"Ecuatiile sunt partea plictisitoare a matematicii. Eu incerc sa vad lucrurile intr-o maniera geometrica."

Stephen Hawking

7

Dreapta si planul in spatiu

Sinteza teorie

• componentele unui vector $\overline{AB}$ relativ la un sistem cartezian de coordonate fixat sunt date de formula

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

• ecuatiile parametrice ale dreptei determinate de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si un vector director $\bar{d} = (\ell, m, n)$

$$d: \begin{cases} x = x_A + t \cdot \ell \\ y = y_A + t \cdot m \\ z = z_A + t \cdot n \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

• ecuatiile carteziane vor fi

$$d: \frac{x - x_A}{\ell} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n}$$

• ecuatiile parametrice ale dreptei determinata de doua puncte $A(x_A, y_A, z_A)$ si $B(x_B, y_B, z_B)$ sunt

$$d: \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

• ecuatiile carteziene vor fi

$$d: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

• ecuatia planului care trece printr-un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si este paralel (sau contine) cu doua directii date prin $\bar{v}_1 = (\ell_1, m_1, n_1)$ si $\bar{v}_2 = (\ell_2, m_2, n_2)$

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

• ecuatia planului care trece prin trei puncte necoliniare $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ si $C(x_C, y_C, z_C)$

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

• ecuatia carteziana a planului determinat de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si un vector normal $\bar{n} = (a, b, c)$

$$\alpha : \ a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

• daca stim unde este localizat punctul M pe segmentul AB, adica avem informatia

$$\overline{MA} = k \cdot \overline{MB}$$

atunci putem sa-i aflam coordonatele

$$x_M = \frac{x_A - k x_B}{1 - k}, \quad y_M = \frac{y_A - k y_B}{1 - k}, \quad z_M = \frac{z_A - k z_B}{1 - k}$$

▶ *Distante si unghiuri in spatiu*

• produsul vectorial a doi vectori $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ este dat de formula

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

• produsul mixt a trei vectori $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ este

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

• unghiul θ format de doua drepte d_1 si d_2 este unghiul format de catre doi vectori directori $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ ai celor doua drepte

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{d}_1, \bar{d}_2 \rangle}{\|\bar{d}_1\| \cdot \|\bar{d}_2\|} = \frac{\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

• distanta de la un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ la un plan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ este

$$dist(A, \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

• distanta de la un punct A la o dreapta d

$$dist(A, d) = \frac{\|\bar{d} \times \overline{M_0A}\|}{\|\bar{d}\|}$$

unde M_0 este un punct oarecare de pe dreapta si $\bar{d}$ este vector director al dreptei

• distanta dintre dreptele necoplanare d_1 si d_2

$$dist(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{d}_1, \bar{d}_2)|}{\|\bar{d}_1 \times \bar{d}_2\|}$$

unde $M_1 \in d_1$ si $M_2 \in d_2$ sunt puncte arbitrare de pe drepte iar $\bar{d}_1$ si $\bar{d}_2$ sunt vectori directori ai dreptelor

• unghiul θ dintre o dreapta d (cu vectorul director $\bar{d}$) si un plan α (cu un vector normal $\bar{n}$) este obtinut din

$$\sin \theta = \frac{\langle \bar{d}, \bar{n} \rangle}{\|\bar{d}\| \cdot \|\bar{n}\|}$$

• unghiul θ format de catre doua plane cu vectori normali $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ este determinant prin formula

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle}{\|\bar{n}_1\| \cdot \|\bar{n}_2\|}$$

▶ *Cercul si sfera*

• ecuatia sferei de centru $C(x_c, y_c, z_c)$ si raza r este

$$\mathcal{S}(C, r) : \quad (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

deoarece exprima faptul ca orice punct $M(x, y, z)$ de pe sfera se afla la distanta r de centrul C

• ecuatia unui cerc de centru $C(x_c, y_c)$ si raza r este

$$\mathcal{C}(C, r) : \quad (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

deoarece exprima faptul ca orice punct $M(x, y)$ de pe cerc se afla la distanta r de centrul C

• desfacand parantezele se obtin ecuatiile generale ale cercului si sferei

$$\mathcal{C}(C, r) : \quad x^2 + y^2 + mx + ny + q = 0$$

si

$$\mathcal{S}(C, r) : \quad x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$$

• centrul si raza unei sfere pot fi recuperate din ecuatia generala prin formulele

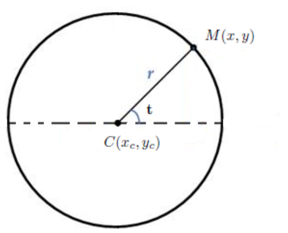
$$C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right) \quad \text{si} \quad r = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

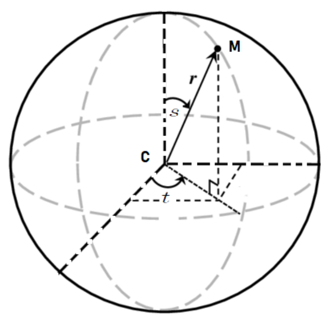
• formulele sunt analoage pentru un cerc dat prin ecuatia generala
• ecuatia parametrica a unui cerc de centru C si raza r este

$$\mathcal{C}\ :\ \begin{cases} x = x_c + r \cdot \cos t \\ y = y_c + r \cdot \sin t \end{cases} \quad , \qquad t \in [0, 2\pi)$$

unde t este unghiul facut de CM cu semiaxa pozitiva Ox, pentru un punct oarecare $M(x, y)$ de pe cerc

$\Longrightarrow$ orice punct de pe cerc este unic determinat de unghiul t





• ecuatia parametrica a unei sfere de centru C si raza r este

$$\mathcal{C}\ :\ \begin{cases} x = x_c + r \cdot \cos t \sin s \\ y = y_c + r \cdot \sin t \sin s \\ z = z_c + r \cdot \cos s \end{cases} \quad , \qquad t \in [0, 2\pi),\ \ s \in [0, \pi]$$

unde s si t pot fi denumite latitudine si longitudine, sunt unghiuri facut de catre CM cu paralele duse prin C la axele de coordonate

$\Longrightarrow$ orice punct de pe sfera este unic determinat de unghiurile s, t

• ecuatia tangentei in $P(x_p, y_p)$ la cercul cu centrul in C si raza r se obtine prin dedublare

$$d:\quad (x_p - x_c)(x - x_c) + (y_p - y_c)(y - y_c) = r^2$$

sau din ecuatia generala

$$d:\quad xx_p + yy_p + m\frac{x + x_p}{2} + n\frac{y + y_p}{2} + q = 0$$

• ecuatia planului tangent in $P(x_p, y_p, z_p)$ la sfera cu centrul in C si raza r se obtine prin dedublare

$$\pi:\quad (x_p - x_c)(x - x_c) + (y_p - y_c)(y - y_c) + (z_p - z_c)(z - z_c) = r^2$$

sau din ecuatia generala

$$\pi:\quad xx_p + yy_p + zz_p + m\frac{x + x_p}{2} + n\frac{y + y_p}{2} + p\frac{z + z_p}{2} + q = 0$$

• unghiul format de doua cercuri care se interescteaza intr-un punct M este unghiul format de tangentele la cele doua cercuri in acel punct

$u = 180°$ $\qquad u = 90°$ $\qquad u = 45°$ $\qquad u = 0°$

• se poate argumenta pe baza teoremei cosinusului ca acest unghi satisface ecuatia

$$\cos u = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$$

unde d este distanta dintre centrele celor doua cercuri iar r_1, r_2 razele lor

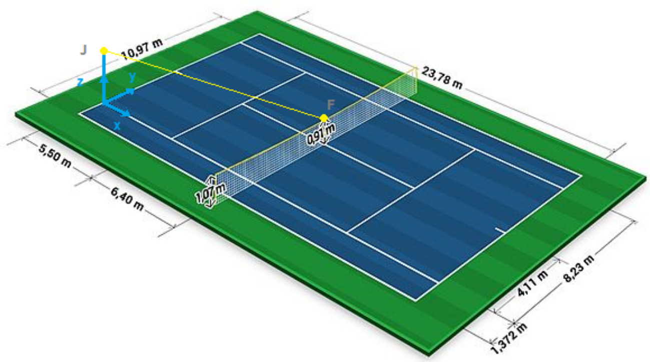
• intr-un mod analog se defineste unghiul dintre doua sfere care se intersecteaza in M ca fiind unghiul dintre planele tangente la sfere in acel punct

Probleme rezolvate

Problema 1

Un jucator de tenis serveste din coltul terenului: ridica mingea la 2.50 m si apoi in traiectoria sa mingea loveste banda de sus a fileului exact in mijlocul fileului. Daca nu intalnea fileul in calea sa mingea ar fi intrat in teren ? Estimati locul (punctul) in care ar fi aterizat mingea trimisa de jucator. Ce unghi formeaza cu planul terenului traiectoria mingii ?

Solutie: Alegem un reper cartezian $Oxyz$ cu originea in coltul de unde serveste jucatorul si cu axele Ox si Oy cele doua linii de out care se intersecteaza acolo.



• identificam punctele $\mathbf{J}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{2.5})$ si $\mathbf{F}(\mathbf{11.89}, \mathbf{4.11}, \mathbf{0.91})$ ca fiind locul de unde jucatorul serveste si punctul unde mingea loveste fileul. Ecuatia planului terenului va fi

$$\alpha : \ z = 0$$

• scriem ecuatia dreptei JF si aflam intersectia dreptei cu planul α al terenului, penntru a afla punctul $P(x_P, y_P, 0)$ unde mingea ar fi cazut in terenul advers

$$JF: \frac{x - 11.89}{0 - 11.89} = \frac{y - 4.11}{0 - 4.11} = \frac{z - 0.91}{2.5 - 0.91}$$

• pentru a afla intersectia cu planul α al terenului cel mai simplu este sa trecem la ecuatia parametrica

$$JF: \begin{cases} x = -11.89 \cdot t + 11.89 \\ y = -4.11 \cdot t + 4.11 \\ z = 1.59 \cdot t + 0.91 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

• deoarece α are ecuatia $z = 0$ obtinem ca punctul P in care JF intersecteaza acest plan corespunde parametrului $t = -\frac{0.91}{1.59} = -0.57$ Prin urmare

$$x_P = -11.89 \cdot (-0.57) + 11.89 \approx 18.66$$

$$y_P = -4.11 \cdot (-0.57) + 4.11 \approx 6.45$$

• mingea ar fi cazut in teren daca se obtin coordonatele

$$x_P \leq 23.78, \quad y_P \leq 8,23 \quad \text{and} \quad \text{(vezi dimensiunile terenului)}$$

$\Longrightarrow$ mingea ar fi cazut in interiorul terenului

• se afla unghiul format de dreapta JF cu planul $z = 0$ folosind directia dreptei data prin vectorul $\overline{FJ} = (x_J - x_F, y_J - x_F, z_J - z_F) = (-11.9, -4.11, 1.59)$ si normala la planul terenului $\bar{n} = (0, 0, 1)$

• folosind formula unghiului format de o dreapta cu un plan avem:

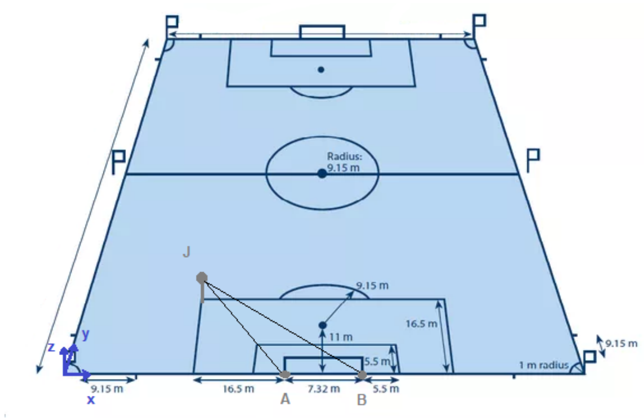
$$\sin\theta = \frac{\langle(-11.9, -4.11, 1.59), (0, 0, 1)\rangle}{\|(-11.9, -4.11, 1.59)\| \cdot \|(0, 0, 1)\|} = \frac{1.59}{12.68} = 0.125$$

iar din tabelele cu valorile functiei sinus gasim $\theta \approx 7°$

Problema 2

Spunem ca din punctul M vedem segmentul $[AB]$ sub un unghi de θ grade daca $m(\widehat{AMB}) = \theta$. Mai jos aveti descris un teren de fotbal de dimensiuni $50\ m \times 100\ m$. Sub ce unghi vede un jucator de fotbal, avand inaltimea de $1.50\ m$, linia portii atunci cand acesta ajunge in coltul careului mare?

Solutie: Consideram un reper cartezian $Oxyz$ cu originea in coltul terenului, in locul indicat de unul dintre stegulete, astfel incat axa Ox sa coincida cu linia portii si axa Oy cu linia laterala de aut.



• se afla coordonatele punctului de unde priveste jucatorul $\mathbf{J(29.84, 16.5, 1.5)}$ (am tinut cont de inaltimea sa si pozitionarea in spatiu) iar $\mathbf{A(46.34, 0, 0)}$, $\mathbf{B(53.66, 0, 0)}$ vor fi coordonatale punctelor in care poarta este fixata in sol. Apoi se determina vectorii:

$$\overline{JA} = (x_A - x_J, y_A - y_J, z_A - z_J)$$

si

$$\overline{JB} = (x_B - x_J, y_B - y_J, z_B - z_J)$$

care dau directiile dreptelor AJ si BJ.

• se afla unghiul cerut folosind formula $\cos\theta = \frac{\langle \overline{JA}, \overline{JB} \rangle}{\|\overline{JA}\| \cdot \|\overline{JB}\|}$

Problema 3

Determinati sfera care contine punctele $A(1,0,0), B(1,2,0), C(2,1,0)$ si $D(1,1,1)$.

Solutie: O sfera este unic determinata de patru puncte necoplanare. O situatie similara are loc pentru cerc, cand sunt suficiente trei puncte necoliniare.

Putem testa necoplanaritatea celor patru puncte in felul urmator

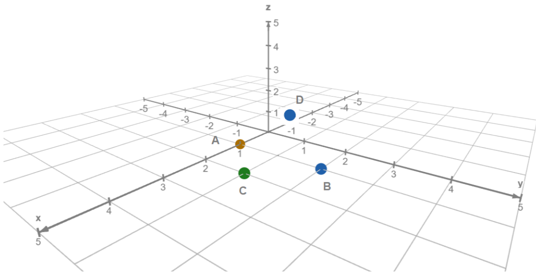
$$\text{A,B,C,D} \quad \text{necoplanare} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \quad \text{necoplanari}$$

iar necoplanaritatea unor vectori se testeaza cu ajutorul produsului mixt. Intai, avem nevoie de coordonatele vectorilor de mai sus $\overline{AB} = (0,1,0)$, $\overline{AC} = (1,1,0)$ si $\overline{AD} = (0,1,1)$, prin urmare

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

asadar punctele sunt necoplanare.

Intr-o reprezentare grafica, se poate observa cum A, B si C apartin planului de coordonate $z = 0$ iar D nu se afla in acest plan (avand $z = 1$)



Pentru a determina sfera care contine aceste patru puncte, trebuie sa observam ca ecuatia generala a sferei

$$\mathcal{S}(C,r): \quad x^2+y^2+z^2+mx+ny+pz+q=0$$

contine patru necunoscute m,n,p,q. Aceste necunoscute pot fi identificate daca detinem patru informatii distincte despre sfera. Informatiile necesare sunt ascunse in apartenenta punctelor la sfera data

$$A(1,0,0)\in\mathcal{S}(C,r) \quad\Longrightarrow\quad (1)^2+(0)^2+(0)^2+m\cdot 1+n\cdot 0+p\cdot 0+q=0$$

$$B(1,2,0)\in\mathcal{S}(C,r) \quad\Longrightarrow\quad (1)^2+(2)^2+(0)^2+m\cdot 1+n\cdot 2+p\cdot 0+q=0$$

$$C(2,1,0)\in\mathcal{S}(C,r) \quad\Longrightarrow\quad (2)^2+(1)^2+(0)^2+m\cdot 2+n\cdot 1+p\cdot 0+q=0$$

$$D(1,1,1)\in\mathcal{S}(C,r) \quad\Longrightarrow\quad (1)^2+(1)^2+(1)^2+m\cdot 1+n\cdot 1+p\cdot 1+q=0$$

Problema se rezolva asemanator daca folosim ecuatia generala a sferei in care apar coordonatele centrului si raza. Se observa asadar ca se obtine un sistem cu patru necunoscute si patru ecuatii

$$\begin{cases} 1+m+q=0 \\ 5+m+2n+q=0 \\ 5+2m+n+q=0 \\ 3+m+n+p+q=0 \end{cases}$$

Acest sistem poate fi rezolvat prin metoda reducerii, deoarece stim ca admite o solutie unica (o unica sfera exista cu proprietatile date). Se obtin $m=-2, n=-2, p=0, q=1$ si sfera

$$\mathcal{S}(C,r): \quad x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$$

Pentru a-i afla centrul si raza putem utiliza formulele $C\left(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2},-\frac{p}{2}\right)$ deci centrul este $C(1,1,0)$ si raza

$$r=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=\sqrt{1^2+1^2+0^2-1}=1$$

Problema 4

Problema directa: Aflati planul tangent in punctul $P(1,2,0)$ la sfera

$$S: \quad x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$$

Problema inversa: Daca planul

$$\pi: \quad 2x-6y+3z-49=0$$

este tangent la sfera

$$S: \quad x^2+y^2+z^2-49=0$$

aflati coordonatele punctului P de tangenta.

Solutie: Pentru problema directa totul se reduce la formula de obtinere a planului tangent. Ecuatia planului tangent in $P(x_p, y_p, z_p)$ la o sfera, data prin ecuatia generala, se obtine prin dedublare

$$\pi: \quad xx_p+yy_p+zz_p+m\frac{x+x_p}{2}+n\frac{y+y_p}{2}+p\frac{z+z_p}{2}+q=0$$

Prin urmare deoarece sfera are ecuatia

$$S: \quad x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$$

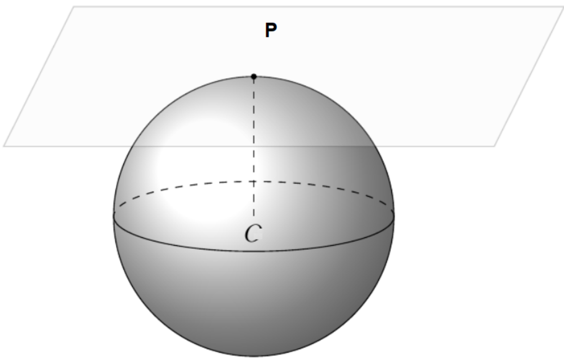
ecuatia planului tangent in $P(1,2,0)$ va fi

$$\pi: \quad x\cdot 1+y\cdot 2+z\cdot 0-2\frac{x+1}{2}-4\frac{y+2}{2}-2\frac{z+0}{2}+1=0$$

adica

$$\pi: \quad -z-2=0$$

Pentru problema inversa, este suficient sa desenam problema pentru a obtine o strategie de rezolvare



Centrul sferei va determina o dreapta CP care este perpendiculara pe planul π. Prin urmare pentru a determina coordonatele punctului P este suficient sa determinam ecuatia dreptei CP si apoi sa rezolvam sistemul liniar obtinut din ecuatia dreptei si ecuatia planului π.

Pentru a determina ecuatia dreptei CP vom folosi un punct (punctul C) si un vector de directie. Intai sa observam ca punctul C are coordonatele $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right) = C(0, 0, 0)$, fiind centrul sferei date. Pentru directia dreptei trebuie sa observam ca deoarece $CP \perp \pi$ directia lui CP va fi data de un vector normal la plan. Din ecuatia planului obtinem

$$\bar{n} = (2, -6, 3)$$

asadar putem alege $\bar{d} = (2, -6, 3)$ ca vector director pentru dreapta CP, prin urmare

$$CP: \quad \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-6} = \frac{z-0}{3}$$

Punctul P de tangenta, fiind intersectia dintre aceasta dreapta si planul tangent, va avea coordonatele (x, y, z) si acestea vor satisface ambele ecuatii. Prin urmare coordonatele sale se afla rezolvand sistemul

$$P: \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{3} \\ 2x - 6y + 3z - 49 = 0 \end{cases}$$

Cea mai eleganta cale de a rezolva un astfel de sistem, care decurge din intersectarea unei drepte cu un plan, este sa trecem la ecuatia parametrica a dreptei si apoi sa inlocuim in ecuatia planului

$$P: \begin{cases} x = 2t \\ y = -6t \\ z = 3t \\ 2x - 6y + 3z - 49 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2t \\ y = -6t \\ z = 3t \\ 2(2t) - 6(-6t) + 3(3t) - 49 = 0 \end{cases}$$

Se obtine intai coordonata parametrica $t = 1$ a lui P si apoi coordonatele sale carteziene $P(2, -6, 3)$.

Problema 5

Aflati raza si centrul cercului obtinut prin intersectarea planului

$$\pi: \quad x + y + z + 1 = 0$$

cu sfera

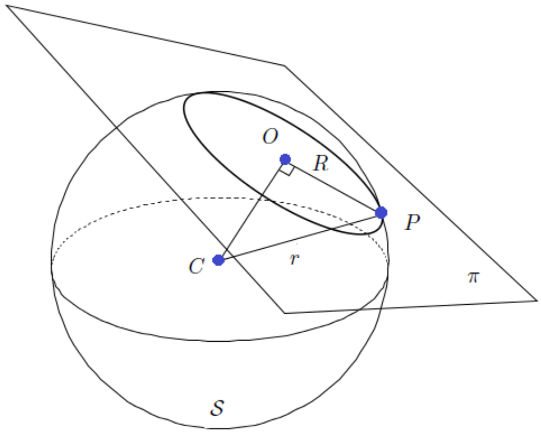
$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3z + \frac{13}{4} = 0$$

Solutie: Intersectia dintre un plan si o sfera (atunci cand este nevida) este un punct (daca planul este tangent) sau un cerc. Se poate verifica usor ca planul nu este tangent, testand distanta de la centrul cercului la plan

$$\text{daca} \quad d(C, \pi) = r \quad \implies \quad \text{planul este tangent sferei}$$

$$\text{daca} \quad d(C, \pi) > r \quad \implies \quad \text{planul nu intersecteaza sfera}$$

$$\text{daca} \quad d(C, \pi) < r \quad \implies \quad \text{planul intersecteaza sfera dupa un cerc}$$



Pentru sfera data se obtin rapid coordonatele centrului si raza cu formulele standard

$$C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right) = C\left(1, -2, \frac{3}{2}\right) \quad \text{si} \quad r = \sqrt{1 + 4 + \frac{9}{4} - \frac{13}{4}} = 2$$

Deoarece

$$d(C, \pi) = \frac{\left|1 - 2 + \frac{3}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 2 = r$$

intersectia va fi un cerc, a carui ecuatie in 3D nu este foarte eleganta. Prin urmare vom determina doar centrul si raza sa. E important sa observam ca sistemul de ecuatii obtinut prin alaturarea ecuatiilor sferei si planului, nu conduce rapid la ecuatia cercului, datorita aparitiei unor termeni de tipul xy care sunt greu de eliminat. Sa incepem prin a nota cu O centrul cercului cautat si cu R raza acestuia.

Daca reprezentam grafic corect situatia din problema (vezi figura de mai sus), se poate observa pe desen ca distanta de la centrul O al cercului de intersectie si centrul C al sferei este exact distanta de la C la planul π. Se observa de asemenea aparitia unor triunghiuri dreptunghice formate cu centrul sferei, centrul cercului si un un punct oarecare P de pe cerc. Folosind teorema lui Pitagora in triunghiul ΔCOP se obtine

$$CO^2 + OP^2 = CP^2$$

dar $CP = r$ si $OP = R$ raza cercului cautat. Asadar

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + R^2 = 2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Pentru a afla coordonatele centrului cercului, trebuie sa observam ca O este intersectia dintre planul π si dreapta care trece prin C si este perpendiculara pe planul π

$$\{O\} = \pi \cap CO$$

Vom afla ecuatia dreptei CO fara sa folosim punctul O. Deoarece $CO \perp \pi \implies$ directia lui CO coincide cu directia normala la planul π. Din ecuatia planului obtinem

$$\pi: \quad x+y+z+1=0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{n}=(1,1,1)$$

Prin urmare putem folosi $\bar{n}$ ca vector director pt CO, despre care stim ca trece prin $C(1,-2,\frac{3}{2})$

$$CO: \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{1}$$

Asadar

$$O: \begin{cases} x+y+z+1=0 & \text{(ecuatia lui } \pi) \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-\frac{3}{2}}{1} & \text{(ecuatia dreptei } CO) \end{cases}$$

Intersectia unui plan cu o dreapta se afla cel mai elegant trecand la ecuatia parametrica a dreptei, pentru ca atunci fiecare punct de pe dreapta are coordonatele exprimate in functie de un parametru t.

$$O: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x=t+1 \\ y=t-2 \\ z=t+\frac{3}{2} \end{cases}$$

Putem afla parametrul care corespunde lui O, inlocuind coordonatele in ecuatia planului (caci $O \in \pi$)

$$O: \begin{cases} (t+1)+(t-2)+\left(t+\frac{3}{2}\right)+1=0 \\ x=t+1 \\ y=t-2 \\ z=t+\frac{3}{2} \end{cases}$$

Se obtine $t_O=-\frac{1}{2}$ si apoi coordonatele carteziene $O\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2},1\right)$.

Probleme propuse

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Se dau punctele $A(1,1,2)$, $B(2,1,-1)$ si dreptele:*

$$d_1: \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases} \quad . \qquad d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

Sa se scrie:

i) Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei AB

ii) Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei d_1

iii) Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei d care trece prin A si este paralela cu dreapta d_2

Problema B.2. *Se dau punctele $A(1,-1,0)$, $B(-1,0,-1)$, $C(-1,1,-1)$ si dreapta:*

$$d: \ \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

i) Sa se scrie ecuatia planului care contine punctele A, B, C

ii) Ecuatia carteziana a planului care contine punctul A si este perpendicular pe dreapta d

iii) Ecuatia carteziana a planului care contine dreptele d si AB.

Problema B.3. *Sa se gaseasca coordonatele proiectiei ortogonale a punctului $M(1,2,-2)$ pe planul $\alpha : -2x+2y-3z+1=0$. Sa se gaseasca coordonatele simetricului lui M fata de acest plan.*

Problema B.4. *i) Sa se arate ca dreapta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ este paralela cu planul $3x-3y+2z-5=0$*

ii) Sa se calculeze distanta dintre dreptele:

$$d_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2} \quad si \quad d_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}.$$

Problema B.5. *Sa se determine distanta de la punctul $M(3,-1,2)$ la dreapta*

$$d: \begin{cases} 2x-y+z-4=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

Problema B.6. *Sa se studieze pozitia relativa a dreptei*

$$d: \begin{cases} x-y+2z-2=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$$

fata de planul $\alpha : x-2z+2=0$. Sa se gaseasca ecuatia proiectiei ortogonale a dreptei d pe planul α

Problema B.7. *Se dau dreptele:*

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2} \ si \ d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$$

Se cere:

i) Sa se scrie ecuatiile perpendicularei comune dreptelor d_1 si d_2

ii) Sa se calculeze distanta dintre dreptele d_1 si d_2

Problema B.8. *Sa se gaseasca coordonatele simetricului punctului $M(-1, 0, 2)$ fata de dreapta*

$$d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

Problema B.9. *Sa se gaseasca unghiul dintre dreptele:*

$$d_1 : \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \quad si \quad d_2 : \quad \frac{x+1}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-2}{3}$$

apoi dintre:

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad si \quad d_2 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Problema B.10. *Aflati unghiul dintre planele:*

$$\pi_1 : \quad x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad si \quad \pi_2 : \quad x + y + 1 = 0$$

si apoi dintre dreapta:

$$d : \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

si planul π_1.

Problema B.11. *Sa se determine ecuatia sferei de raza $R = 2$ cu centrul pe dreapta*

$$d : \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

si care este tangenta la planul

$$\alpha : \quad 2x - 2y + z - 1 = 0.$$

Problema B.12. *Sa se determine ecuatia sferei care contine punctele $A(3, 0, 1), B(1, 2, 1)$ $C(1, 0, 1)$ si $D(-1, 2, 2)$ si sa se determine centrul si raza sa.*

Problema B.13. *Aflati pozitia relativa a planului*

$$\pi : x - y = z + 1$$

fata de sfera

$$S : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 1 = 0$$

Problema B.14. *Aflati unghiul de intersectie al cercurilor*

$$\mathcal{C}_1 : \quad x^2 + y^2 + 2x = 0$$

fata de sfera

$$\mathcal{C}_2 : \quad x^2 + y^2 + x + y - \frac{1}{2} = 0$$

Bibliografie

[1] O. Bundau, A. Juratoni *Exercitii si probleme de algebra liniara*, Ed. Politehnica, 2012.