❍ **2. Să se determine valorile parametrilor reali în cazurile:**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5\cdot a^n}{3^n+10^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\dfrac{b\cdot n+3}{n^2+1}\right)^{n-1}=e^3$. ***(2p.)***

❍ **3. Să se calculeze:**

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}-3\sqrt{n+2}}$. ***(2p.)***

❍ **4. Să se calculeze:** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$.

***(2p.)***

# 12 LIMITA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $x_0$ un punct de acumulare al mulțimii D.

După cum se cunoaşte, pentru orice vecinătate $V\in\mathcal{V}(x_0)$, există puncte $x\in D\cap(V\setminus\{x_0\})$ în care funcția f este definită. Altfel spus, funcția f este definită în puncte „oricât de apropiate“ de punctul $x_0$.

Se pune, astfel, problema comportării funcției f în vecinătatea (apropierea) punctului $x_0$. Aceasta înseamnă a studia ce se întâmplă cu valorile funcției f pe vecinătăți oarecare ale punctului $x_0$ (chiar şi în cazurile în care f nu este definită în $x_0$).

Să analizăm următorul exemplu:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-x$ şi punctul $x_0=1$, punct de acumulare al domeniului de definiție.

Vom studia ce se întâmplă cu valorile funcției f când x se află într-o vecinătate $U\in\mathcal{V}(1)$ „oricât de mică“. Considerăm $U=(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, o vecinătate a punctului $x_0=1$, (figura 1).

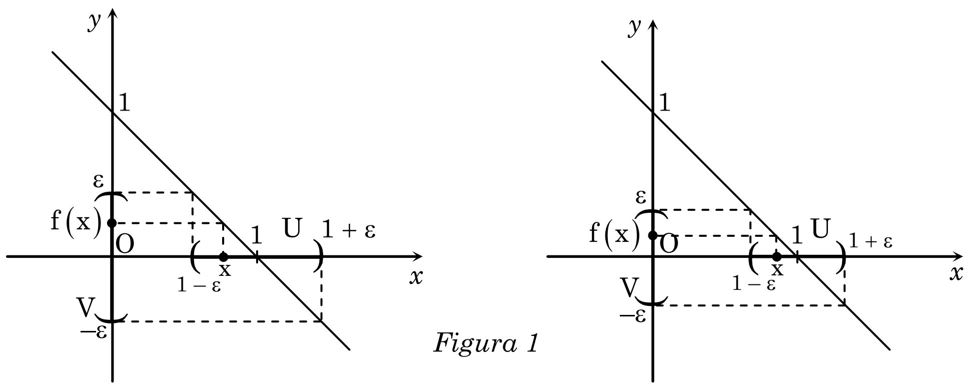



*Figura 1*

Se observă, lecturând figura 1, că pentru $\varepsilon > 0$, valorile funcției f vor aparține mulțimii $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ care este o vecinătate a punctului 0.

Aşadar, intuitiv, putem spune că valorile funcției f sunt mereu într-o vecinătate a punctului 0, pentru oricare $\varepsilon > 0$.

Folosind un alt limbaj vom spune că dacă „x tinde la 1“ atunci „$f(x)$ tinde la 0“.

Mai mult, fie V o vecinătate a punctului 0. Atunci există un interval $I = (a, b)$ astfel încât $0 \in I \subset V$, (figura 2).

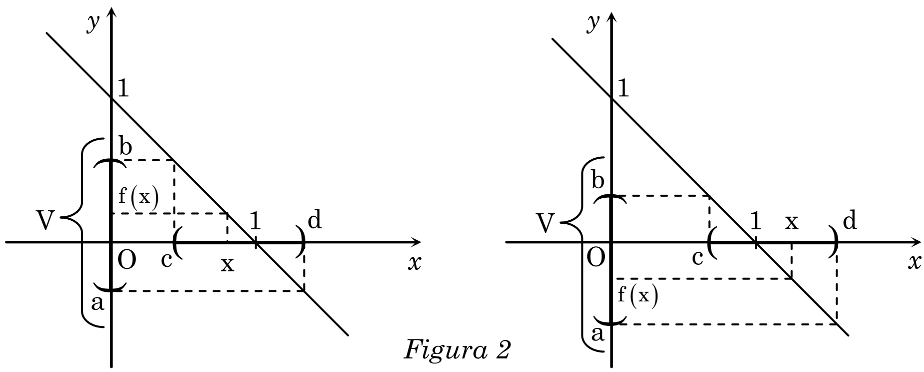


*Figura 2*

Lecturând figura 2 se observă că există intervalul $U = (c, d)$, vecinătate a punctului $x_0 = 1$, cu proprietatea că pentru oricare $x \in U \cap D$ rezultă că $f(x) \in (a, b)$, deci $f(x) \in V$.

Vom spune că numărul $\ell = 0$ este limita funcției f în punctul $x_0 = 1$ şi vom scrie $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Proprietatea desprinsă în cazul acestei funcții defineşte o nouă noțiune importantă în cadrul analizei matematice.

### ❖ DEFINIȚIE

- Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea D şi $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Numărul $\ell$ se numeşte **limita funcției f în punctul $x_0$** dacă pentru oricare vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ cu proprietatea că pentru orice $x \in D \cap (U \setminus \{x_0\})$ rezultă că $f(x) \in V$.

  Se foloseşte notația $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

### ➲ OBSERVAȚII

- Aşa cum s-a specificat, problema existenței limitei unei funcții $f : D \to \mathbb{R}$ în punctul de acumulare $x_0 \in D'$ se pune chiar dacă funcția f nu este definită în $x_0$. În acest caz restricția $x \neq x_0$ din definiție nu mai este necesară.

- Dacă mulțimea D este nemărginită superior sau inferior, atunci $x_0$ poate fi $+\infty$, respectiv $-\infty$.
- Dacă $x_0$ nu este punct de acumulare pentru D, atunci nu se pune problema limitei funcției f în $x_0$.
  Astfel, într-un punct izolat al mulțimii D nu se pune problema limitei.
- Limita funcției în punctul $x_0$, dacă există, este unică.

Definiția limitei unui şir este conținută în definiția limitei unei funcții într-un punct. Mai mult, folosind limitele de şiruri se poate caracteriza existența limitei unei funcții într-un punct.

**▣ TEOREMA 27**
**(Eduard Heine (1821-1881), [2])**
Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

**1.** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$;

**2.** Pentru oricare şir $(x_n)$, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$.

*Eduard HEINE (1821-1882) matematician german*

*Are contribuții în studiul numerelor iraționale, convergenței şirurilor, funcțiilor continue.*

Această teoremă dă posibilitatea folosirii tuturor rezultatelor studiate în legătură cu calculul limitelor de şiruri.

**➲ OBSERVAȚII**

- Pentru a determina limita funcției $f : D \to \mathbb{R}$ într-un punct de acumulare $x_0$ al lui D este suficient să cunoaştem limita unui singur şir $(f(x_n))$, unde $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.
- Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ nu are limită în punctul $x_0$, în una din situațiile:
  **a)** Există un şir $(x_n)$, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu limita $x_0$, astfel încât şirul $(f(x_n))$ nu are limită.
  **b)** Există şirurile $(x_n), (y_n)$, $x_n, y_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu limita $x_0$, astfel încât şirurile $(f(x_n))$ şi $(f(y_n))$ au limite diferite.

## Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se studieze existența limitelor funcțiilor f în punctele specificate:

**a)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+3x,\ x_0=2;$

**b)** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=0.$

<u>Soluție</u>

**a)** Punctul $x_0=2$ este punct de acumulare pentru $\mathbb{R}$. Dacă $(x_n)$ este un şir de numere reale, $x_n\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, atunci se obține $f(x_n)={x_n}^2+3x_n$. Folosind operațiile cu limite de şiruri obținem: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}({x_n}^2+3x_n)=2^2+3\cdot 2=10.$ Aşadar funcția f are limită în punctul $x_0=2$ şi $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=10.$

**b)** Punctul $x_0=0$ este punct de acumulare pentru mulțimea $(0,+\infty)$.

Fie $(x_n)$ un şir, astfel încât $x_n\in(0,+\infty)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{0_{(+)}}=+\infty.$ Aşadar funcția f are limită în $x_0=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty.$

☒ **2.** Să se arate că funcțiile f nu au limită în punctele specificate:

**a)** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=0;$

**b)** $f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\sin x,\ x_0=+\infty.$

<u>Soluție</u>

**a)** Vom arăta că există două şiruri $(x_n),(y_n)$, cu $x_n, y_n\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ $=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ pentru care şirurile $(f(x_n))$ şi $(f(y_n))$ nu au aceeaşi limită. Considerăm $x_n=-\dfrac{1}{n},\ y_n=\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*$ şi se obține că $f(x_n)=-n,\ f(y_n)=n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=+\infty.$ În concluzie funcția f nu are limită în $x_0=0.$

**b)** Considerăm şirurile $(x_n),(y_n)$ cu termenii generali $x_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,$ $y_n=-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ şi se obține că $f(x_n)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1,\quad f(y_n)=$ $=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1.$ Aşadar f nu are limită la $+\infty$.

☒ **3.** Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nu are limită în nici un punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Soluție*

Fie $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $(x_n), (y_n)$ două şiruri de numere reale astfel încât $x_n \in \mathbb{Q},\ y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$.

Atunci $f(x_n) = 1,\ f(y_n) = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$ şi rezultă că şirurile $(f(x_n)), (f(y_n))$, au limite diferite, deci funcția f nu are limită în punctul $x_0$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se calculeze:**

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 3x)$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2 + 3x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{(x-2)^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3}{x+6}$;

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^2$.

**E2. Să se determine constanta reală a pentru care:**

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+a}{1+x} = 2$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+ax+3}{2x+3} = 3$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2+ax)}{x^2+ax+x} = \dfrac{2}{3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{(\sqrt{x-1}+a)(x-2)} = \dfrac{1}{4}$.

### APROFUNDARE

**A1. Să se arate că următoarele funcții nu au limite în punctele specificate:**

a) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x_0 = 0$;

b) $f : \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2x},\ x_0 = 1$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$, în

$x_0 = 0$ şi $x_0 = +\infty$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [x],\ x_0 \in \mathbb{Z}$.

**A2. Să se arate că următoarele funcții nu au limită în punctele specificate. Există puncte în care funcțiile au limită?**

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$,

$x_0 = 3$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},\ x_0 = 1$.

**(Olimpiadă, 1993)**

# 13 LIMITE LATERALE

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală și $x_0\in D'$ un punct de acumulare al mulțimii D.

## ❖ DEFINIȚII

- Numărul $\ell_s\in\overline{\mathbb{R}}$ se numește **limita la stânga** a funcției f în $x_0$, dacă pentru oricare șir $(x_n)$, $x_n\in D\cap(-\infty, x_0)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\ell_s$.
- Numărul $\ell_d\in\overline{\mathbb{R}}$ se numește **limita la dreapta** a funcției f în $x_0$, dacă pentru oricare șir $(x_n)$, $x_n\in D\cap(0, +\infty)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\ell_d$.

Limitele la stânga și la dreapta ale funcției f în punctul $x_0\in D'$ se numesc **limite laterale** ale funcției f în $x_0$.

- Pentru limita la stânga se folosesc notațiile $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)$ sau $f(x_0-0)$.
- Pentru limita la dreapta se folosesc notațiile $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)$ sau $f(x_0+0)$.

## ➲ OBSERVAȚII

**1.** Dacă funcția f are în punctul $x_0$ limite laterale, acestea sunt unice. Acest fapt rezultă din unicitatea limitelor de șiruri.

**2.** Fie $f:D\to\mathbb{R}$ și $x_0\in D'$ punct de acumulare. Funcția f poate să admită limită la stânga în $x_0$, fără să aibă limită la dreapta în $x_0$, sau reciproc.

☞ ***Exemplu***

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$. Pentru șirurile cu termenii generali $x_n=\dfrac{-1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ și $y_n=\dfrac{-1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$ care au limita 0 și sunt negative se obține: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-1$ și $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=1$, deci funcția f nu are limită la stânga în $x_0$. Se obține ușor că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=0$.

**3.** Există funcții $f:D\to\mathbb{R}$ care nu au limite laterale în $x_0\in D'$.

☞ ***Exemplu***

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ nu are limite laterale în $x_0=0$.

**4.** Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Atunci limita la stânga în a şi limita la dreapta în b, nu au sens, deoarece în acest caz $(a,b)\cap(-\infty,a)=\varnothing$ şi $(a,b)\cap(b,+\infty)=\varnothing$. Dacă f are limite în a şi b, acestea coincid cu limita la dreapta în a, respectiv cu limita la stânga în b.

După cum s-a observat anterior, o funcție $f:D\to\mathbb{R}$ poate avea limite laterale în $x_0\in D'$ sau este posibil ca acestea să nu existe.

În cazul în care limitele laterale există, ele pot fi egale sau diferite. Dacă limitele laterale există şi sunt egale, atunci funcția are limită în $x_0$, egală cu valoarea comună a acestora, în caz contrar funcția nu are limită în $x_0$.

❑ **REȚINEM!**

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D.

Funcția f are limită în punctul $x_0\in D'$ dacă şi numai dacă limitele laterale ale funcției în $x_0$ există şi sunt egale.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow f(x_0-0)=\ell=f(x_0+0)$$

## *Problemă rezolvată*

☒ Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le 1\\ a^2x, & x>1\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care funcția f are limită în $x_0=1$.

<u>*Soluție*</u>

Calculăm $\ell_s=f(x_0-0)$ şi $\ell_d=f(x_0+0)$. Fie $(x_n)$, $x_n<1$, un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+a)=2+a=\ell_s$.

Dacă $(x_n)$, $x_n>1$, este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a^2x_n)=$ $=a^2=\ell_d$.

Din condiția $\ell_s=\ell_d$ se obține ecuația $a^2=a+2$ cu soluțiile $a\in\{-1,2\}$.

Aşadar $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ există dacă şi numai dacă $a\in\{-1,2\}$.

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se verifice dacă următoarele funcții au limită în punctele specificate:

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 \in \{0, 1, \infty\}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 2 \\ 5x, & x > 2 \end{cases},\ x_0 = 2$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0$.

**E2.** Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au limită în punctele date:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \le 1 \\ ax+1, & x > 1 \end{cases},\ x_0 = 1$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \le 1 \\ 2 + x, & x \in (1, 2) \\ x^2 - a, & x \ge 2 \end{cases},\ x_0 = 1$ şi $x_0 = 2$;

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x+1}, & x \le 0 \\ \frac{2x+1}{x+3}, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care există limitele funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ x + a, & x \le 0 \end{cases}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \le -1 \\ 3x^2 + bx, & x \in (-1, 1), \\ x^2 + 2ax + 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

în $x = -1$ şi $x = 1$.

**A2.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se determine punctele în care f are limită dacă:

a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = |x - 2|$;

c) $f(x) = [x]$; d) $f(x) = \max\{1;\ x^2\}$;

e) $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$; f) $f(x) = x + [x]$.

**A3.** Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ nu are limită în $x = 0$.

**A4.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

a) Să se arate că dacă $\alpha < 0$, funcția f nu are limită în $x = 0$.
b) Să se arate că dacă $\alpha > 0$, funcția f are limită în $x = 0$.

## DEZVOLTARE

**D1.** Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de argument real şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D.
Să se arate că dacă f este monotonă, atunci funcția f are limite laterale în $x_0$.

**D2.** Să se arate că următoarele funcții au limită în orice punct $x_0$ din domeniul de definiție:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x,\ a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$;

b) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x$, $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$;

c) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \in \mathbb{R}^*$.

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$.

**D3.** **Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D.**
**Să se arate că numărul $\ell_s$ este limita la stânga în $x_0$ a funcției f dacă și numai dacă pentru oricare șir $(x_n)$, $x_n \in D$, $x_n < x_0$, monoton crescător și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, rezultă că:**
**$\ell_s = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.**

## 14 PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CARE AU LIMITĂ

Teorema lui Heine referitoare la caracterizarea limitelor de funcții cu ajutorul limitelor de șiruri permite extinderea unor proprietăți ale limitelor de șiruri la limitele de funcții.

**▣ TEOREMA 28 (limita modulului)**
Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

*Demonstrație*

Din condiția $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ rezultă că pentru oricare șir $(x_n)$, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. Din proprietatea limitei modulului unui șir se obține că:

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \left|\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right| = |\ell| \text{ și astfel } \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|. \ ■$$

**❑ REȚINEM!**

$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$, (limita modulului este egală cu modulul limitei).

**▣ TEOREMA 29 (Criteriul majorării, cazul limitelor finite)**
Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ două funcții reale și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare al lui D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ și există $\ell \in \mathbb{R}$, astfel încât $|f(x) - \ell| \le g(x)$, $\forall x \in D$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

*Demonstrație*

Fie $(x_n)$, $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ un șir oarecare cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$ și $|f(x_n) - \ell| \le g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Din criteriul majorării pentru șiruri rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. Așadar, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$. ■

## Probleme rezolvate

> ◢ **Temă**
> **Calculați:**
> - $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x}$;
> - $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{3}{x^2}$;
> - $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}$.

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

<u>*Soluție*</u>

Considerăm funcțiile:

$$f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\ \text{și}\ g(x)=|x|.$$

Avem: $|f(x)-0|=\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$ și $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

Din criteriul majorării rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,\ x_0\in\mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

Avem: $|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=$

$=|x-x_0|,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x-\sin x_0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

Analog:

$|\cos x-\cos x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq|x-x_0|,\ \forall x\in\mathbb{R}$ şi

astfel $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

> ▣ **TEOREMA 30 (Criteriul majorării, cazul limitelor infinite)**
> Fie $f, g:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $f(x)\leq g(x)$, $\forall\ x\in D$.
> **a)** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.
> **b)** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

## Problemă rezolvată

> ◢ **Temă**
> **Să se calculeze:**
> - $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)$;
> - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+\ln\frac{x}{x^2+1}\right)$;
> - $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sin^2 x)$.

☒ Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sin x)=-\infty$.

<u>*Soluție*</u>

Deoarece $-1\leq\sin x\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, avem:

$x-1\leq x+\sin x\leq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dar $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$, de unde, cu criteriul majorării, rezultă limitele cerute.

**▣ TEOREMA 31 (trecerea la limită în inegalități)**
Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell_1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell_2$ şi există o vecinătate $V\in\mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $(x_n)$, $x_n\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Atunci $f(x_n)\le g(x_n)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Din teorema de trecere la limită în inegalități pentru şiruri rezultă:

$\ell_1=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\le\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\ell_2$ şi teorema este demonstrată. ■

**▣ TEOREMA 32 (Criteriul cleştelui)**
Fie funcțiile $f,g,h:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $V\in\mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $f(x)\le g(x)\le h(x)$, $\forall x\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\ell$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $(x_n)$, $x_n\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, un şir cu limita $x_0$. Rezultă că $f(x_n)\le g(x_n)\le h(x_n)$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\ell=\lim\limits_{n\to\infty}h(x_n)$ şi aplicând criteriul cleştelui pentru şiruri rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\ell$. Cum şirul $(x_n)$ a fost ales arbitrar rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$. ■

## *Probleme rezolvate*

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

<u>*Soluție*</u>

Avem inegalitățile $-x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to0}x^2=0=\lim\limits_{x\to0}(-x^2)$.

Cu criteriul cleştelui rezultă că $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

☒ **2.** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$.

*Soluție*

Folosind definiția părții întregi se obține:

$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x},\ \forall\ x\in\mathbb{R}^*$. De aici rezultă că:

$1-x<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le 1,\ \forall\ x\in(0,+\infty)$ și $1-x>x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\ge 1$, $\forall\ x\in(-\infty, 0)$. Prin trecere la limită se obține că $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$ și $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$, deci limita cerută este egală cu 1.

◢ **Temă**

**Să se calculeze:**

- $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\cos\frac{1}{x-1}$;
- $\lim\limits_{x\to0}x\left(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{2}{x}\right)$;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$.

☒ **3.** Fie $f, g: D\to\mathbb{R}$ și $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D.

Să se arate că dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, iar funcția g este mărginită, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=0$.

*Soluție*

Deoarece funcția g este mărginită rezultă că există $M>0$, astfel încât $|g(x)|<M,\ \forall x\in D$. Atunci:

$-M\le g(x)\le M$ și $-M\cdot|f(x)|\le f(x)\cdot g(x)\le M|f(x)|,\ \forall x\in D$.

Dar $\lim\limits_{x\to x_0}M\cdot|f(x)|=0=\lim\limits_{x\to x_0}(-M\cdot|f(x)|)$ și cu criteriul cleștelui se obține că $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=0$.

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### EXERSARE

**E1. Să se arate că:**

**a)** $\lim\limits_{x\to1}\sin\frac{1}{x-1}\cdot\ln x=0$;

**b)** $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x\cdot\cos\frac{1}{x-\pi}=0$;

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}=1$;

**d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\arcsin\frac{1}{x}\right)=+\infty$;

**e)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x}\right)=+\infty$;

**f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin x}{x}=+\infty$;

**g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\cos x)\cdot e^x=+\infty$;

**h)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(3+\sin x)\cdot\ln x=+\infty$;

**i)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\sin x\right)=+\infty$.

### APROFUNDARE

**A1. Să se calculeze:**

**a)** $\lim\limits_{x\to0}x^2\left[\frac{1}{x}\right]$;

**b)** $\lim\limits_{x\to0}x^2\left(\left[\frac{1}{x^2}\right]+\left[\frac{2}{x^2}\right]\right)$;

**c)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{x}$.

**A2.** **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $|f(x)-\sin x|\le$ $\le |x|$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.**
**Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.**

**A3.** **Să se determine, dacă există:**
**a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}(1+\sin x)$;**
**b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(a+\sin x)$, $a\in\mathbb{R}$.**

**A4.** **Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $\ell=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.**
**Să se arate că dacă $\ell>\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, atunci există o vecinătate $V\in$ $\in\mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $f(x)>f(\alpha)$, $\forall x\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$.**
**(Funcția f este mărginită inferior pe mulținea $V\cap D\setminus\{x_0\}$.)**

# 15 LIMITELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

Folosind operațiile cu şiruri care au limită şi teorema lui Heine se pot găsi cu uşurință limitele funcțiilor elementare în punctele de acumulare ale domeniului de definiție.

Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ este o funcție elementară, iar $x_0\in D$, atunci are loc următorul rezultat general:

**▣ TEOREMA 33**
Fie $f:D\to\mathbb{R}$, o funcție elementară şi $x_0\in D\cap D'$. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Această teoremă arată faptul că limita unei funcții elementare într-un punct din domeniul de definiție este chiar valoarea funcției în acest punct. Aşadar, în asemenea cazuri calculul limitei nu comportă nici o dificultate.

Pentru cazul în care $x_0\in D'$ este un punct de acumulare al domeniului de definiție dar nu aparține acestuia, calculul limitei se poate determina fie prin lectura reprezentării geometrice a graficului acesteia, fie prin folosirea operațiilor cu limite de şiruri.

Vom ilustra aceste modalități în cazul principalelor funcții elementare.

• **Funcția polinomială**

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, este funcție polinomială de gradul n, $n\in\mathbb{N}$, atunci avem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases} a_0\cdot(+\infty), & n\in\mathbb{N}^* \\ a_0, & n=0\end{cases},$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases} a_0\cdot(-\infty)^n, & n\in\mathbb{N}^* \\ a_0, & n=0\end{cases}.$$

• **Funcția radical de ordin par**

Fie $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[n]{x}$. Lecturând graficul funcției se obține că $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$

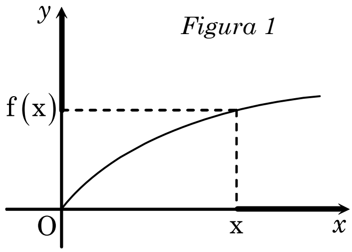
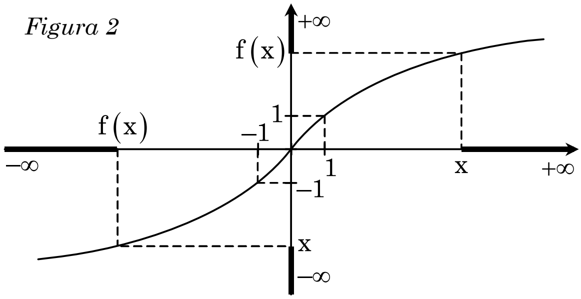



*Figura 1*

• **Funcția radical de ordin impar**

Pentru $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, n impar, avem, prin lecturare grafică: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$

*Figura 2*




• **Funcția exponențială**

Fie $f:\mathbb{R}\to(0, +\infty), f(x) = a^x$, $a > 0,\ a \neq 1$. În funcție de valorile lui a avem graficele din figura 3.

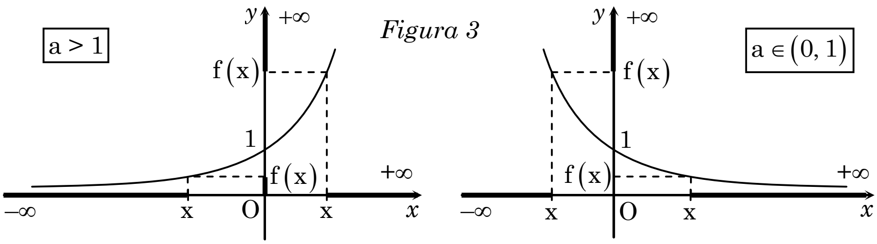



*Figura 3*

Din lectura grafică se obține:

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & a < 1 \end{cases}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}.$

• **Funcția logaritmică**

Fie $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x,\ a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Studiind graficele funcției în funcție de valorile lui a se obține:

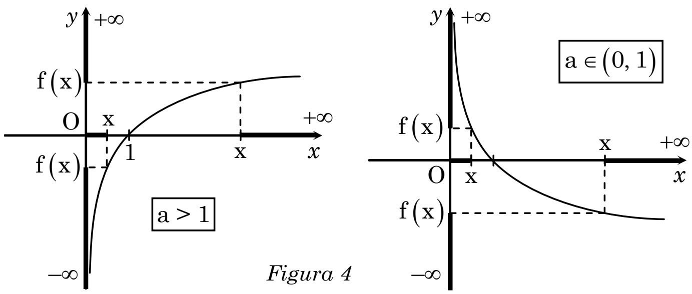



*Figura 4*

$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & a < 1 \end{cases}$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}.$

**• Funcții raționale**

Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții polinomiale de gradul p, respectiv q:
$f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + ... + a_p$, $g(x) = b_0x^q + b_1x^{q-1} + ... + b_q$.

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $g(x) = 0$, fie $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ şi funcția rațională $h: \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Dacă $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, există situațiile:

• $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$ şi atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$;

• $x_0 = \pm\infty$. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} \cdot (+\infty), & p > q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ 0, & p < q \end{cases}$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} \cdot (-\infty)^{p-q}, & p > q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ 0, & p < q \end{cases}$;

• $x_0 \in A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ şi A este nevidă. În acest caz sunt posibile situațiile:

**a)** $f(x_0) \neq 0, g(x_0) = 0$. În această situație se calculează limitele laterale ale funcției h în $x_0$.

☞ ***Exemplu***

• Fie $h: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)^2}$.

Pentru $x_0 = -1$ se obține $h(-1-0) = \dfrac{2}{0_{(-)}} = -\infty$ şi $h(-1+0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$, deci h nu are limită în punctul $x_0 = -1$.

Pentru $x_0 = 1$ se obține $h(1-0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$, $h(1+0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$ şi astfel $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = +\infty$.

**b)** $f(x_0) = 0, g(x_0) = 0$. În acest caz se obține o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$. Având în vedere descompunerea în factori a funcțiilor polinomiale f şi g, funcția h se poate simplifica cu $x - x_0$, ajungându-se la o altă funcție rațională $h_1$ şi se reia analiza pentru $h_1(x)$.

☞ ***Exemple***

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)^4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^3}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{0_{(+)}}=+\infty.$

• **Funcțiile trigonometrice**

• Funcțiile trigonometrice directe sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă nu au limită la $+\infty$ şi $-\infty$, deoarece sunt funcții periodice.

• Funcția tangentă nu are limită în punctele $x_0=(2k-1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. Din lectura graficului acesteia se obține: $\operatorname{tg}(x_0-0)=+\infty$ şi $\operatorname{tg}(x_0+0)=-\infty.$

• Funcția cotangentă nu are limită în punctele $x_0=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Din lectura graficului acesteia se obține: $\operatorname{ctg}(x_0-0)=-\infty$ şi $\operatorname{ctg}(x_0+0)=+\infty.$

Pentru funcțiile trigonometrice inverse prin lectură grafică se obține:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x=0.$

◢ **Temă**

**1. Să se calculeze:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-9x+7)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3+7x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^5+4x+1)$;

**d)** $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x})$; **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[4]{x}$;

**g)** $\lim\limits_{x\to 8}\log_2 x$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_{0,3}x$; **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\sqrt{2}}x$;

**j)** $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2}-1)^x$; **l)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$;

**m)** $\lim\limits_{x\to-1}\arcsin x$; **n)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arccos x$; **o)** $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x$;

**p)** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\pi\\ x>3\pi}}\operatorname{ctg}x$; **q)** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\ x<\frac{3\pi}{2}}}\operatorname{tg}x.$

**2. Să se calculeze:**

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x}{2x+7}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^3-125}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^3-8}$;

**d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+x^2+1}{2x^2+x-1},\ a\in\mathbb{R}$; **e)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+8}{x^2-4x+2}.$

# 16 OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII

Operațiile cu limite de şiruri dau posibilitatea demonstrării cu uşurință a operațiilor cu limite de funcții.

## 16.1. ADUNAREA, ÎNMULȚIREA, CÂTUL ȘI RIDICAREA LA PUTERE

**▣ TEOREMA 34**

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ două funcții reale şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D, iar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$.

**a)** Dacă operația $\ell_1 + \ell_2$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x).$$

**Limita sumei este egală cu suma limitelor.**

**b)** Dacă operația $\ell_1 \cdot \ell_2$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$

**Limita produsului este egală cu produsul limitelor.**

**c)** Dacă operația $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, şi $g(x) \neq 0,\ x \in D$, atunci:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

**Limita raportului este egală cu raportul limitelor.**

**d)** Dacă operația $\ell_1^{\ell_2}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$ şi există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ are sens $\forall\ x \in V \cap \left(D \setminus \{x_0\}\right)$, atunci

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

**Limita unei puteri este egală cu puterea limitelor.**

Ca şi în cazurile limitelor de şiruri, pentru operațiile cu limite de funcții există cazurile de nedeterminare:

$$\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Aceste cazuri de nedeterminare se rezolvă prin procedee asemănătoare cu cele de la şiruri sau având în vedere anumite limite fundamentale.

Astfel avem:

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;$  **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ \forall r\in\mathbb{R};$  **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$

**5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a;$  **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0.$

## 16.2. LIMITE DE FUNCȚII COMPUSE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $u : A \to D$ două funcții reale de variabilă reală, iar $h : A \to \mathbb{R},\ h = f \circ u,$ funcția compusă a acestora.

Dacă $x_0 \in A'$ este un punct de acumulare pentru mulțimea A, ne punem problema dacă funcția $h = f \circ u$ are sau nu limită în $x_0$. Condițiile în care această limită există sunt date de următorul rezultat.

> ▣ **TEOREMA 35**
> Fie $x_0 \in A'$ şi $u(x_0) = u_0 \in D',$ puncte de acumulare pentru mulțimile A şi D. Dacă sunt îndeplinite condițiile:
> **a)** $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$; **b)** $u(x) \neq u_0,\ \forall\ x \in A\setminus\{x_0\}$; **c)** $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = \ell,$
> atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{y\to u_0} f(y).$

<u>*Demonstrație*</u>

Fie şirul $(x_n),\ x_n \in A\setminus\{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Deoarece $u : A \to D$ rezultă că $u(x_n) \in D.$ Din condiția a) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = u_0,$ iar din condiția b) rezultă că $u(x_n) \in D\setminus\{u_0\}$. Să notăm $y_n = u(x_n)$. Se obține un şir $(y_n)$ din D, cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = u_0$. Aşadar $u_0$ este punct de acumulare pentru mulțimea D.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \ell$ şi de aici se obține $\lim\limits_{n\to\infty} f(u(x_n)) = \ell.$

În concluzie, pentru orice şir $(x_n)$ cu $x_n \in A\setminus\{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(u(x_n)) = \ell$ şi astfel, $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{y\to u_0} f(y).$ ■

➲ <u>**OBSERVAȚII**</u>

**1.** Teorema anterioară permite înlocuirea calculului limitei funcției $f \circ u$ în $x_0$, cu calculul limitei funcției f în $u_0$.

**2.** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$ şi $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right)$.

Se spune că limita funcției comută cu valoarea funcției.

**3.** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$ şi $u(x)\neq 0,\ \forall\ x\in A$, atunci:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\operatorname{acrtg} u(x)}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a,\ a\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\ln u(x)=0$.

***Exercițiu rezolvat***

☒ Să se calculeze:

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 2x}{\sin x+2\sin 3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x^2+x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos x}-2}{2^{x+1}-2}$.

<u>Soluție</u>

**a)** Avem succesiv: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{3}{4}$.

**b)** Avem, folosind operațiile cu limite de funcții, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 2x}{\sin x+2\sin 3x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\dfrac{\sin 6x}{x}+\dfrac{\sin 2x}{x}\right)}{x\left(\dfrac{\sin x}{x}+2\dfrac{\sin 3x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{6\cdot\dfrac{\sin 6x}{6x}+2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin x}{x}+6\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{6+2}{1+6}=\frac{8}{7}.$$

**c)** Se obține: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x+x^3}\cdot\dfrac{x+x^3}{x^2+x}\right)=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^3}{x^2+x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{x+1}=1.$$

**d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos x}-2}{2^{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(2^{\cos x-1}-1\right)}{2\left(2^x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{\cos x-1}-1}{\cos x-1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{2^x-1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=$

$$=\ln 2\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{-x}{2}\right)=1\cdot 0=0.$$

# EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Să se calculeze, în cazul în care există, limitele funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în punctele specificate:

a) $f(x) = x^3 + 2x - 7,\ x_0 \in \{1, \pm\infty\}$;

b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 11,\ x_0 \in \{0, \pm\infty\}$;

c) $f(x) = -2x^5 + 11x^3 + x,\ x_0 \in \{-1, \pm\infty\}$.

**E2.** Să se studieze existența limitei funcției $f: D \to \mathbb{R}$, în punctul $x_0$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1},\ x_0 \in \{2, -1, \pm\infty\}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^4 - 2x + 1},\ x_0 \in \{0, 1, \pm\infty\}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1},\ x_0 \in \{0, 1, -1, \pm\infty\}$;

d) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x + 6}{3x^3 + 2x + 5},\ x_0 \in \{-1, \pm\infty\}$.

**E3.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 + (x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6 + x + 1}{(1 + x + x^2)^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)(3x+1)(5x+1)}{(x+2)^4 - (x+1)^4}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^8 - 2^8}{x^6 - 2^6}$.

**E4.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2\sqrt[3]{x} + e^x + \sin^2 x\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{3x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{3x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2}\right)$.

**E5.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{7x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\sin 5x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^4 + x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sin 4x + \sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2 - x)}{x^2 - 1}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \sin\dfrac{1}{x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^n x}{\sin(x^n)},\ n \in \mathbb{N}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$; j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 4x - \cos 6x}$.

**E6.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x^3)}{x^4 + x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2)}{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2 + x - 1)}{\ln(x^3 + x - 1)}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{x^2}$.

**E7.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x^2 + x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x^2} - 1}{x^3 + x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x^2+1} - 2}{3^{x^2+1} - 3}$.

**E8.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + 5x^2 + x\right)^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x + x^2\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x+1}$.

## APROFUNDARE

**A1.** Să se determine a, b ∈ ℝ, astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)=b$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}-ax\right)=b$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+ax+1}{x+b}-x-1\right)=0$.

**A2.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^5-5x^4+1}{(x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

**A3.** Să se determine a, b, c ∈ ℝ, astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{ax^6+bx^5+1}{(x-1)^2}$ să fie finită;

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{ax^4+bx^3+6x+c}{(x-1)^3}$ să fie finită;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-ax-b\right)=\sqrt{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\frac{bx-1}{x^2+1}\right)^x=e^{-3}$.

**A4.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x+2^x-2}{4^x+2^x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x+5^x-4^x-3^x}{5^x+4^x-3^x-2^x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2+x-2}\right)^{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+11}{2x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$.

**A5.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2+x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x^2-x+9}-\sqrt{x^2+x+7}}$;

e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x}}$.

**A6.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\arcsin x+\sin x}{\arcsin x+2\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx}{\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}2x+\ldots+n\operatorname{tg}nx}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos 4x}{x^4+x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{\sin 2x}-2^{\operatorname{tg}2x}}{2^{\operatorname{tg}x}-2^{\sin x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\ldots+\operatorname{tg}nx\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

**A7.** Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+a^x\right)}{\ln\left(1+b^x\right)},\ a,\ b\in(0,\ \infty).$$

**A8.** Fie f : D → ℝ, o funcție periodică neconstantă, astfel încât +∞ este un punct de acumulare pentru D. Să se arate că funcția f nu are limită la +∞.

**A9.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}x^x$;  b) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$;

c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x^2}\right)^{x-1}$.