numerele $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \le a_n \le b, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $a \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le b$.

<u>*Demonstrație*</u>

Se consideră şirurile $(x_n), (y_n)$ astfel încât $x_n = a, y_n = b$ şi vom avea $x_n \le a_n$ şi $a_n \le y_n$. Conform teoremei 11 se obține rezultatul cerut. ■

▣ CONSECINȚA 2

Fie (a_n) un şir crescător de numere reale şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Atunci $a_n \le \ell,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație

• Dacă $\ell = +\infty$, rezultatul este evident.

• Dacă $\ell \in \mathbb{R}$, din monotonia şirului (a_n) se obține că $a_n \le a_m$, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \le m$. Prin trecere la limită după m se obține că:

$a_n = \lim\limits_{m\to\infty} a_n \le \lim\limits_{m\to\infty} a_m = \ell,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. ■

◢ Temă

Enunțați un rezultat analog pentru şirurile descrescătoare.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că şirurile (a_n) sunt divergente dacă:

a) $a_n = 1 + (-1)^n$; b) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$;

c) $a_n = \dfrac{2n^2}{n+3}$.

E2. Fie $a_n = (-1)^{n+1},\ n \ge 1$. Se poate obține din (a_n) un şir convergent prin îndepărtarea unui număr finit de termeni? Dar infinit? Care sunt limitele şirurilor obținute?

E3. Se consideră şirul (a_n) cu termenul general $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Există un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_n > 0,\ \forall\ n \ge n_0$?

E4. Fie (a_n) un şir cu termenul general $a_n = \dfrac{2n+6}{2n+3}$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Să se calculeze limita şirului (b_n) în cazurile $b_n = \dfrac{4n+6}{4n+3}$, $b_n = \dfrac{10n+6}{10n+3}$.

E5. Se consideră şirul (a_n), astfel încât $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Rezultă că $\ell = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

APROFUNDARE

A1. Se consideră şirurile (a_n) şi (b_n) care au aceeaşi limită ℓ. Să se arate că şirul (c_n), $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} + \dfrac{(-1)^n}{2}(a_n - b_n)$ are limita ℓ.

A2. Să se arate că şirul (a_n) cu termenul general $a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & n \text{ par} \\ \dfrac{n+1}{n+2}, & n \text{ impar} \end{cases}$ are limita $\ell = 1$.

A3. **Şirul (a_n) are termenii $a_{2n} < 0$ şi $a_{2n-1} > 0$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.**
a) Poate fi convergent acest şir?
b) Poate avea acest şir limita $+\infty$? Dar $-\infty$?

A4. **Se consideră şirul (a_n), astfel încât $a_{2n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = 3$. Este convergent şirul (a_n)?**

A5. **Fie (a_n) un şir, astfel încât subşirurile $(a_{3n}), (a_{3n-1})$ şi (a_{3n-2}) au aceeaşi limită. Să se arate că şirul (a_n) are limită.**

A6. **Se consideră şirul (a_n), astfel încât verifică una din condițiile:**
a) $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
b) $(a_n - 1)(a_{n+1} - 2) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Rezultă că şirul (a_n) este convergent? (Olimpiadă locală, 1993)

A7. **Se consideră şirul (a_n), astfel încât subşirurile $(a_{2n-1}), (a_{2n})$ şi (a_{5n}) au limită. Să se arate că şirul (a_n) are limită.**

DEZVOLTARE

D1. **Din (a_n) un şir de numere reale şi $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Să se arate că dacă se schimbă ordinea termenilor şirului (a_n), noul şir are aceeaşi limită.**

D2. **Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$.**
a) Dacă $\ell > 0$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$.
b) Dacă $\ell < 0$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$.
c) Dacă $\ell \in \mathbb{R}^*$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$.

D3. **Fie (a_n) un şir de numere reale, astfel încât $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ şi $a_n \leq \ell, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că termenii şirului se pot rearanja, astfel încât să se obțină un şir crescător.**

D4. **Şirul (a_n) are limită $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $a_{2n} < 0$ şi $a_n + a_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, să se determine ℓ.**

8 CRITERII DE EXISTENȚĂ A LIMITEI UNUI ȘIR

8.1. CRITERIUL DE EXISTENȚĂ CU ε (EXTINDERE)

Fie (a_n) un şir de numere reale. După cum se cunoaşte şirul (a_n) are limită dacă există $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, astfel încât orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ conține toți termenii săi cu excepția unui număr finit de termeni.

Să considerăm $\ell \in \mathbb{R}$, limita şirului (a_n). Dacă $\varepsilon > 0$ şi $V \in \mathcal{V}(\ell)$, $V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ este o vecinătate centrată în ℓ, atunci în afara sa se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n). Aceasta înseamnă că există un rang $n(\varepsilon)$, depinzând de ε, începând de la care toți termenii a_n aparțin vecinătății V.

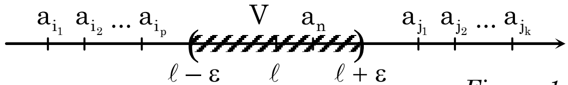


Figura 1

Relația $a_n \in V$ se scrie sub formă echivalentă astfel:

$$a_n \in V \Leftrightarrow a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \Leftrightarrow \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Aşadar, $a_n \in V, \forall\, n \geq n(\varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon, \forall\, n \geq n(\varepsilon)$.

Deoarece pentru definirea limitei unui şir este suficient să considerăm numai vecinătăți centrate în ℓ, se poate enunța următoarea teoremă de caracterizare a limitei.

▣ TEOREMA 12 (Criteriul de convergență cu ε)

Fie (a_n) un şir de numere reale. Un număr $\ell \in \mathbb{R}$ este limita şirului (a_n) dacă şi numai dacă pentru $\forall\, \varepsilon > 0$ există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|a_n - \ell| < \varepsilon, \forall\, n \geq n(\varepsilon)$.

<u>*Demonstrație*</u>

• Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar. În afara vecinătății $V = (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ a lui ℓ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n): $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_p}$.

Notăm cu $m = \max\{n_1, n_2, ..., n_p\}$. Atunci, pentru $n \geq m+1$ avem $a_n \in V$, ceea ce s-a arătat că este echivalent cu $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Luând $n(\varepsilon) = m+1$, teorema este demonstrată.

• *Reciproc*

Să presupunem că V este vecinătate a lui ℓ. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subset V$. Conform ipotezei, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, deci $a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subset V, \forall\, n \geq n(\varepsilon)$. Aşadar, în afara vecinătății V există un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi deci $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

➲ OBSERVAȚII

- Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ este limită a şirului (a_n), dacă pentru $\varepsilon > 0$, inecuația $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$, cu necunoscuta n, are un număr finit de soluții.
- Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ nu este limită a şirului (a_n) dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât inecuația $|a_n - \ell| < \varepsilon$, cu necunoscuta n, are un număr finit de soluții sau, altfel spus, inecuația $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$ are o infinitate de soluții.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}=2.$

<u>*Soluție*</u>

Fie $\varepsilon>0.$ Din relația $|a_n-2|<\varepsilon,$ rezultă că $\dfrac{3}{n+1}<\varepsilon,$ de unde $n>\dfrac{3}{\varepsilon}-1.$ Dacă $\varepsilon\geq 3$ se poate lua $n(\varepsilon)=1,$ iar pentru $\varepsilon<3,$ se poate lua $n(\varepsilon)=\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]$ şi se obține $|a_n-2|<\varepsilon,\ \forall\ n\geq n(\varepsilon),$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2.$

> ◢ **Temă**
> **Să se arate că:**
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+5}=2;$
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2};$
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n}{n+1}=-1.$

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+1}\neq 4.$

<u>*Soluție*</u>

$|a_n-4|=\dfrac{n+4}{n+1}\geq 1,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*.$ Aşadar pentru $\varepsilon=1$ se obține că inecuația $|a_n-4|\geq 1$ are o infinitate de soluții. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 4.$

> ◢ **Temă**
> **Arătați că:**
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{2n+1}\neq 1;$
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}\neq\dfrac{1}{3}.$

▣ **TEOREMA 13 (Criteriul cu ε pentru limită infinită)**

Fie (a_n) un şir de numere reale. Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty,$ dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0,$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*,$ astfel încât $a_n>\varepsilon,\ \forall\ n\geq n(\varepsilon).$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty,$ dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0,$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*,$ astfel încât $a_n<-\varepsilon,\ \forall n\geq n(\varepsilon).$

<u>*Demonstrație*</u>

a) Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ şi fie $\varepsilon>0.$ Atunci în vecinătatea $V=(\varepsilon,+\infty)$ se află toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit de termeni: $a_{n_1},a_{n_2},...,a_{n_p}.$ Luând $m=\max\{n_1,n_2,...,n_p\}$ şi $n(\varepsilon)=m+1,$ avem $a_n\in V,\ \forall\ n\geq n(\varepsilon).$ Condiția $a_n\in V$ este echivalentă cu $a_n\in(\varepsilon,+\infty),$ deci $a_n>\varepsilon,$ pentru $n\geq n(\varepsilon).$

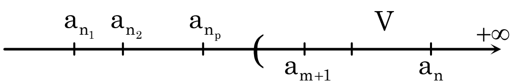


Figura 2

Reciproc

Dacă $V \in \mathscr{V}(+\infty)$, atunci există $V_1 = (\varepsilon, +\infty)$, cu $\varepsilon > 0$, astfel încât $V_1 \subset V$. Conform ipotezei există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > \varepsilon, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Dar această condiție este evident echivalentă cu $a_n \in V_1, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi astfel, în afara vecinătății V_1, deci şi a lui V, se află un număr finit de termeni. În consecință $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

b) Se demonstrează analog punctului a) sau se consideră şirul (b_n), $b_n = -a_n$. ■

Aplicație

☒ Fie (a_n) un şir de numere reale nenule şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

a) Dacă există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > 0, \forall\ n \geq n_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

b) Dacă există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < 0, \forall\ n \geq n_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

<u>*Demonstrație*</u>

a) Se poate considera că $a_n > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deoarece prin îndepărtarea unui număr finit de termeni $a_1, a_2, ..., a_{n_0}$ ai şirului (a_n), limita şirului $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ nu se modifică.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < \frac{1}{\varepsilon}, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Se obține $\frac{1}{a_n} > \varepsilon, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Aşadar, folosind criteriul cu ε pentru limite infinite rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

b) Se arată analog punctului a).

Convenții de scriere: $\frac{1}{0_{(+)}} = +\infty$, $\frac{1}{0_{(-)}} = -\infty$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Folosind criteriul cu ε, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n+4}=3$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n}{n^2+4n+1}=2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+2}=1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}=1$.

E2. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n+2}=+\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{n+3}=-\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n}{n^2+3n-1}=+\infty$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n+3}=+\infty$.

E3. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+1)=+\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n+1}=0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty,\ a>1$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0,\ a\in(0,1)$.

DEZVOLTARE

D1. Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ell$. Folosind criteriul cu ε, să se arate că:

a) dacă $\ell=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=0$;

b) dacă $\ell=+\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=+\infty$;

c) dacă $\ell=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$.

D2. Fie $A\subset\mathbb{R}$ o mulțime nevidă. Să se arate că punctul $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare pentru mulțimea A, dacă şi numai dacă există un şir (x_n), $x_n\in A\setminus\{x_0\}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

D3. Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimile:

a) $A=\left\{\dfrac{1}{n+1}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$; b) $A=\mathbb{Z}$;

c) $A=\mathbb{Q}$.

D4. Fie (a_n) un şir de numere reale. Să se arate că şirul (a_n) este convergent dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0$, există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_m-a_n|\le\varepsilon,\ \forall\ m,\ n\ge n(\varepsilon)$. *(Criteriul lui Cauchy).*

D5. Să se studieze convergența şirurilor folosind criteriul lui Cauchy:

a) $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$;

b) $a_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$;

c) $a_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin n}{2^n}$;

d) $a_n=\dfrac{\cos 1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{\cos 2}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{\cos n}{n(n+1)(n+2)}$;

e) $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}$;

f) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

8.2. OPERAȚII CU ȘIRURI CONVERGENTE

OPERAŢII CU ŞIRURI DE NUMERE REALE

Operațiile cu şiruri de numere reale se definesc având în vedere operațiile cu funcții.

Dacă (a_n) şi (b_n) sunt două şiruri de numere reale, avem:

- $(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$, (**suma** a două şiruri);
- $(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n)$, (**diferența** a doua şiruri);
- $(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n)$, (**produsul** a două şiruri);
- $\alpha\cdot(a_n)=(\alpha\cdot a_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, (**înmulțirea** cu un număr real);
- $\dfrac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, dacă $b_n\neq 0$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, (**câtul** a două şiruri).

OPERAŢII CU ŞIRURI CONVERGENTE

▣ TEOREMA 14

Fie (a_n), (b_n) doua şiruri convergente şi $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Atunci:

a) şirul (a_n+b_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(**Limita sumei este egală cu suma limitelor**.)

b) şirul $(a_n\cdot b_n)$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)$.

(**Limita produsului este egală cu produsul limitelor**.)

<u>*Demonstrație*</u> **(EXTINDERE)**

a) Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n-a|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ şi $|b_n-b|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n\ge n(\varepsilon)$.

Atunci: $|a_n+b_n-a-b|=|a_n-a+b_n-b|\le|a_n-a|+|b_n-b|\le\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=$ $=\varepsilon$, $\forall\ n\ge n(\varepsilon)$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

b) Avem:

$$|a_nb_n-ab|=|(a_n-a)b_n+(b_n-b)a|\le|a_n-a|\cdot|b_n|+|b_n-b|\cdot|a|. \qquad (1)$$

Şirurile (a_n) şi (b_n), fiind convergente sunt şi mărginite, deci există $M_1, M_2\in(0,+\infty)$, astfel încât $|a_n|\le M_1$, $|b_n|\le M_2$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Alegem $M=\max\{M_1, M_2\}$ şi rezultă că $|a_n|\le M$, $|b_n|\le M$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ pentru $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2M}$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât:

$$|a_n-a|\le\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2M} \text{ şi } |b_n-b|\le\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2M},\ \forall\ n\ge n(\varepsilon). \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) se obține:

$\left|a_n \cdot b_n - ab\right| \le \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \ \forall\ n \ge n(\varepsilon).$

Așadar $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab.$ ■

➲ OBSERVAȚII

În particular, se obțin următoarele rezultate pentru șirurile convergente:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n \cdot b_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left|b_n\right|$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^p\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p,\ p \in \mathbb{N}^*$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \beta\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$

Problemă rezolvată

☒ Fie (a_n) și (b_n) două șiruri convergente și $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Să se arate că:

a) șirul (c_n), $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \max\{a, b\}$;

b) șirul (c_n), $c_n = \min\{a_n, b_n\}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \min\{a, b\}$.

Soluție

a) Se are în vedere că $\max\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + b_n + \left|a_n - b_n\right|}{2}$, de unde:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n + \left|a_n - b_n\right|}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + \left|\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)\right|\right) =$$

$$= \frac{a + b + \left|a - b\right|}{2} = \max\{a, b\}.$$

b) Se are în vedere relația: $\min\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + b_n - \left|a_n - b_n\right|}{2}$.

> **▣ TEOREMA 15**
>
> Fie (a_n), (b_n) șiruri de numere reale convergente și $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dacă $b_n,\ b \in \mathbb{R}^*,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este șir convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.
>
> (**Limita câtului este egală cu câtul limitelor**.)

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă (a_n) este un şir de numere reale nenule, convergent şi $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, atunci pentru oricare $p \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to\infty} (a_n)^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p$.

În particular, dacă $p \in \mathbb{N}^*$ şi $a_n = n$ se obține că: $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty$, şi $\lim_{n\to\infty} n^{-p} = = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

Mai general, dacă $a \in (0, +\infty)$, atunci $\lim_{n\to\infty} n^a = +\infty$, şi $\lim_{n\to\infty} n^{-a} = 0$.

❑ REȚINEM!

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a \in (0, +\infty) \\ 0, & a \in (-\infty, 0) \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

2. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale, $b_n \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este un şir convergent, atunci nu rezultă că şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente.

☞ ***Exemplu***

$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-2)^n$. Rezultă că $\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, dar şirurile (a_n) şi (b_n) nu au limită.

3. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, iar $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este nemărginit.

4. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente şi au limita 0, atunci despre şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu se poate afirma nimic în privința convergenței.

☞ ***Exemple***

a) Pentru $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ rezultă că $\frac{a_n}{b_n} = n$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

b) Pentru $a_n = \frac{a}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $a \in \mathbb{R}^*$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = a$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a$.

c) Pentru $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n}$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

d) Pentru $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ care nu are limită.

Aşadar, în cazul $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, nu se poate preciza nimic în privința existenței limitei, iar în cazul în care aceasta există nu se poate preciza nimic referitor la valoarea acesteia. Se spune că, în acest caz, (numit cazul $\frac{0}{0}$), există o **nedeterminare**.

Problemă rezolvată

> ◢ **Temă**
> **Calculați:**
> • $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+3n}{2n^2+5n+3}$;
> • $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^3+5n^2+1}{5n^3+4n+2}$.

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+3}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\sqrt{n}}{n^2+5n+1}$.

Soluție

a) Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

b) Procedând analog punctului a), se obține că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\sqrt{n}}{n^2+5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n\sqrt{n}}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0}{1+0+0}=3.$$

Modul de determinare a limitelor din problema precedentă poate fi aplicat la calculul limitelor şirurilor (a_n) cu termenul general $a_n=R(n)$, unde $R:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, este o funcție rațională, astfel încât $R(n)$ are sens pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă $R(n)=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+...+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+...+b_{q-1}n+b_q}=\frac{f(n)}{g(n)}$, $p,q\in\mathbb{N}^*$ scriind

$$f(n)=n^p\left(a_0+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_p}{n^p}\right)=n^p\cdot x_n,\quad g(n)=n^q\left(b_0+\frac{b_1}{n}+...+\frac{b_q}{n^q}\right)=n^q\cdot y_n.$$

se obține: $\lim\limits_{n\to\infty}R(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p\cdot x_n}{n^q\cdot y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a_0}{b_0}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}$.

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+...+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+...+b_q}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}\cdot(+\infty), & \text{dacă } p>q\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } p=q\\ 0, & \text{dacă } p<q\end{cases}$$

TEOREMA 16

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri convergente, $a_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$.

Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

(**Limita unei puteri se distribuie şi bazei şi exponentului**.)

OBSERVAȚII

- Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ se obține cazul de nedeterminare 0^0.
- Pentru $b_n = \dfrac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.
- Pentru $a_n = a \in (0, +\infty)$ şi $b_n = \dfrac{1}{n}$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = 2^{-n} + n^{-2}$; b) $a_n = n^{-3} + n^{-1}$;

c) $a_n = \dfrac{2n^{-1} + n^{-2}}{3n^{-2} + 2n^{-1}}$;

d) $a_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{4n^2 + 5n + 3}$;

e) $a_n = \dfrac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{2n^2 + 5}$;

f) $a_n = \dfrac{(n+1)^3 + 2(n-1)^3}{(n+1)^3 + 3(n-1)^2}$.

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$;

b) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n(1 + 2 + 3 + \ldots + n)}$;

c) $a_n = 2\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}$; d) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4}}{2 + \sqrt[n]{5}}$;

e) $a_n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)}{1 + 2^n}$; f) $a_n = 2\sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{2}}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{3n^2+1}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+4n}{4n^2+3}\right)^{\frac{n+1}{2n+3}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[n]{3} + 5\sqrt[n]{2} + 2\sqrt[n]{2}}{2\sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{6}}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limita şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{1\cdot 3 + 3\cdot 5 + \ldots + (4n^2 - 1)}$;

b) $a_n = \left(\dfrac{n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} + n^{-4} + 1}{n^{-1} + n^{-3} + 2}\right)^{\frac{n^2+1}{n^2+n}}$;

c) $a_n = \left(\dfrac{1 + n + n^2 + \ldots + n^{10}}{2 + n + n^2 + \ldots + n^{10}}\right)^{\sqrt[n]{4}}$.

A2. Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{R}^*$, ştiind că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3 + bn + 1}{2n^3 + n + 1} = 2 = \lim_{n\to\infty}\frac{bn^2 + a}{3n^2 + b}.$$

A3. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}$;

b) $a_n = \frac{1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \ldots + n! \cdot n}{-1 + (n+1)!}$.

A4. Să se determine numerele naturale $a, b \in \mathbb{N}^*$, pentru care:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+n+a}{n^2+3}\right)^{\frac{bn+2}{n+3}} = 16.$$

8.3. CRITERIUL MAJORĂRII

▣ TEOREMA 17

Fie (a_n) un şir de numere reale.

a) Dacă există $\ell \in \mathbb{R}$ şi (b_n) un şir de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ şi $|a_n - \ell| \le b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

b) Dacă există un şir (b_n), astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ şi $a_n \le b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) Dacă există un şir (b_n), astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ şi $b_n \le a_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Demonstraţie **(EXTINDERE)**

a) Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|b_n| < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Aşadar pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n - \ell| \le b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

b) Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, atunci există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Dar din ipoteză rezultă că $a_n \le b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$, şi astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b_n > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Dar din ipoteză rezultă că $a_n \ge b_n > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$, şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. ■

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$.

◢ Temă

Să se arate că:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(n+1) = 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+n}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$.

Soluție

a) Deoarece $|\sin x| \le |x|, \ \forall\ x \in \mathbb{R},$ rezultă că $\left|\sin\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\sin\frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.$

Având $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0.$

b) Deoarece $1 < 1 + \frac{1}{n} \le 2$ se obține că:

$\left|\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{\ln 2}{n},\ n \ge 1.$ Cu criteriul majorării se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0.$

c) Avem succesiv $\left|\frac{n^2+1}{2n^2+n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-2}{2\left(2n^2+n\right)}\right| \le \frac{1}{n},\ n \ge 1$ și folosind criteriul majorării se obține limita cerută.

> ▣ **TEOREMA 18**
>
> Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive, crescător şi nemărginit. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$

Demonstrație **(EXTINDERE)**

Fie $\varepsilon > 0.$ Din nemărginirea şirului (a_n) rezultă că există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,$ astfel încât $a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon.$ Din monotonia şirului se obține că $a_n \ge a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon,$ $\forall\ n \ge n(\varepsilon).$ De aici se obține că $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon},\ \forall\ n \ge n(\varepsilon),$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$ ■

➲ OBSERVAȚII

1. Condiția de monotonie este necesară. Într-adevăr, luând şirul $(a_n),$ astfel încât $a_{2n} = \frac{1}{n}$ şi $a_{2n-1} = n,\ n \in \mathbb{N}^*,$ acesta are termenii pozitivi şi este nemărginit. Şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ are subşirurile $\left(\frac{1}{a_{2n}}\right)$ şi $\left(\frac{1}{a_{2n-1}}\right)$ cu limitele diferite, deci şirul nu are limită.
2. Condiția de monotonie din enunțul teoremei poate fi înlocuită cu condiția ca şirul (a_n) să aibă limită. În acest caz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$

> ◢ **Temă**
>
> **Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$, în cazurile:**
>
> **a)** $a_n = \frac{n^2}{n+1};$
>
> **b)** $a_n = \ln(n+1);$
>
> **c)** $a_n = 2^n + n.$

3. Orice şir crescător şi nemărginit are limita $+\infty$. Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$, din nemărginirea şirului rezultă că există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$. Din monotonia şirului rezultă că $a_n \geq a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon, \ \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Aşadar, în orice vecinătate $V = (\varepsilon, +\infty)$ a lui $+\infty$ se află toți termenii cu excepția unui număr finit dintre aceştia. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

▣ TEOREMA 19

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, iar (b_n) este mărginit. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Demonstrație

Din mărginirea şirului (b_n) există $M > 0$, astfel încât $|b_n| < M, \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Putem scrie: $|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |a_n|, \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, din criteriul majorării se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. ■

Exerciții rezolvate

> ◢ **Temă**
>
> **Să se calculeze:**
>
> **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)$;
>
> **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;
>
> **c)** $a_n = \frac{3}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 k$.

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{3}{n}\right) = 0$.

Soluție

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ şi $\left|\cos\frac{3}{n}\right| \leq 1, \ n \in \mathbb{N}^*$. Din teorema 19 rezultă că limita şirului dat este 0.

☒ **2.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n)$.

Soluție

Fie $a_n = \cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n$. Deoarece $|\cos x| \leq 1, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că $|a_n| \leq n$. Se obține că: $\frac{1}{n^2}(\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n}{n}$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, iar $\left|\frac{a_n}{n}\right| \leq 1$, limita cerută este egală cu 0.

▣ TEOREMA 20

Fie $a \in (-1, +\infty)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 1, & \text{dacă } a = 1 \\ 0, & \text{dacă } a \in (-1, 1) \end{cases}$.

<u>*Demonstrație*</u>

• Fie $a > 1$. Atunci şirul $\left(a^n\right)$ este crescător şi nemărginit, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$, (teorema 18).

• Fie $a \in (-1, 1)\setminus\{0\}$ şi $b = \dfrac{1}{a} \in (-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

Pentru $b > 1$, şirul $\left(b^n\right)$ are limita $+\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b^n} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Pentru $b < -1$, considerăm subşirurile $\left(b^{2n}\right)$ şi $\left(b^{2n-1}\right)$ care au limitele $+\infty$, respectiv $-\infty$. Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b^n} = 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b^{2n-1}} = = \dfrac{1}{-\infty} = 0$. Aşadar, dacă $a \in (-1, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Pentru $a < -1$, şirul $\left(a^n\right)$ nu are limită.

☞ <u>***Exemplu***</u>

Dacă $a = -2$, atunci şirul $\left(a^n\right)$ are subşirurile $a^{2n} = 2^{2n}$ şi $a^{2n-1} = -2^{2n-1}$ cu limitele $+\infty$, respectiv $-\infty$.

2. Pentru $a < -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$.

O problemă de electrostatică

Se consideră circuitul din figura 3 format din două condensatoare C_1 şi C_2 având capacitățile a, respectiv b şi o baterie cu tensiunea electromotoare E şi un comutator K. Comutatorul este în poziția 1, iar condensatorul C_2 este descărcat.

a) Să se calculeze tensiunea la bornele condensatorului C_2 după a n-a comutare a comutatorului K între pozițiile 1 şi 2.

b) Care este tensiunea la bornele condensatorului C_2 dacă n tinde la infinit?

<u>*Soluție*</u>

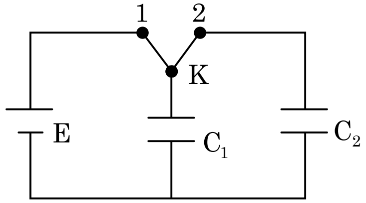


Figura 3

a) În poziția 1, condensatorul C_1 are sarcina $Q = aE$, care prin cuplarea comutatorului pe poziția 2 se va redistribui pe cele două condensatoare în $Q_1 = aU_1$ şi $Q_2 = bU_2$, deci $aE = (a+b)U_1$. Prin cuplare din nou la poziția 1 şi apoi la 2, condensatorul C_2 va avea tensiunea U_2 dată de relația $aE + bU_1 = (a+b)U_2$. Notând $\alpha = \dfrac{a}{a+b}$, se obține că $U_1 = \alpha E$, $U_2 = \alpha E + \alpha\beta E$, unde $\beta = \dfrac{b}{a+b}$. Procedând analog în continuare se obține că: $U_n = \alpha E\left(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n-1}\right) = \alpha E\dfrac{1-\beta^n}{1-\beta} = E\left(1-\beta^n\right)$.

b) Având în vedere că $\beta < 1$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\beta^n = 0$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = E$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că următoarele şiruri au limita 0:

a) $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(n^2\right)$; b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; d) $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^6+n}$.

E2. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2} = 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+2} = +\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n}{n^2+1} = 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n^3}{1+n} = -\infty$.

E3. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)}{(1+2+3+\ldots+n)^2} = \dfrac{4}{3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)}{n[1+3+5+\ldots+(2n-1)]} = \dfrac{1}{3}$.

E4. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\ldots+\dfrac{1}{n^p}\right) = 0,\ p\ge 2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right) = 0$.

E5. Fie $a_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{\pi}{2n}+\ldots+\sin\dfrac{\pi}{n^2}\right)$, $n\ge 1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

E6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2,2}{\sqrt{3}+1}\right)^n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)^n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^n$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2a}{a^2+1}\right)^n$, $a\ge 0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}$, $a\ge 0$.

APROFUNDARE

A1. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1\cdot3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{n(n+2)}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+n)}\right] = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^n\right)}{n} = 1$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+2^n\right)}{n} = \ln 2$.

A2. Să se calculeze limita şirului (a_n):

a) $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}+3}$; b) $a_n = \dfrac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n}$;

c) $a_n = \dfrac{2^{2n+1}+3^n+1}{3^n+4^n}$;

d) $a_n = \dfrac{2^n+a^n}{2^n+3^n}$, $a>0$;

e) $a_n = \dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$, $a,b\in(0,+\infty)$.

(ASE, Buc., 1997)

A3. Să se arate că:

a) dacă $a>1$, iar şirul (x_n) este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=+\infty$;

b) dacă $a>1$, iar şirul (x_n) este descrescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=0$;

c) dacă $a>1$, iar şirul (x_n) de numere reale strict pozitive este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a x_n=+\infty$;

d) dacă $a>1$, iar şirul (x_n) este strict descrescător şi are limita 0, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a x_n=-\infty$.

DEZVOLTARE

D1. Un şir (a_n) de numere reale verifică relațiile de recurență: $a_1=a$, $a_2=b$, $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}$, $n\ge 2$, $\alpha, \beta, a, b\in\mathbb{R}$. (*Relație de recurență liniară şi omogenă de ordinul 2*)

Dacă $r_1, r_2\in\mathbb{C}$ sunt soluțiile ecuației $r^2=\alpha r+\beta$, să se arate că există $c_1, c_2\in\mathbb{C}$, astfel încât $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$:

a) $a_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n$, în cazul $r_1\ne r_2$;

b) $a_n=(c_1n+c_2)r_1^n$, în cazul $r_1=r_2$.

D2. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale date de relațiile de recurență: $a_1=a$, $b_1=b$, $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta b_n$ şi $b_{n+1}=\gamma a_n+\delta b_n$, $n\ge 1$. Să se arate că şirurile (a_n) şi (b_n) verifică o relație de recurență omogenă de ordinul 2.

D3. Fie (x_n) un şir de numere reale, astfel încât $x_1\in\mathbb{R}$, $x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$, $n\ge 1$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că dacă ecuația $r=\dfrac{ar+b}{cr+d}$ are rădăcinile reale distincte r_1, r_2, atunci şirul (y_n), $y_n=\dfrac{x_n-r_1}{x_n-r_2}$, $n\ge 1$, este o progresie geometrică.

b) Să se studieze convergența şirului (x_n) în condițiile cazului a).

D4. Să se studieze convergența şirurilor şi în caz de convergență să se afle limitele acestora:

a) $a_1=2$, $a_2=10$, $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$, $n\ge 2$;

b) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$, $n\ge 2$;

c) $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n-5}{a_n-1}$, $n\ge 1$;

d) $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{4}{3+a_n}$, $n\ge 1$;

e) $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+3}{a_n-1}$, $n\ge 1$;

f) $a_1=2$, $b_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3b_n$, $b_{n+1}=a_n+3b_n$, $n\ge 1$;

g) $x_1=0$, $y_1=1$, $2x_{n+1}=\sqrt{3}x_n+y_n$ şi $2y_{n+1}+x_n=\sqrt{3}y_n$, $n\ge 1$.

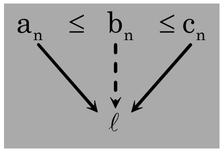
D5. Să se determine numărul pavărilor distincte cu dale 1×2 ale unui dreptunghi cu dimensiunile $2\times n$.

8.4. CRITERIUL CLEȘTELUI

▣ TEOREMA 21 (Criteriul cleştelui)

Fie (a_n), (b_n), (c_n) şiruri de numere reale, astfel încât $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

<u>*Demonstrație*</u>



• Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, aplicând criteriul majorării, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

• Analog, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

• Putem presupune că $\ell \in \mathbb{R}$. Considerăm şirul $(c_n - a_n)$ care este convergent şi cu termenii pozitivi, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = \ell - \ell = 0$.

De asemenea, $0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, relație din care se obține: $0 \le \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \le \lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Dar, $b_n = b_n - a_n + a_n$, relație din care se obține că şirul (b_n) este convergent şi, mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 + \ell = \ell$.

Teorema este complet demonstrată. ■

Criteriul cleştelui este util în cazul în care nu putem arăta în mod direct convergența unui şir sau nu ştim să calculăm direct limita acestuia.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \dfrac{\left[n\sqrt{2}\right]}{n^2}$; **b)** $a_n = \dfrac{n + 3\sin n^2}{n^2}$; **c)** $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+n}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Din proprietatea părții întregi a unui număr real se obține că: $n\sqrt{2} - 1 < \left[n\sqrt{2}\right] \le n\sqrt{2}$ şi

$$\frac{n\sqrt{2}-1}{n^2} < a_n \le \frac{\sqrt{2}}{n} \text{ sau } \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{1}{n^2} < a_n \le \frac{\sqrt{2}}{n}. \quad (1)$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ şi se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

> ◢ **Temă**
> **Calculați:**
> • $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[n\sqrt{3}\right]+\left[n\sqrt{5}\right]}{n^2}$;
> • $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+\sqrt{n}}{n^2+1}$;
> • $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3n^2+k}$.

b) Deoarece $-1 \le \sin(n^2) \le 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ se obține că $\dfrac{n-3}{n^2} \le a_n \le \dfrac{n+3}{n^2}$, sau $\dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} \le a_n \le \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}$, şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Avem inegalitățile evidente $\begin{cases} \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1} \le \dfrac{1}{n^2+1} \\ \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+2} \le \dfrac{1}{n^2+1} \\ \ldots \\ \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1} \end{cases}$.

Prin adunarea acestor relații se obține că:

$\dfrac{n}{n^2+n} \le a_n \le \dfrac{n}{n^2+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$, aplicând criteriul cleştelui se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{n}{n^2+7}$; **b)** $a_n = \dfrac{2n^2+3n+1}{3n^3+2n+1}$;

c) $a_n = \sqrt[n]{1+2^n}$; **d)** $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$;

e) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$; **f)** $a_n = \dfrac{e^n}{n!}$;

g) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$; **h)** $a_n = \dfrac{2^n+3^n+5^n}{n!}$;

i) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$; **j)** $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$.

E2. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n^3+1} + \dfrac{n+2}{n^3+2} + \ldots + \dfrac{n+n}{n^3+n}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

c) $a_n = \dfrac{1^2+1}{n^3+1} + \dfrac{2^2+2}{n^3+2} + \ldots + \dfrac{n^2+n}{n^3+n}$;

(Olimpiadă județeană, 1975)

d) $a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+1}} + \dfrac{n+2}{\sqrt{n^3+2}} + \ldots + \dfrac{n+n}{\sqrt{n^3+n}}$.

APROFUNDARE

A1. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a, b \in (0, +\infty)$;

b) $a_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}$, $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$;

c) $a_n = \dfrac{\sin 1}{n^2+1} + \dfrac{\sin 2}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{n^2+n}$;

d) $a_n = \dfrac{1}{1+3^n} + \dfrac{1}{2+3^n} + \ldots + \dfrac{1}{n+3^n}$;

e) $a_n = \dfrac{1}{2^0+3^n} + \dfrac{1}{2^1+3^n} + \ldots + \dfrac{1}{2^n+3^n}$;

f) $a_n = \dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{n+(2n)!}$.

A2. **Să se determine $a \in (0, +\infty)$, astfel încât şirul (a_n), $a_n = \sqrt{2^n+4^n+a^n}$ să aibă limita:**

a) 5; b) a^2-4a; c) $25a^{-1}$.

A3. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{\left[\sqrt{2}\right] + \left[2^2\sqrt{2}\right] + \ldots + \left[n^2\sqrt{2}\right]}{n^3+n}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n} \ln\left(3^{\frac{n}{1}} + 3^{\frac{n}{2}} + \ldots + 3^{\frac{n}{n}}\right)$.

(Olimpiadă locală, 1994)

A4. **Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive cu proprietatea:** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha<1$. **Să se arate că** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(Criteriul raportului)

8.5. CÂTEVA LIMITE REMARCABILE

Folosind criteriul cleştelui vom demonstra câteva rezultate ce conţin şiruri trigonometrice.

▣ TEOREMA 22

Fie (x_n) un şir astfel încât $x_n\in\mathbb{R}^*$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$.

Demonstraţie

Fie cercul trigonometric $\mathscr{C}(0,1)$ şi unghiul la centru $\widehat{AOM}$ cu măsura în radiani egală cu x, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, (figura 4). Din interpretarea geometrică a funcţiilor trigonometrice sinus şi tangentă avem că: $\sin x=BM<x<AN=\operatorname{tg}x$, (1). Înmulţind relaţia (1) cu $\frac{1}{\sin x}$ se obţine că:

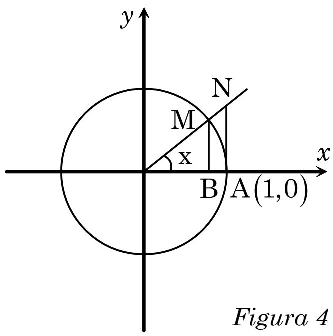


Figura 4

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, adică $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

Aceste inegalităţi au loc şi pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, deoarece funcţiile $x\to\cos x$, $x\to\frac{\sin x}{x}$ sunt funcţii pare. Pentru un şir (x_n) cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, începând de la un anumit rang avem că $-\frac{\pi}{2}<x_n<\frac{\pi}{2}$ şi $\cos x_n<\frac{\sin x_n}{x_n}<1$. (2)

Dar $1\geq\cos x_n=1-2\sin^2\frac{x_n}{2}>1-\frac{x_n^2}{2}$. (3)

Din relaţiile (2) şi (3) se obţine că: $1-\frac{x_n^2}{2}\leq\frac{\sin x_n}{x_n}<1$, şi aplicând criteriul cleştelui rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$. ■

▣ **CONSECINȚĂ**

Fie (x_n) un şir de numere reale nenule, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}=1$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n}=1$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}=1$.

◢ **Temă**

Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n=\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; **b)** $a_n=n^2\sin\frac{2}{n^2}$; **c)** $a_n=n\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\right)$;

d) $a_n=n^3\sin\frac{1}{n}\sin\frac{2}{n^2}$; **e)** $a_n=\left(n+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{2n}{n^2+1}$; **f)** $a_n=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

APLICAȚII ÎN GEOMETRIE

LUNGIMEA CERCULUI

Fie $\mathscr{C}(O, r)$ un cerc de centru O şi rază r, $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi înscris în cerc şi $B_1B_2\ldots B_n$ un poligon regulat cu n laturi circumscris cercului, $n\geq 3$, (figura 5).

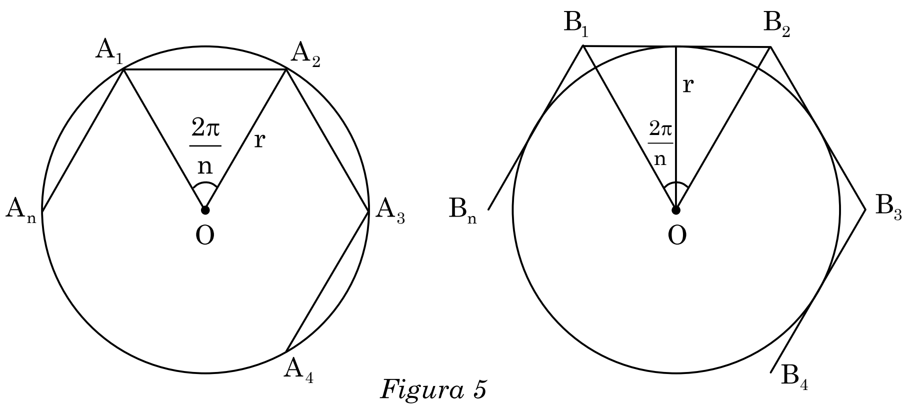


Figura 5

Obținem $A_1A_2=2r\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ şi $B_1B_2=2r\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, $n\geq 3$. Notând cu p_n şi P_n perimetrele celor două poligoane regulate vom obține că $p_n=2nr\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ şi $P_n=2nr\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, iar dacă **l este lungimea cercului** vom avea că:

$p_n\leq l\leq P_n,\ \forall\, n\geq 3.$ (1)

Prin trecere la limită, vom obține că:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi r \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r \text{ şi } \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi r \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Folosind criteriul cleştelui, din relația (1) se obține că $l = 2\pi r.$

ARIA CERCULUI

Folosind notațiile anterioare pentru ariile celor două poligoane regulate se obține:

$$s_n = \frac{1}{2} n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}, \text{ respectiv } S_n = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, n \geq 3 \text{ şi } s_n \leq A_C \leq S_n, n \geq 3 \text{ (2)},$$

unde $\mathbf{A_C}$ **este aria cercului**.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pi r^2 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi r^2$. Folosind criteriul cleştelui, din relația (2) se obține că $A_C = \pi r^2$.

9 PROPRIETATEA LUI WEIERSTRASS

Se cunoaşte că orice şir convergent de numere reale este mărginit, dar nu orice şir mărginit este convergent.

Proprietatea de mărginire a unui şir este o condiție necesară pentru convergența şirului, dar nu şi suficientă.

Aşadar, proprietatea de mărginire trebuie completată cu alte proprietăți ale şirului pentru a se asigura convergența acestuia.

Un rezultat important în această privință îl constituie teorema lui Weierstrass.

Karl WEIERSTRASS
(1815-1897)
matematician german

Are contribuții deosebite în analiza matematică – teoria funcțiilor, funcții abeliene, calculul variațiilor etc.

▣ TEOREMA 23 (Proprietatea lui Weierstrass)

Fie (a_n) un şir de numere reale.

a) Dacă (a_n) este un şir monoton crescător şi mărginit superior, atunci (a_n) este şir convergent.

b) Dacă (a_n) este un şir monoton descrescător şi mărginit inferior, atunci (a_n) este şir convergent.

Folosind proprietatea lui Weierstrass rezultă că orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Studiul convergenţei unui şir folosind proprietatea lui Weierstrass prezintă avantajul că nu trebuie să cunoaştem limita acestuia, dar are şi dezavantajul că nu dă o metodă de calcul a limitei şirului.

Totuşi, lucrând cu şiruri monotone, se arată că dacă (a_n) este un şir monoton şi $A=\{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$, dacă şirul este crescător;
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A$, dacă şirul este descrescător.

Folosind proprietatea lui Weierstrass se arată că are loc şi următorul rezultat în legătură cu şirurile mărginite.

▣ TEOREMA 24 (Lema lui Cesaro)
Orice şir mărginit conţine cel puţin un subşir convergent.

➲ OBSERVAŢII

- Dacă (a_n) este un şir nemărginit superior, atunci acesta conţine un subşir cu limita $+\infty$.
- Dacă (a_n) este un şir nemărginit inferior, atunci acesta conţine un subşir cu limita $-\infty$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se studieze convergenţa şirurilor (a_n) cu termenul general:

a) $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$; **b)** $a_n = \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$.

Soluţie

a) Deoarece $a_{n+1}-a_n = \dfrac{2n+3}{n+3}-\dfrac{2n+1}{n+2} = \dfrac{3}{(n+2)(n+3)} \geq 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, rezultă că şirul este monoton crescător. Dar $a_n = 2-\dfrac{3}{n+2} < 2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, rezultă astfel că şirul (a_n) este mărginit superior. Folosind proprietatea lui Weierstrass rezultă că (a_n) este convergent.

b) Deoarece $a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, se obţine că şirul (a_n) este monoton crescător.

◢ Temă
Studiaţi convergenţa şirurilor:

- $a_n = \dfrac{3n+1}{n+3}$;
- $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$;
- $a_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$.

Folosind inegalitatea $n^2 > (n-1)(n+1),\ n \geq 2,$ se obține:

$$a_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2 - \frac{1}{n} < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$ deci şirul (a_n) este mărginit superior. Aşadar (a_n) este şir convergent.

☒ **2.** Să se studieze convergența şirului cu termenul general $a_n = \dfrac{10^n}{n!}.$

Soluție

Avem: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{10}{n+1} < 1,\ \forall n \geq 10.$ Aşadar, şirul (a_n) este monoton descrescător începând de la termenul de rang 10. Deoarece $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$ şirul este mărginit inferior.

Considerând şirul (b_n) cu termenul general $b_n = a_{n+10},$ rezultă că (b_n) este monoton descrescător şi mărginit inferior, deci este convergent.

Şirul (a_n) este şir convergent deoarece se obține din şirul (b_n) prin adăugarea unui număr finit de termeni.

> **Temă**
> **Studiați convergența şirurilor:**
> - $a_n = \dfrac{9^n}{(n+1)!};$
> - $a_n = \dfrac{10^n}{(n+1)!}.$

➲ OBSERVAȚII

- Din problema rezolvată 2, rezultă că dacă un şir (a_n) este mărginit şi există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*,$ astfel încât subşirul $(a_n)_{n \geq n_0}$ este monoton, atunci şirul (a_n) este convergent.
- Dacă un şir (a_n) este mărginit, dar nu este monoton, nu rezultă că şirul este divergent.

☞ ***Exemplu***

Şirul $(a_n),\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ este mărginit, dar nu este monoton. Totuşi, şirul (a_n) este convergent şi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0.$

Aşadar, proprietatea de monotonie nu este nici necesară şi nici suficientă pentru convergență.

EXERCIȚII ŞI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze convergența şirurilor (a_n) în cazurile:

a) $a_n = \dfrac{n+4}{2n+1};$ **b)** $a_n = \dfrac{3n-2}{n+1};$

c) $a_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+1};$

d) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}.$

E2. Să se studieze convergenţa şirurilor:

a) $a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$;

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

c) $a_n = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$;

d) $a_n = \frac{(n-3)^2}{n^2+1}$.

E3. Să se arate că următoarele şiruri (a_n) au cel puţin un subşir convergent şi să se dea un exemplu de asemenea subşir:

a) $a_n = (-1)^n$; b) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1}$;

c) $a_n = \sin\frac{n\pi}{6}$; d) $a_n = \cos\frac{(n+1)\pi}{4}$;

e) $a_n = \operatorname{tg}\frac{(2n+1)\pi}{3}$;

f) $a_n = \sin\frac{n\pi}{4}\cdot\cos\frac{n\pi}{3}$.

APROFUNDARE

A1. Să se studieze convergenţa şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$;

b) $a_n = \frac{n^p}{a^n}$, $a > 1$, $p \in \mathbb{N}$;

c) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

d) $a_n = \left(1+\frac{1}{2^1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$;

e) $a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}$;

f) $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}$.

A2. Se consideră şirul cu termenul general:
$a_n = \sum_{k=1}^{n}\log_{\frac{1}{3}}\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$. Să se arate că şirul (a_n) este convergent.

(Turism, Suceava, 1997)

A3. Să se studieze convergenţa şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)^2}$;

b) $a_n = \frac{1}{1!\cdot 1}+\frac{1}{2!\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n!\cdot n}$;

c) $a_n = \frac{1}{2+3}+\frac{1}{2^2+3^2}+\ldots+\frac{1}{2^n+3^n}$.

A4. Să se determine mulţimea limitelor subşirurilor următoarelor şiruri:

a) $a_n = 1+(-1)^n$;

b) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$;

c) $a_n = 2\cdot\sin\frac{n\pi}{3}$;

d) $a_n = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$;

e) $a_n = \sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{6}$;

f) $a_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$;

g) $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^n$.

DEZVOLTARE

D1. Să se arate că:

a) orice şir nemărginit superior are un subşir cu limita $+\infty$;

b) orice şir nemărginit inferior are un subşir cu limita $-\infty$.

D2. Să se determine mulţimea punctelor limită (mulţimea limitelor subşirurilor) pentru şirurile:

a) $a_n = (-1)^n n$;

b) $\mathbf{a_n} = (-1)^n \frac{n^2}{n+3}$;

c) $\mathbf{a_n} = n \cdot \sin \frac{n\pi}{3}$;

d) $a_n = (-1)^n n \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$;

e) $\mathbf{a_n} = (1+i)^n + (1-i)^n$;

f) $\mathbf{a_n} = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n$.

D3. Fie (a_n) un şir de numere reale. Să se arate că (a_n) are cel puțin un punct limită.

D4. Să se demonstreze teorema lui Weierstrass. ([1])

D5. Să se demonstreze lema lui Cesaro. ([1])

10 APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI WEIERSTRASS

10.1. ŞIRUL APROXIMĂRILOR SUCCESIVE ALE UNUI NUMĂR REAL

Fie $x \in \mathbb{R}$ un număr real pozitiv cu scrierea sub formă zecimală $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, unde $a_0 \in \mathbb{N}$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sunt cifre ale sistemului zecimal de numerație.

Să considerăm scrierea în baza 10 a numărului x:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414213\ldots$
$\pi \approx 3{,}14159265\ldots$

Asociem acestui număr şirul (x_n) cu termenul general:

$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$, numit **şirul aproximărilor succesive prin lipsă** cu o eroare mai mică de 10^{-n} ale lui x şi şirul (y_n) cu termenul general $y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$, numit **şirul aproximărilor succesive prin adaos** cu o eroare mai mică de 10^{-n} a lui x.

Se observă că $x_n, y_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $x_n \le x \le y_n$ şi $y_n - x_n = \frac{1}{10^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (1)

De asemenea, şirurile (x_n) şi (y_n) sunt monotone şi mărginite, şi rezultă conform proprietății lui Weierstrass că ele sunt convergente. Din relația (1) se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Analog se procedează şi în cazul $x < 0$.

În concluzie: orice număr real este limita şirurilor aproximărilor lui succesive prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}.

Se obține că orice număr real este limită a unui şir de numere raționale, adică orice număr real este punct de acumulare pentru mulțimea $\mathbb{Q}$.

10.2. PUTERI CU EXPONENT REAL

Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$ şi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ne propunem să definim puterea a^x.

Considerăm şirurile (x_n) şi (y_n) de numere raționale care aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos numărul x, $x_n \le x \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi şirurile de puteri $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$.

Pentru $a > 1$, şirul $\left(a^{x_n}\right)$ este monoton crescător, iar şirul $\left(a^{y_n}\right)$ este monoton descrescător.

Din relațiile $a^{x_1} < a^{x_n} < a^{y_n} < a^{y_1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirurile sunt mărginite.

Aplicând teorema lui Weierstrass se obține că şirurile $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$ sunt convergente.

Avem: $0 < a^{y_n} - a^{x_n} = a^{x_n}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) < a^{y_1}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{y_n} - a^{x_n}\right) = 0$ şi astfel, şirurile $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$ au aceeaşi limită.

Prin definiție, a^x reprezintă limita comună a şirurilor $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x = \lim_{n\to\infty} a^{y_n}$$

Pentru $a \in (0, 1)$, şirul $\left(a^{x_n}\right)$ este descrescător, iar $\left(a^{y_n}\right)$ este crescător, şi rezultatele anterioare se mențin.

Dacă (x_n) este un şir de numere reale convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ şi $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\ell}$.

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale convergente cu limite nenule. Dacă şirul $\left(a_n^{\,b_n}\right)$ este definit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{\,b_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

10.3. STUDIUL CONVERGENȚEI ŞIRURILOR DATE PRIN RELAȚII DE RECURENȚĂ

Problemă rezolvată

☒ Să se studieze convergența şirurilor (a_n):

a) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ n \ge 1$; **b)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n},\ n \ge 1$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se observă că $a_1 = \sqrt{2} < 2,\ a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2+2} = 2.$

Presupunem prin inducție că $a_k < 2$. Atunci $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2+2} = 2.$ Din principiul inducției matematice, rezultă că $a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este mărginit superior. Avem și $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul (a_n) este mărginit.

Deoarece $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n = \dfrac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \dfrac{(1 + a_n)(2 - a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că șirul (a_n) este crescător. În concluzie, șirul (a_n) este convergent.

> ◢ **Temă**
> **Studiați convergența șirurilor:**
> **a)** $x_1 \in (0, 1)$,
> $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1,\ n \geq 1;$
> **b)** $x_1 = 2$,
> $x_{n+1} = \dfrac{1}{2} x_n + 1,\ n \geq 1.$

Pentru calculul limitei, fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \in [0, 2]$. Folosind operațiile cu șiruri convergente, din relația de recurență obținem:

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(a_n + 2)} = \sqrt{x+2}.$$ Se obține că $x = 2$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$

b) Avem: $a_1 = 1,\quad a_2 = \dfrac{1}{2},\quad a_3 = \dfrac{2}{3},\quad a_4 = \dfrac{3}{5},\quad a_5 = \dfrac{5}{8}$, și se observă că $a_1 > a_3 > a_5$ și $a_2 < a_4$.

Presupunem prin inducție că $a_{2k-1} > a_{2k+1}$ și $a_{2k} < a_{2k+2},\ k \geq 1.$

Rezultă că:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{1 + a_{2k}} > \frac{1}{1 + a_{2k+2}} = a_{2k+3} \text{ și } a_{2k+2} = \frac{1}{1 + a_{2k+1}} < \frac{1}{1 + a_{2k+3}} = a_{2k+4}.$$

Din principiul inducției se obține că $a_{2n-1} > a_{2n+1}$ și $a_{2n} < a_{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Așadar subșirul (a_{2n-1}) este monoton descrescător, iar subșirul (a_{2n}) este monoton crescător. Dar $0 < a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și astfel se obține că subșirurile (a_{2n-1}) și (a_{2n}) sunt convergente. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$ și $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$. Din relația de recurență, pentru n par și apoi pentru n impar rezultă relațiile $x = \dfrac{1}{1+y}$ și $y = \dfrac{1}{1+x}$, de unde se obține că $x = y$. În concluzie șirul (a_n) este convergent, subșirurile (a_{2n}) și (a_{2n-1}) având aceeași limită $\ell = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze convergența șirurilor (a_n) date de relațiile de recurență și să se afle limitele acestora:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}},\ n \ge 1;$

b) $a_1 \in (1, 2)$ și $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2,\ n \ge 1;$

c) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1,\ n \ge 1;$

d) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n},\ n \ge 1.$

APROFUNDARE

A1. Să se studieze convergența șirurilor (a_n) date prin relațiile de recurență, iar în caz de convergență să se afle limitele acestora:

a) $a_1 \in (0, 1),\ a_{n+1} = a_n - a_n^3,\ n \ge 1;$

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n^2},\ n \ge 1;$

c) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \sqrt{6-a_n},\ n \ge 1;$

d) $a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+a_n},\ n \ge 1;$

e) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ 13^{a_{n+2}} = 12^{a_{n+1}} + 5^{a_n},\ n \ge 1;$

f) $x_1 = a,\ x_n \ge \dfrac{1}{4} + x_{n-1}^2,\ n \ge 2.$

(Olimpiadă locală, 1988)

DEZVOLTARE

D1. Fie $f:[a, b] \to [a, b]$ o funcție monoton crescătoare și (x_n) un șir, astfel încât $x_1 \in [a, b]$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \ge 1$.

a) Să se arate că (x_n) este monoton crescător dacă $x_1 \le x_2$, și monoton descrescător dacă $x_1 \ge x_2$.

b) Să se arate că șirul (x_n) este convergent.

D2. Fie $f:[a, b] \to [a, b]$ o funcție monoton crescătoare și (x_n) un șir, astfel încât $x_1 \in [a, b]$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \ge 1$.

a) Să se arate că subșirurile (x_{2n-1}) și (x_{2n}) sunt monotone.

b) Șirul (x_n) este convergent?

D3. Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \ln(1+x_n),\ n \ge 1;$

b) $x_1 = \dfrac{1}{3},\ x_{n+1} = x_n + 2^{x_n},\ n \ge 1;$

c) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n},\ n \ge 1;$

d) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 3^{x_n} - 2^{x_n},\ n \ge 1.$

(Olimpiade locale, 1983)

10.4. NUMĂRUL e. ȘIRURI CU LIMITA NUMĂRUL e

Situație-problemă

O persoană are nevoie pentru o investiție derulată pe o perioadă de timp t, de o sumă S. Această investiție i-ar aduce în final avantajul triplării sumei investite.

Apelând la un creditor pentru suma S, i se impun următoarele condiții:

• Datoria generată de împrumut trebuie plătită o singură dată la sfârşitul perioadei stabilite.

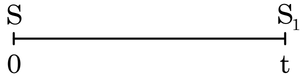
• Dacă perioada de timp i s-ar considera împărțită în n părți egale, suma datorată la sfârşitul fiecărei părți din cele n va fi egală cu suma datorată la sfârşitul părții anterioare majorate cu a n-a parte din aceasta.

a) Cât ar plăti la final această persoană dacă perioada de timp ar fi considerată împărțită în 1, 2, 3, ... respectiv n părți egale?

b) Cât de mare ar putea fi datoria ce trebuie plătită la final în aceste condiții? Suma S investită ar aduce profit în condițiile acestui împrumut?

Pentru a da răspuns întrebărilor puse să analizăm cazurile particulare:

a) • Pentru $n=1$ avem $S_1 = S + \frac{S}{1} = 2S.$



• Pentru $n=2$ avem, (figura 1):

$S_1 = S + \frac{S}{2} = S\left(1+\frac{1}{2}\right)$ şi

$S_2 = S_1 + \frac{S_1}{2} = S_1\left(1+\frac{1}{2}\right) = S\left(1+\frac{1}{2}\right)^2.$

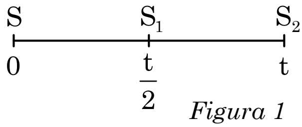


Figura 1

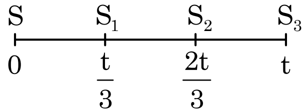


Figura 2

• Pentru $n=3$ avem, (figura 2):

$S_1 = S + \frac{S}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right)$, $S_2 = S_1 + \frac{S_1}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$ şi

$S_3 = S_2 + \frac{S_2}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right)^3.$

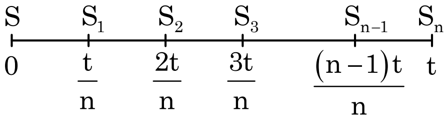


Figura 3

• Pentru cazul general avem, (figura 3):

$S_1 = S + \frac{S}{n} = S\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $S_2 = S_1 + \frac{S_1}{n} = S_1\left(1+\frac{1}{n}\right) = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, şi în final

$$S_n = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

După cum se observă în calculul sumei finale S_n apare şirul (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) S-a obținut că $S_n = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$. Deoarece $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{9}{4} = 2,25$, $x_3 = \frac{64}{27} \approx 2,37$, $x_4 = \frac{625}{256} \approx 2,44$, deci $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Investitorul ar putea considera că suma finală plătită ar fi cu atât mai mare cu cât n ar fi mai mare.

Aşadar, suma maximă plătită ar depinde de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, dacă aceasta există.

Pentru şirul (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, avem următorul rezultat:

> ▣ **TEOREMA 25 (Daniel Bernoulli [2])**
>
> Fie (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$. Atunci:
>
> a) şirul (x_n) este monoton strict crescător;
>
> b) şirul (x_n) este mărginit: $2 \leq x_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
>
> c) şirul (x_n) este convergent.

Limita şirului (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se notează cu „e" după numele matematicianului elvețian Leonhard Euler (1707-1783). Numărul e este un număr irațional şi are valoarea aproximativă $e \approx 2,718281$.

Revenind la problema anterioară vom avea că:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = S \cdot e < 3S$, deci împrumutul aduce profit în condițiile specificate.

ALTE ŞIRURI CU LIMITA NUMĂRUL e

Şirul (e_n), $(e_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este şir convergent. Aplicând direct operațiile cu limite de şiruri se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$, care este o operație căreia nu i se atribuie nici un sens.

În soluționarea cazurilor de nedeterminare 1^∞, şirul $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ are un rol important.

1. Fie (x_n), $x_n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Într-adevăr, (x_n) este un subşir al şirului de numere naturale, iar şirul (a_n), $a_n = \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ este un subşir al şirului (e_n). Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$.

2. Fie (x_n), $x_n > 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Într-adevăr, fie $y_n = [x_n]$, partea întreagă a numărului x_n.

Deoarece $x_n - 1 < y_n \le x_n$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ şi

$$\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{1+y_n}\cdot\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\cdot\left(1+\frac{1}{y_n}\right).$$

Prin trecere la limită în inegalitățile anterioare rezultă că:

$e \le \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le e$, şi astfel se obține limita cerută.

Proprietatea (2) este adevărată şi dacă şirul (x_n) are limita $+\infty$, dar nu toți termenii săi sunt pozitivi.

Într-adevăr, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, atunci în afara vecinătății $V = (0, +\infty)$ a lui $+\infty$, există un număr finit de termeni ai şirului (x_n). Cum limita unui şir nu se schimbă prin înlăturarea unui număr finit de termeni, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

3. Fie (x_n) un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dacă şirul (y_n), $y_n = (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$ este definit, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Acest rezultat mai general poate fi folosit pentru calculul limitelor de şiruri în cazul de nedeterminare 1^∞.

Astfel:

• Dacă $(x_n), (y_n)$ sunt şiruri de numere reale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{x_n y_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)}$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n+2}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2}{n^2+1}-1\right)^{n+2} \overset{(2)}{=} e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)\left(\frac{n^2}{n^2+1}-1\right)} = e^0 = 1.$

4. Dacă (x_n) este un şir de numere reale nenule, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1;$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a,\ a\in(0,+\infty)\setminus\{1\};$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+x_n)^r-1}{x_n}=r,\ r\in\mathbb{R}.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$; b) $a_n=\left(1+\dfrac{5}{n+1}\right)^{n+1}$;

c) $a_n=\left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{n+2}$;

d) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;

e) $a_n=\left(1+\dfrac{n}{n^2+1}\right)^n$;

f) $a_n=\left(1+\dfrac{n}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

g) $a_n=\left(\dfrac{n+5}{n+2}\right)^n$; h) $a_n=\left(\dfrac{2n+3}{2n+4}\right)^{n+1}$;

i) $a_n=\left(\dfrac{n^2+n+2}{n^2+n-1}\right)^{n^2-1}$;

j) $a_n=\left(\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^{2+\sqrt{n}}$;

k) $a_n=\left(\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n+2}}\right)^n$.

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n=\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^{n+1}$;

b) $a_n=\left(\dfrac{n^4+2n^2+1}{n^4+n^2+3n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$;

c) $a_n=\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^{-3n}\cdot 27^n$;

d) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)^{n+1}$.

E3. Se consideră şirul (a_n),

$$a_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}.$$

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$.

E4. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n=n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;

b) $a_n=\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\dfrac{n}{n^2+1}\right)$;

c) $a_n=n^3\cdot\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\cdot\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$;

d) $a_n=n^2\cdot\sin\dfrac{2}{n}\cdot\ln\left(\dfrac{n+3}{n}\right)$.

E5. **Să se calculeze limitele şirurilor:**

a) $a_n = n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$;

b) $a_n = n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, $a > 1$;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$; **d)** $a_n = n\left(\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{4}\right)$;

e) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{3}}$; **f)** $a_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)^n$.

APROFUNDARE

A1. **Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale astfel încât:**

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

$b_n = n$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$.

A2. **Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, în cazurile:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n+3}\right)^n = e^2$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+an+6}{n^2+n+1}\right)^n = e^2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+bn+1}{n^2+3n-2}\right)^{n+1} = e$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+2n+a+1}{bn^2+3n+1}\right)^{-n} = e^{2a+b}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+a^2}{n+1} - \dfrac{n^2+b-b^2}{n+2}\right)^n = e^{-\frac{17}{4}-2a}$.

A3. **Fie (a_n),** $a_n = \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

a) Să se arate că (a_n) este convergent.

b) Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right) = \ln 2.$$

11 OPERAȚII CU ȘIRURI CARE AU LIMITĂ

11.1. SUMA ȘIRURILOR CARE AU LIMITĂ

Fie (a_n), (b_n) şiruri de numere reale. Atunci au loc următoarele situații:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a+b$	$a+b$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$a+\infty = +\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$	$a-\infty = -\infty$
$+\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty + b = +\infty$
$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty + b = -\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Cazuri de nedeterminare. Operațiile $(+\infty)+(-\infty)$ şi $(-\infty)+(+\infty)$ nu au sens	
$-\infty$	$+\infty$		

În cazul limitei sumei există cazul de nedeterminare $\infty - \infty$.

☞ ***Exemple***

a) Fie $a_n = n^2+3n$, $b_n = 3-n$. Rezultă că $a_n + b_n = n^2+2n+3$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty$.

b) Fie $a_n = n + (-1)^n$ şi $b_n = -n$. Atunci $a_n + b_n = (-1)^n$, care nu are limită.

c) Fie $a_n = n + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, $b_n = -n$. Atunci şirul sumă $a_n + b_n = \alpha$, are limita α.

d) Fie $a_n = n + 3$, $b_n = -2n$. Atunci $a_n + b_n = -n + 3$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.

❑ REȚINEM!

Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită, iar suma limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

Exerciţiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1} - n + 1\right)$.

Soluție

a) Cazul $\infty - \infty$. Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

b) Cazul $\infty - \infty$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1} - n + 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2 - n^2 + n - n + 1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

◢ **Temă**
Calculați:
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n+2} - n\right)$.

11.2. PRODUSUL ŞIRURILOR CARE AU LIMITĂ

Fie (a_n) un şir de numere reale care are limită şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele rezultate generale:

Produsul cu scalari:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	α	$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n)$	Scrierea simbolică a operației
$\ell \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\ell \cdot \alpha$	$\ell \cdot \alpha$
$+\infty$	$\alpha > 0$	$+\infty$	$\alpha \cdot (+\infty) = +\infty, \alpha > 0$
$+\infty$	$\alpha < 0$	$-\infty$	$\alpha \cdot (+\infty) = -\infty, \alpha < 0$
$-\infty$	$\alpha > 0$	$-\infty$	$\alpha \cdot (-\infty) = -\infty, \alpha > 0$
$-\infty$	$\alpha < 0$	$+\infty$	$\alpha \cdot (-\infty) = +\infty, \alpha < 0$
$+\infty$	$\alpha = 0$	În aceste cazuri, şirul $(\alpha \cdot a_n)$ este şirul nul şi limita sa este 0.	
$-\infty$	$\alpha = 0$		

Produsul a două şiruri cu limita infinită:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

Produsul a două şiruri care au limită, unul dintre acestea fiind convergent:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$a>0$	$+\infty$	$+\infty$	$a\cdot(+\infty)=+\infty,\ a>0$
$a<0$	$+\infty$	$-\infty$	$a\cdot(+\infty)=-\infty\ a<0$
$a>0$	$-\infty$	$-\infty$	$a\cdot(-\infty)=-\infty,\ a>0$
$a<0$	$-\infty$	$+\infty$	$a\cdot(-\infty)=+\infty,\ a<0$
0	$+\infty$	În acest caz se obține o nedeterminare. Operația $0\cdot(\pm\infty)$ nu este definită.	
0	$-\infty$		

În cazul limitei produsului există cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$.

☞ ***Exemple***

a) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $b_n=n$. Şirul $(a_n\cdot b_n)$, $a_n\cdot b_n=(-1)^n$, nu are limită.

b) $a_n=n^2$, $b_n=\dfrac{\alpha}{n^2}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=\alpha\in\mathbb{R}$.

c) $a_n=n^2$, $b_n=\dfrac{1}{n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$.

d) $a_n=n^2$, $b_n=-\dfrac{1}{n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$.

❑ **REȚINEM!**

Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită şi dacă produsul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

11.3. CÂTUL A DOUĂ ŞIRURI CARE AU LIMITĂ

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri care au limită, astfel încât şirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ să fie definit.

Cazul în care şirurile sunt convergente s-a tratat la operații cu şiruri convergente.

În cazul în care cel puțin una dintre limitele şirurilor (a_n) şi (b_n) este infinită, avem situațiile:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$	Scrierea simbolică a operației
$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0	$\frac{a}{+\infty} = 0,\ \frac{a}{-\infty} = 0$
$+\infty$	$+\infty$	Cazuri de nedeterminare	Operațiile $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$ nu sunt definite, fiind considerate operații fără sens
$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$-\infty$		
$-\infty$	$+\infty$		

Aşadar, în cazul limitei raportului a două şiruri rezultă cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$.

☞ ***Exemple***

a) $a_n = n\alpha,\ b_n = n.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha.$

b) $a_n = n^2,\ b_n = n.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty.$

c) $a_n = n,\ b_n = n^2.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

d) $a_n = -n^2,\ b_n = n.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty.$

e) $a_n = 2n + 1 + (-1)^n \cdot n,\ b_n = 2n + 1 - (-1)^n \cdot n.$ Şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are subşirurile $\frac{a_{2n}}{b_{2n}} = \frac{3n+1}{n+1}$ cu limita 3 şi $\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} = \frac{n+1}{3n+1}$ cu limita $\frac{1}{3}$. În acest caz şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu are limită.

❑ REȚINEM!

Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limite, iar şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este definit şi raportul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

11.4. RIDICAREA LA PUTERE

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale, astfel încât şirul $\left(a_n^{b_n}\right)$ să fie definit şi $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Pentru şirul putere $\left(a_n^{b_n}\right)$ avem situațiile:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right)$	Scrierea simbolică a operației
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
$a > 1$	$+\infty$	$+\infty$	$a^{+\infty} = +\infty,\ a > 1$
$a > 1$	$-\infty$	0	$a^{-\infty} = 0,\ a > 1$
$0 < a < 1$	$+\infty$	0	$a^{+\infty} = 0,\ a \in (0, 1)$
$0 < a < 1$	$-\infty$	$+\infty$	$a^{-\infty} = +\infty,\ a \in (0, 1)$
$+\infty$	$b > 0$	$+\infty$	$(+\infty)^b = +\infty,\ b > 0$
$+\infty$	$b < 0$	0	$(+\infty)^b = 0,\ b < 0$
0	$+\infty$	0	$0^{+\infty} = 0$
$+\infty$	$-\infty$	0	$(+\infty)^{-\infty} = 0$
1	$+\infty$	În aceste cazuri avem o nedeterminare	Operațiile $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, $(+\infty)^0$, 0^0 nu sunt definite
1	$-\infty$		
$+\infty$	0		
0	0		

Cazurile $\mathbf{1^\infty}$, $\mathbf{\infty^0}$, $\mathbf{0^0}$ sunt cazuri de nedeterminare.

☞ ***Exemple***

a) $a_n = 1 + \frac{\alpha}{n}$, $b_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)$, $b_n = n^2$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{+\infty} = +\infty$.

c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 2n + 1 + (-1)^n \cdot n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1+(-1)^n\cdot n}$ nu există, deoarece pentru n par se obține $a_{2n}^{b_{2n}} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{6n+1}$ cu limita e^3, iar pentru n impar se obține $c_n = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+2}$ cu limita e.

➲ OBSERVAȚII

- Cazul 1^{∞} se soluționează folosind şiruri care au limita numărul e.
- Cazurile ∞^{0} şi 0^{0} se pot aduce la cazul $0 \cdot \infty$.

Dacă avem $c_n = a_n^{b_n}$, atunci putem scrie $c_n = e^{b_n \cdot \ln a_n}$ şi se au în vedere rezultatele:

a) Dacă $x_n \in (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ln x_n = 0.$

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x_n}{x_n} = 0.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = n^2 - n;$

b) $a_n = -n^3 + 2n^2;$

c) $a_n = -4n^3 + 3n - 1;$

d) $a_n = 4n^4 - 5n^6 + 3.$

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; b) $a_n = \dfrac{2n^2-3n}{4n^2-n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{2n^3+5n-1}{3n^2+n+1}$; d) $a_n = \dfrac{7-2n-n^3}{2n^2+3n+1}$.

E3. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{2n^2+\alpha \cdot n+1}{3n^2+2n+1}$;

b) $a_n = \dfrac{\alpha \cdot n^2+2n+1}{2n^2+3n-1}$;

c) $a_n = \dfrac{\alpha \cdot n^3+\beta \cdot n^2+n}{2n^2+1}$;

d) $a_n = \dfrac{\alpha \cdot n^3+\beta \cdot n^2+1}{\alpha \cdot n^2+3n+1}$.

E4. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

b) $a_n = \dfrac{n\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)}{\left[1+3+5+\ldots+(2n-1)\right]^2}$;

c) $a_n = \dfrac{1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+n(n+2)}{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)}$;

d) $a_n = \dfrac{(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)}{1+4+7+\ldots+(3n-2)}$;

e) $a_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{n+1}{2}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$;

b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+n}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1};$

e) $a_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot n^p,\ p \in \mathbb{N};$

f) $a_n = \left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)\cdot n^2;$

g) $a_n = n^k\left(\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}-\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\right),\ k \in \mathbb{N};$

h) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+2}}$.

A2. Să se calculeze limitele șirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$;

b) $a_n = \dfrac{2^n+3^n+1}{3^n+n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{3^n+2\cdot 5^n}{7\cdot 3^n+5^n}$;

d) $a_n = \dfrac{2^n+3\cdot 4^n+7^{n+2}}{3\cdot 2^n+4\cdot 7^n}$;

e) $a_n = \dfrac{a^n+2^n}{3^n+2^n}$, $a>0$;

f) $a_n = \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, $a, b>0$;

g) $a_n = \dfrac{a^{2n}+a^2+8}{a^{2n}+2a^2+4}$, $a>0$.

A3. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{2n+1}-a\cdot n-b\right)=1$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+a}-n\right)=1$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+a\cdot n}{n+2}-\dfrac{b\cdot n^2}{n+1}\right)=3$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)=0$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[a\sqrt{n+2}+\left(a^2+a-3\right)\sqrt{n}\right]=0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(20-a^2\right)n^2+2n+3}}{2n+1}=2$.

A4. Să se determine parametrii reali a și b, astfel încât șirurile (a_n) și (b_n) să fie simultan convergente:

a) $a_n = a\sqrt{n+5}+b\sqrt{9n+5}-\sqrt{4n+3}$,
$b_n = a\sqrt{9n+3}-b\sqrt{25n+30}+\sqrt{64n+15}$;

b) $a_n = \left(a^2+b\right)\sqrt{n+4}-\sqrt{n+9}$,
$b_n = a\sqrt{9n+8}+b^2\sqrt{n+5}-3\sqrt{n+4}$.

A5. Să se calculeze limitele șirurilor (a_n):

a) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n}-n$;

b) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2}+\sqrt[3]{3n-n^2}$;

c) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2+2}\right)$;

d) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^3+3n}+\sqrt[3]{n-3n^3}\right)$.

A6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+1\right)^{\frac{n}{n^2+1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\ln^{-2} n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+3}\right)^{\frac{2}{n}}$.

11.5. LEMA LUI STOLZ-CESARO

▣ **TEOREMA 25 (Stolz-Cesaro [2])**

Fie (a_n) și (b_n) șiruri de numere reale, astfel încât:

a) șirul (b_n) este strict crescător și nemărginit, cu termenii nenuli;

b) șirul (c_n), $c_n = \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ are limita $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci șirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\ell$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{\ln n}{n}$; b) $a_n = \frac{\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n}{n+1}$;

c) $a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$;

d) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

e) $a_n = \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4}{n^5}$;

f) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$;

g) $a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}\right)$.

APROFUNDARE

A1. Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \ell$.

A2. Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Să se arate că:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n} = \ell$.

A3. Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive. Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ există, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

A4. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$; b) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;

c) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n+1}}$;

e) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^n}}$;

f) $a_n = \sqrt[n]{n(n+1)(n+2)...(n+n)}$.

DEZVOLTARE

D1. Fie $(a_n), (b_n)$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

b) (b_n) este strict descrescător;

c) şirul (c_n), $c_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este convergent şi are limita ℓ.

(Lema lui Stolz-Cezaro, cazul $\frac{0}{0}$)

D2. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = n\left(\ln 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - ... - \frac{1}{2n}\right)$;

b) $a_n = n\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} ... - \frac{1}{n!}\right)$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ Să se precizeze valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. În cazul propozițiilor false, să se dea un contraexemplu.

a) Orice şir monoton este mărginit.

b) Orice şir mărginit este monoton.

c) Orice şir convergent este monoton.

d) Orice subşir al unui şir monoton este monoton.

e) Există şiruri monoton crescătoare care au cel puţin un subşir monoton descrescător.

f) Suma a două şiruri monotone este un şir monoton.

g) Diferenţa a două şiruri monoton crescătoare este un şir monoton crescător.

h) Suma a două şiruri nemărginite este un şir nemărginit.

i) Orice şir divergent este nemărginit.

j) Orice şir nemărginit are limita $+\infty$ sau $-\infty$.

k) Produsul a două şiruri care nu au limită este un şir care nu are limită.

l) Dacă două şiruri sunt convergente, atunci raportul lor este un şir convergent.

m) Dacă pătratul unui şir (a_n) este şir convergent, atunci şirul (a_n) este şir convergent.

n) Dacă un şir convergent are toţi termenii diferiţi de zero, atunci limita sa este diferită de zero.

Testul 2

❍ 1. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$; b) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$; c) $a_n = \dfrac{2n+\alpha}{n+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3p.)

❍ 2. Se consideră şirul (a_n) astfel încât: $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$, $n \ge 1$.

a) Să se arate că $a_n = \dfrac{2}{3}\left[2^n + (-1)^n\right]$, $n \ge 1$.

b) Să se studieze convergenţa şirului cu termenul general $b_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

(2p.)

❍ 3. Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$; b) $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n-1}\right)$. ***(2p.)***

❍ 4. Să se calculeze limita şirului (a_n) dacă: $\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^n \le a_n \le \left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+n+1}\right)^{n+1}$, $n \ge 1$.

(2p.)

Testul 3

❍ 1. Să se studieze convergenţa şirurilor (a_n) şi în caz de convergenţă să se calculeze limita acestora:

a) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+3)}$; b) $a_n = \left(\dfrac{2^{\frac{2}{n}} + 3^{\frac{3}{n}}}{2}\right)^n$. ***(3p.)***

❍ **2. Să se determine valorile parametrilor reali în cazurile:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot a^n}{3^n+10^{n+1}}=\frac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{b\cdot n+3}{n^2+1}\right)^{n-1}=e^3$. ***(2p.)***

❍ **3. Să se calculeze:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}-3\sqrt{n+2}}$. ***(2p.)***

❍ **4. Să se calculeze:** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

(2p.)

12 LIMITA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi x_0 un punct de acumulare al mulțimii D.

După cum se cunoaşte, pentru orice vecinătate $V\in\mathcal{V}(x_0)$, există puncte $x\in D\cap\left(V\setminus\{x_0\}\right)$ în care funcția f este definită. Altfel spus, funcția f este definită în puncte „oricât de apropiate“ de punctul x_0.

Se pune, astfel, problema comportării funcției f în vecinătatea (apropierea) punctului x_0. Aceasta înseamnă a studia ce se întâmplă cu valorile funcției f pe vecinătăți oarecare ale punctului x_0 (chiar şi în cazurile în care f nu este definită în x_0).

Să analizăm următorul exemplu:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-x$ şi punctul $x_0=1$, punct de acumulare al domeniului de definiție.

Vom studia ce se întâmplă cu valorile funcției f când x se află într-o vecinătate $U\in\mathcal{V}(1)$ „oricât de mică“. Considerăm $U=(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, o vecinătate a punctului $x_0=1$, (figura 1).

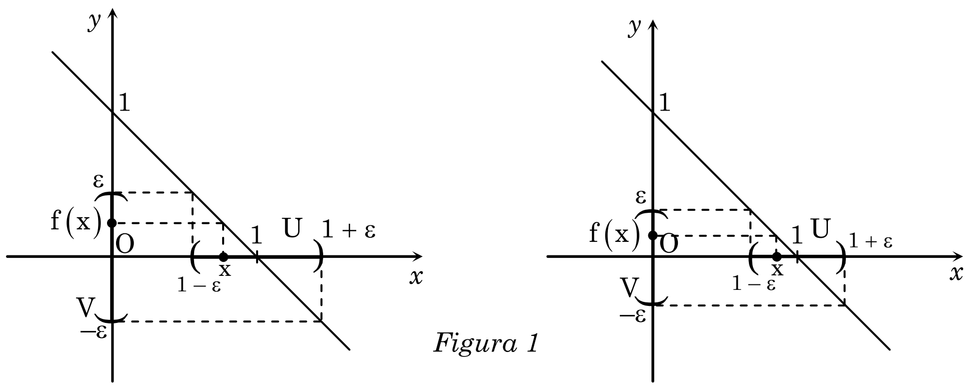


Figura 1