”Happiness is not a state of being. Happiness is a vector, it is movement.”
Neal Shusterman

5
Vectori si valori proprii

Frecventa naturala a podurilor

Expresia ”canta de sparge geamurile vecinilor” nu este un mit, poate uneori doar o exagerare, care are insa o explicatie fizica. Aproape toate obiectele, cand sunt lovite, trase sau cumva deranjate vor vibra. Daca scapi un pix pe jos, va vibra, daca tragi de corzile unei chitare, vor vibra, daca lovesti un pahar cu degetul, va vibra. Orice obiect care vibreaza va crea un sunet. Acest sunet poate fi muzical sau un simplu zgomot de fond. Frceventa sau frecventele la care un obiect are tendinta de a vibra poarta numele de *frecventa naturala* a obiectului. Poti sa spargi un pahar de vin daca nimeresti frecventa sa naturala atunci cand canti. Rezultatul consta in cresterea amplitudinii de oscilatie pana la spargerea paharului.

Rezonanta mecanica este tendinţa unui sistem mecanic de a absorbi mai multa energie atunci cand frecvenţa lor de oscilatie este identica cu una dintre frecventele naturale ale sistemului, spre deosebire de absorbtia de energie la alte frecvente. Acest fenomen poate conduce la vibraţii dezastruoase, atat pentru utilaje statice sau dinamice, dar si pentru structuri sau constructii, cladiri. Frecvenţele naturale ale unui sistem nu se pot elimina, dar se pot atenua prin diferite metode. Evitarea rezonanței distructive este un obiectiv major pentru construirea oricarei structuri: poduri, turnuri și cladiri. Ca o contramasura, amortizoare pot fi amplasate ca sa absoarba frecvențele rezonante si astfel sa disipeze energia acumulata. Taipei 101, un zgarie-nori de 509 metri se bazează pe un pendul de 660 de tone ca sa amortizeze rezonanta. Mai mult, structurile sunt realizate astfel incat rezonanțele se produc la frecvențe greu de atins. Cladirile in zone seismice sunt in general construite astfel incat sa nu se produca rezonante la frecvențe de asteptat în cazul unui cutremur.

In istorie avem cateva exemple de poduri care s-au prabusit datorita rezonantei. Podul Boroughton s-a prabusit ca urmare a marșului soldaților care a creat oscilatii rezultand in rezonanta, la fel si in cazul Podului Angers. In cazul Podului Tacoma Narrows initial se credea ca oscilatiile au fost produse de frecventa vantului, care erau prea aproape de frecventa podului. Un vant de 60 km/h a distrus un pod, in conditiile in care era construit sa reziste la vanturi cu intensitatatea de 200 km/h. In cele din urma s-a demonstrat ca nu rezonanta a distrus podul, ci unele erori de proiectare care au condus la o auto-oscilare a podului. Un eveniment asemanator, dar remediat la timp a fost in cazul Millenium Bridge din Londra. Vibratiile laterale se pare ca au aparut din cauza numarului mare de pasageri aflati pe pod. S-a produs un efect oarecum asemanator marsului unei trupe de soldati. Problema este comuna podurilor relativ usoare si are legatura cu numarul de persoane care il traverseaza si frecventa laterala a podului.

Frecventele naturale se mai numesc si *frecvente proprii* deoarece ele corespund unor probleme de valori proprii. Spre exemplu, in descrierea unor sisteme oscilante, in lipsa unei forte de amortizare, se ajunge la ecuatia

$$M\ddot{\bar{x}} = K\bar{x}$$

unde M este matricea de masa si K este matricea de rigiditate. Cautarea unor solutii oscilante de tipul $\bar{x} = \bar{v} \cdot \cos(\omega t)$ conduce la o problema generalizata de valori proprii

$$(K - \lambda M)\bar{v} = \bar{0}$$

pentru $\lambda = \omega^2$. Frecventele naturale sunt $f_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi}$, $i = 1, 2, \ldots$ unde λ_i sunt valorile proprii ale problemei anterioare.

In practica, cele mai mici/mai mari frecvente naturale prezinta interes. Pentru estimarea acestora se folosesc algoritmi numerici de tipul algoritmului Lanczos, intrucat abordarea exacta esueaza, ca de obicei. Chiar si in cazul in care $M = I$, *ecuatia caracteristica*

$$det(K - \lambda I) = 0$$

poate reprezenta o ecuatie polinomiala de grad $n \geq 5$, pentru care nu exista o formula de rezolvare prin radicali, precum in cazul celor de grad 2.

Vectori si valori proprii

• cand o matrice actioneaza asupra unui vector, prin inmultire, efectul normal al transformarii liniare obtinute consta intr-o rotatie si eventual o scalare a respectivului vector

• exista anumiti vectori pe care A nu ii roteste, doar ii scaleaza

Vectori si valori proprii

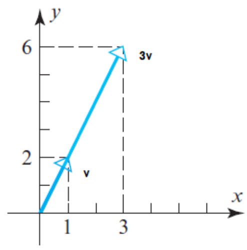
Daca $A \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice patrata atunci un vector coloana nenul v se numeste vector propriu corespunzator valorii proprii λ daca Av este un multiplu de v

$$Av = \lambda v$$

Valoarea proprie λ poate fi considerata ca fiind factorul de scalare al vectorului v.

• de exemplu, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ vectorul $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ este un vector propriu corespunzator valorii proprii $\lambda = 3$

$$Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3v$$



• deoarece $Av = \lambda v \implies (A - \lambda I)v = \bar{0}$, intrucat dorim sa obtinem solutii v nenule, sistemul liniar obtinut are astfel de solutii daca si numai daca

$$det(A - \lambda I) = 0 \qquad \text{(ecuatia caracteristica a lui } A\text{)}$$

asadar valorile proprii sunt radacinile ecuatiei caracteristice.

• cu toate ecuatia caracteristica are coeficienti reali ea poate avea si radacini complexe

$\implies$ valorile proprii pot fi numere complexe, la fel si componentele vectorilor proprii pot fi numere complexe

$\implies$ daca $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci scalarea cu λ a unui vector v din plan are ca efect o rotatie a acestuia, din cauza structurii de spatiu vectorial complex a lui $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

• ecuatia caracteristica va avea gradul n, cand $A \in M_n(\mathbb{R})$, iar unele radacini se pot repeta

$\implies$ notam cu m_{λ_i} multiplicitatea algebrica a valorii proprii λ_i (numarul care indica de cate ori se repeta radacina λ_i)

$\implies$ spre exemplu, ecuatia

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$$

are radacinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ si $\lambda_3 = 1$, vom spune ca valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$ cu $m_{\lambda_1} = 2$ si $\lambda_2 = 3$ cu $m_{\lambda_2} = 1$

• pentru o valoare proprie λ gasita vom obtine o infinitate de vectori proprii corespunzatori ei si acesti vectori proprii formeaza un subspatiu vectorial

$$S_\lambda = \{v \ : Av = \lambda v\} \qquad \text{(subspatiul propriu asociat lui } \lambda)$$

• putem obtine o localizare aproximativa a valorilor proprii cu ajutorul discurilor Gerschgorin

$$|z - a_{kk}| \le \min \left\{ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ki}|, \ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}| \right\}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

unde a_{kk} sunt elementele de pe diagonala principala a matricei A

• orice valoare proprie λ se afla localizata intr-unul dintre aceste discuri conform teoremei lui Gerschgorin

• cele doua expresii sunt de fapt suma modulelor elementelor de pe aceeasi coloana cu a_{kk}, respectiv aceasi linie, fara a contoriza pe $|a_{kk}|$

Discuri Gerschgorin

Pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

se pot forma trei discuri Gerschgorin care ne vor da o localizare a valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Sa incepem prin a observa ca pe diagonala principala se afla elementele $a_{11} = 5$, $a_{22} = 6$ si $a_{33} = -5$. Pentru primul element suma modulelor elementelor de pe linie este $|1| + |1| = 2$ (fara a contoriza $|a_{11}|$) iar de pe coloana este $|0| + |1| = 1$ asadar primul disc Gerschgorin este

$$|z - 5| \le \min\{2, 1\} = 1$$

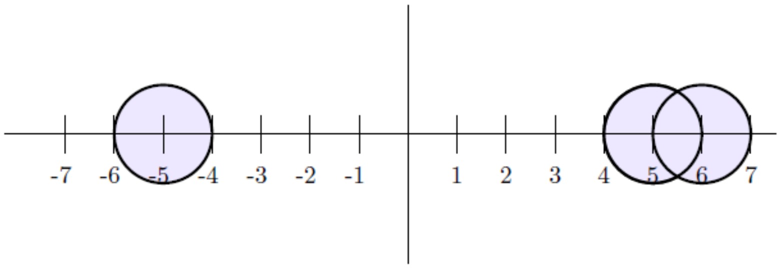
Tinand cont ca, in planul complex, ecuatia unui cerc cu centrul in punctul C de afix z_0 si raza R este $|z - z_0| = R$, inecuatia de mai sus corespunde discului circular (cercul impreuna cu interiorul sau) centrat in 5 si avand raza egala cu 1. Prin aceeasi metoda se obtin celelalte doua discuri Gerschgorin

$$|z - 6| \le \min\{|0| + |1|, |1| + |0|\} = 1$$

si

$$|z - (-5)| \le \min\{|1| + |0|, |1| + |1|\} = 1$$

ultimul fiind un disc cu centrul in -5, de raza tot 1.



Asadar, conform teoremei lui Gerschgorin, valorile proprii vor fi situate in aceste discuri. Facand calculele, adica rezolvand ecuatia caracteristica matricei A se obtin valorile proprii

$$\left\{5, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\} \approx \{5, 6.0902, -5.0902\}$$

▶ *Diagonalizarea matricelor*

• dorim sa construim o metoda prin care sa putem calcula mai usor puterile unei matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$\Longrightarrow$ incepem prin cautarea unor cazuri particulare mai usor de rezolvat: in cazul $A \in M_3(\mathbb{R})$, o matrice diagonala

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

se comporta bine la ridicarea la putere

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$

$\Longrightarrow$ D are o structura prea simpla, dorim sa rezolvam problema pentru matrice cu structuri cat mai complexe, cat mai apropiate de forma generala

$\Longrightarrow$ o matrice de forma PDP^{-1} se comporta bine la ridicarea la putere din cauza urmatorului fenomen

$$(PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} \cdot \ldots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$$

• in ce conditii am putea scrie orice matrice A sub forma PDP^{-1} ?

$\Longrightarrow$ daca $A = PDP^{-1}$ atunci $AP = PD$

$\Longrightarrow$ vizualizam matricea P ca pe o colectie de coloane

$$P = \begin{pmatrix} c_1 \mid & c_2 \mid & c_3 \end{pmatrix}$$

si atunci avem relatiile (verificati-le)

$$AP = \begin{pmatrix} Ac_1 \mid & Ac_2 \mid & Ac_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 \mid & \lambda_2 c_2 \mid & \lambda_3 c_3 \end{pmatrix} = PD$$

un exemplu de rationare cu blocuri de informatie

$\Longrightarrow$ prin urmare determinarea matricelor P si D este strans legata de rezolvarea ecuatiei

$$\boxed{Av = \lambda v, \quad v \neq \bar{0}}$$

• in final vom studia maxima generalitate a metodei:
In ce conditii, o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, poate fi descompusa sub forma

$$A = PDP^{-1} \ \ ?$$

▷ pentru a construi matricea diagonala D, avem nevoie de n valori reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ doarece am presupus ca respectiva descompunere are loc in $M_n(\mathbb{R})$

▷ ecuatia caracteristica, fiind de grad n, va livra n radacini dar nu obligatoriu reale (unele pot fi complexe)

▷ pentru a construi o matrice inversabila P avem nevoie de n vectori coloana liniar independeti (altfel $det\ P = 0$)

▷ a doua conditie pe care trebuie sa o impunem ne asigura ca cele n valori proprii vor genera n vectori proprii liniar independenti

Teorema de diagonalizare

O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabila daca si numai daca toate valorile proprii sunt reale si dimensiunile spatiilor proprii coincid cu multiplicitatile algebrice ale valorilor proprii, adica

$$dimS_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}, \qquad i = \overline{1,k}$$

pentru cele k valori proprii distincte.

$\Longrightarrow$ o consecinta rapida a teoremei de diagonalizare este ca orice matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu n valori proprii distincte este diagonalizabila

• de remarcat ca intotdeauna dimensiunea subspatiilor proprii este cel mult egala cu multiplicitatea algebrica a valorilor proprii

$$dimS_{\lambda_i} \leq m_{\lambda_i}, \qquad i = \overline{1,k}$$

din aceasta cauza daca nu avem egalitate nu se genereaza suficienti vectori proprii liniar independenti

Diagonalizarea matricelor simetrice

O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrica are toate valorile proprii reale si poate fi descompusa sub forma

$$A = PDP^t$$

unde P matrice ortogonala, adica $P^tP = PP^t = I_n$, iar D este o matrice diagonala formata cu valorile proprii.

• coloanele lui P se afla aplicand procedeul Gram-Schmidt generatorilor subspatiilor proprii S_{λ_i} gasite

Remarca

Daca $A \in M_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabila putem calcula mai rapid $f(A)$, nu doar A^k, pentru orice functie f care contine valorile proprii ale lui A in domeniul sau de definitie

$$f(A) = P \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ecuatii si matrice circulare

• o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numeste circulara daca elementele sale se obtin prin permutarea circulara a primei linii

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \dots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

• unei astfel de matrice i se asociaza in mod natural functia

$$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$$

• matricele circulare prezinta un avantaj teoretic deosebit, intrucat orice valoare proprie poate fi dinainte exprimata in functie de elementele sale

$\Longrightarrow$ notam cu $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ radacina primitiva a unitatii de ordin n si orice valoare proprie va fi de tipul

$$\lambda_i = f(\omega^i) = a_1 + a_2\omega^i + a_3\omega^{2i} + \ldots + + a_n\omega^{(n-1)i}, \quad i = \overline{1,n}$$

• putem folosi acest fenomen pentru a obtine o tratare unitara a metodelor de rezolvare a ecuatiilor de grad 2, 3 sau 4, ideea este sa exprimam astfel de ecuatii ca polinoame caracteristice ale unor matrice circulare

$\Longrightarrow$ in acest fel valorile proprii ale matricelor circulare alese vor coincide cu radacinile ecuatiilor

• sa vedem intai cum functioneaza pentru ecuatia de gradul 2

$$ax^2 + bx + c = 0$$

• intai rescriem ecuatia sub forma

$$x^2 + px + q = 0$$

dupa impartire la $a \neq 0$

• consideram o matrice circulara

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad f(x) = a + bx, \quad \omega = -1$$

pentru care

$$det(A - xI) = \begin{vmatrix} a - x & b \\ b & a - x \end{vmatrix} = x^2 + px + q$$

si se gaseste prin identificarea coeficientilor

$$\begin{cases} -2a = p \\ a^2 - b^2 = q \end{cases}$$

cu solutiile

$$a = -\frac{p}{2} \quad \text{si} \quad b = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

• pentru orice b am alege (spre exemplu cel cu semnul $+$) stim ca valorile proprii ale lui A sunt

$$\lambda_1 = f(-1) = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\lambda_2 = f((-1)^2) = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

si acestea vor coincide cu radacinile ecuatiei de gradul 2

• pentru o ecuatie oarecare de gradul 3

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

obtinuta prin impartire la coeficientul lui x^3, se face intai schimbarea de variabila

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

pentru a ajunge la forma redusa

$$y^3 + py + q = 0$$

• daca expresia din stanga ar fi polinomul caracteristic al unei matrice circulare $A \in M_3(\mathbb{R})$ aceasta ar avea $tr(A) = 0$, deoarece coeficientul lui y^2 este 0, prin urmare consideram

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad f(y) = by + cy^2, \quad \omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

si

$$det(A - yI) = \begin{vmatrix} -y & b & c \\ c & -y & b \\ b & c & -y \end{vmatrix} = y^3 + py + q$$

care conduce la

$$\begin{cases} -3bc = p \\ -b^3 - c^3 = q \end{cases}$$

care se rescrie ca

$$\begin{cases} b^3c^3 = -\frac{p^3}{27} \\ b^3 + c^3 = -q \end{cases}$$

ceea ce inseamna ca b^3 si c^3 sunt solutii ale ecuatiei de gradul 2

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

• se rezolva aceasta ecuatie si se egaleaza b^3 cu oricare solutie x_1 gasita, apoi se calculeaza o solutie b (posibil complexa) a ecuatiei

$$b^3 = x_1$$

iar pentru c alegem $c = -\frac{p}{3b}$

• in final, cu aceste valori b, c gasite, se exprima radacinile ecuatiei de gradul 3 prin

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= f(\omega) = b \cdot \omega + c \cdot \omega^2 = b \cdot \omega + c \cdot \overline{\omega} \\ \lambda_2 &= f(\omega^2) = b \cdot \omega^2 + c \cdot \omega^4 = b \cdot \overline{\omega} + c \cdot \omega \\ \lambda_3 &= f(\omega^3) = b \cdot \omega^3 + c \cdot \omega^6 = b + c \end{aligned}$$

pentru ca $\omega^3 = 1$, prin definitie

• oarecum analog se rationeaza pentru o ecuatie de gradul 4

▶ ***Ecuatii diferentiale liniare***

• definitia vectorilor si valorilor proprii poate fi extinsa la nivelul transformarilor liniare, chiar si atunci cand acestea actioneaza pe spatii infinit dimensionale

• transfomarea liniara indusa prin derivare, prezentata in seminarul anterior

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \qquad (Df)(t) = f'(t)$$

admite vectori si valori proprii cu impact in studiul ecuatiilor diferentiale

$$Df = \lambda f \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(t) = \lambda \cdot f(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

• rezolvand ecuatia diferentiala rezultata, obtinem usor pentru cazul $\lambda \in \mathbb{R}$, ca orice vector propriu corespunzator valorii propriii λ va fi de forma

$$f(t) = c \cdot e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c \text{ constanta}$$

• investigam in continuare doar sistemele de ecuatii diferentiale de tipul

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

pentru care matricea coeficientilor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

este diagonalizabila

• ideea este sa notam $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ pentru a rescrie sistemul de ecuatii diferentiale sub forma

$$\bar{x}'(t) = A \cdot \bar{x}(t)$$

unde derivarea se face pentru fiecare componenta in parte

• daca A este diagonalizabila si $A = PDP^{-1}$ pentru

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{iar} \quad P = (v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n)$$

atunci $\bar{x}'(t) = PDP^{-1} \cdot \bar{x}(t) \quad \Longrightarrow \quad \left(P^{-1}\bar{x}\right)' = D \cdot P^{-1}\bar{x}$

• facand substitutia $\bar{y} = P^{-1}\bar{x}$ obtinem sistemul de ecuatii diferentiale

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 \cdot y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 \cdot y_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) = \lambda_n \cdot y_n(t) \end{cases}$$

cu solutia generala

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 \cdot t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 \cdot t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(t) = c_n e^{\lambda_n \cdot t} \end{cases}$$

• tinand cond ca $\bar{x} = P\bar{y}$ este solutia sistemului initial de ecuatii diferentiale, se obtine urmatoarea teorema

Sisteme de ecuatii diferentiale

Daca matricea coeficientilor sistemului $\bar{x}' = A\bar{x}$ este diagonalizabila, atunci o solutie generala a sistemului de ecuatii diferentiale poate fi exprimata sub forma

$$\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

unde λ_i sunt valorile proprii si v_i sunt vectorii proprii corespunzatori.

• in semestrul doi vom studia cazul general, cand A este o matrice patrata oarecare, noutatea constand in introducerea cazurilor $\lambda_i \in \mathbb{C}$ si $dimS_{\lambda_i} < m_{\lambda_i}$

• aplicam acest rezultat pentru un model matematic simplist

Sisteme liniare de ecuatii diferentiale

Consideram sistemul de ecuatii diferentiale provenit dintr-o modelare matematica a unei curse a inarmarii intre doua natiuni

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

unde $x(t)$ si $y(t)$ sunt rezervele de munitie detinute de catre cele doua natiuni, in momentul t. Fiecare ecuatie descrie rata de schimbare a nivelului inarmarii pentru respectiva tara.

Se observa ca daca notam $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sistemul devine in scriere matriciala

$$\bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}(t)$$

iar matricea A va avea ecuatia caracteristica

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

cu solutiile $\lambda_1 = -1$ si $\lambda_2 = -3$. Subspatiul propriu corespunzator lui λ_1

$$S_{\lambda_1} = \{v \;:\; Av = -v\}$$

conduce la un sistem liniar cu solutia $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ adica

$$S_{\lambda_1} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Analog subspatiul propriu corespunzator lui λ_2

$$S_{\lambda_1} = \{v \ : \ Av = -3v\}$$

conduce la un sistem liniar cu solutia $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ adica

$$S_{\lambda_2} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Cei doi vectori proprii care genereaza subspatiile proprii vor fi liniar independenti si prin urmare obtinem conform teoremei de mai sus urmatoare solutie generala pentru sistemul de ecuatii diferentiale

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

adica

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \\ y(t) = c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t} \end{cases}$$

Se poate observa ca in timp, conform acestui model, se ajunge la o stare de echilibru in aceasta cursa a inarmarii, caci $x(t) \to c_1 + c_2$ si $y(t) \to c_1 - c_2$ atunci cand $t \to \infty$.

$\square$

- o ecuatie diferentiala liniara de ordin n, cu coeficienti constanti

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

unde $x^{(k)}$ inseamna a k-a derivata, poate fi redusa la cazul anterior prin transformarea

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = y_1' = x' \\ y_3 = y_2' = x'' \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n+1} = y_n' = x^{(n)} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n} y_{n-2} - \ldots \frac{a_1}{a_n} y_1 \end{cases}$$

in acest fel se obtine sistemul de ecuatii diferentiale

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n' = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n} y_{n-2} - \dots \frac{a_1}{a_n} y_1 \end{cases}$$

Probleme rezolvate

Problema 1

Rezolvati ecuatia diferentiala liniara

$$x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 0$$

Solutie: Rescriem ecuatia diferentiala sub forma unui sistem diferential liniar cu coeficienti constanti

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x_1' = x' \\ x_3 = x_2' = x'' = x' + 6x = x_2 + 6x_1 \end{cases}$$

prin urmare se obtine sistemul liniar atasat

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_2 + 6x_1 \end{cases}$$

cu matricea coeficientilor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecuatia caracteristica corespunzatoare aceste ecuatii diferentiale, dar si matricei A, este

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

cu solutiile $\lambda_1 = -2$ si $\lambda_2 = 3$. Deoarece are doua valori proprii distincte matricea A va fi diagonalizabila si prin urmare solutia generala a sistemului de ecuatii diferentiale atasat este

$$\bar{x}(t) = c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{3t} v_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

unde $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, iar v_1 si v_2 sunt vectorii proprii liniar independenti, corespunzatori celor doua valori proprii.

Prin calcul se obtine ca subspatiile proprii sunt

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

si

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

asadar

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \bar{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} \\ -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

Identificand componentele, se obtine solutia generala a ecuatiei diferentiale din enuntul problemei

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \text{ constante.}$$

Problema 2

Aflati matricea exponentiala e^A corespunzatoare urmatoarei matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Solutie: Exponentiala unei matrice este tot o matrice de acelasi ordin si este definita prin

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

unde elementele sale se calculeaza afland suma fiecarei serii corespunzatoare. Un sistem de ecuatii diferentiale de tipul

$$\bar{x}'(t) = A \cdot \bar{x}'(t)$$

poate fi rezolvat, intr-o maniera similara cazului 1-dimensional, apeland la exponentiala

$$\bar{x}(t) = e^{At} \cdot \bar{c}$$

unde $\bar{c}$ va fi un vector coloana format cu constante.

In cazul in care A este diagonalizabila, conform unei remarci anterioare, avem urmatoarea formula pentru exponentiala

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Stim din problema anterioara ca A este diagonalizabila si $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ iar $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, prin urmare

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3e^{-2}+2e^3}{5} & \frac{-e^{-2}+e^3}{5} \\ \frac{-6e^{-2}+6e^3}{5} & \frac{2e^{-2}+3e^3}{5} \end{pmatrix}$$

Daca luam acum in considerare sistemul

$$\bar{x}'(t) = A \cdot \bar{x}'(t)$$

de la problema anterioara, solutia sa va fi sub forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \bar{x}(t) = e^{At} \cdot \bar{c} = \begin{pmatrix} \frac{3e^{-2t}+2e^{3t}}{5} & \frac{-e^{-2t}+e^{3t}}{5} \\ \frac{-6e^{-2t}+6e^{3t}}{5} & \frac{2e^{-2t}+3e^{3t}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

iar daca identificam componentele

$$x(t) = \frac{3c_1 - c_2}{5} e^{-2t} + \frac{2c_1 + c_2}{5} e^{3t}$$

Prin renotarea constantelor $k_1 = \frac{3c_1-c_2}{5}$, $k_2 = \frac{2c_1+c_2}{5}$ se obtine formula din problema anterioara.

Problema 3 (Solutii oscilante)

Rezolvati ecuatia diferentiala liniara

$$x''(t) + x(t) = 0$$

Solutie: Pe parcursul acestei fise am incercat sa evitam discutarea cazului valorilor proprii complexe si al solutiilor generate de catre acestea. Acum avem oportunitatea sa arata ca astfel de valori proprii genereaza solutii oscilante ale unei ecuatii diferentiale. Pentru ecuatia diferentiala de mai sus, sistemul liniar atasat

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = y_1' \\ y_3 = y_2' = x'' = -y_1 \end{cases}$$

adica

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

are matricea atasata

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cu ecuatia caracteristica

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

si solutiile $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$. Deoarece valorile proprii nu sunt reale, matricea nu este diagonalizabila in $M_n(\mathbb{R})$.

Daca matricea A este considerata in $M_2(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ atunci ea va fi diagonalizabila caci admite doua valori proprii distincte din corpul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (criteriul general de diagonalizare, vezi curs). Vectorii proprii vor avea componente tot din corpul $\mathbb{C}$. Problema este ca in acest moment solutiile sunt complexe si au forma

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

pentru doi vectori proprii liniar independenti. Se poate arata usor ca cei doi vectori proprii se pot alege incat sa fie conjugati unul altuia, deoarece $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 = \overline{\lambda_2} v_1 \quad \Longrightarrow \quad \overline{Av_1} = \lambda_2 \overline{v_1} \quad \Longrightarrow \quad A\overline{v_1} = \lambda_2 \overline{v_1}$$

adica si $\overline{v_1}$ este vector propriu a lui λ_2, deci poate fi ales in asa fel incat $\overline{v_1} = v_2$. Daca dorim sa obtinem solutii reale trebuie sa aplicam urmatorul trick: deoarece $v_1 \in \mathbb{C}^2$ se poate observa ca

$$\text{Re } v_1 = \frac{1}{2}(v_1 + \overline{v_1}), \quad \text{si} \quad \text{Im } v_1 = \frac{1}{2i}(v_1 - \overline{v_1})$$

unde $\overline{v}$ inseamna aici vectorul conjugat, sunt vectori cu componente reale care raman vectori proprii pentru A.

Inlocuind in $v_1 = \text{Re } v_1 + i \cdot \text{Im } v_1$ in forma solutiilor

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{it} + c_2 \overline{v_1} e^{-it} = c_1(\text{Re } v_1 + i \cdot \text{Im } v_1)e^{it} + c_2(\text{Re } v_1 - i \cdot \text{Im } v_1)e^{-it}$$

se obtine in final

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = k_1(\text{Re } v_1 \cdot \cos t - \text{Im } v_1 \cdot \sin t)e^t + i \cdot k_2(\text{Re } v_1 \cdot \sin t + \text{Im } v_1 \cdot \cos t)e^t$$

dupa renotarea constantelor, caci $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Se poate arata usor apoi ca cele doua functii

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = (\text{Re } v_1 \cdot \cos t - \text{Im } v_1 \cdot \sin t)e^t$$

si

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} = (\text{Re } v_1 \cdot \sin t + \text{Im } v_1 \cdot \cos t)e^t$$

sunt solutii reale liniar independente ale sistemului liniar de ecuatii diferentiale. De aici se obtine apoi o solutie generala pentru ecuatia diferentiala, de forma

$$x(t) = C_1 \cdot \cos t \cdot e^t + C_2 \cdot \sin t \cdot e^t$$

pentru C_1, C_2 constante.

Problema 4

Rezolvati ecuatia

$$2x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$$

prin metoda matricelor circulare.

Solutie: Algoritmul de rezolvare presupune urmatorii pasi

Pas 1: Obtine forma redusa $y^3 + py + q = 0$ facand substitutia $x = y - \frac{b}{3a}$

Pas 2: Obtine o solutie x_1 a ecuatiei de gradul doi atasata $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$

Pas 3: Obtine o solutie pentru $b^3 = x_1$ si apoi $c = -\frac{p}{3b}$ si construieste radacinile

$$\lambda_1 = b \cdot \omega + c \cdot \overline{\omega}$$
$$\lambda_2 = b \cdot \overline{\omega} + c \cdot \omega$$
$$\lambda_3 = b + c$$

La ultimul pas, ecuatia $b^3 = x_1$ poate presupune extragerea radacinii de ordin 3 dintr-un numar complex (caci x_1 poate fi complexa) si in $\mathbb{C}$ se obtin trei solutii pentru ecuatia $w^3 = z$:

$$w_k = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), \quad k = \overline{1,3}$$

unde θ este un argument al numarului complex z.

Daca ecuatia de gradul doi atasata are doua solutii reale, se alege solutia b reala a ecuatiei $b^3 = x_1$.

Problema 5

valori proprii si spectrul luminii, in astronomie

Solutie:

Probleme propuse

A. Consolidare cunostinte

Problema A.1. *Adevarat sau fals ?*

i) o matrice singulara are valori proprii nenule

ii) daca $p(\lambda) = 2\lambda^2 + 2\lambda - 3$ este polinomul caracteristic al matricei A, atunci A este inversabila

iii) daca $Av = 0$ pentru un vector v nenul atunci v nu poate fi vector propriu *iv) daca $Av = \lambda_1 v$, $Aw = \lambda_2 w$ iar $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci v_1 si v_2 sunt liniar independenti*

v) exista transformari liniare fara valori proprii

vi) orice transformare liniara $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ poate deveni o scalare, posibil neuniforma, prin schimbarea sistemului de coordonate

vii) daca $A^2 = O$ atunci toate valorile proprii sunt nule

Problema A.2. *Dati un exemplu de transformare liniara $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cu o singura valoare proprie. Construiti apoi o transformare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care are exact doua valori proprii distincte.*

Problema A.3. *Determinanti printr-o metoda grafica vectorii si valorile proprii corespunzatori unei rotatii $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de unghi $0 < \theta < 90°$. Realizati acelasi lucru pentru simetria $S_d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fata de dreapta $d :\ y = 3x$ sau forfecarea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de-a lungul axei Ox si de factor $k = 3$.*

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Să se arate că matricea* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *este similară cu una diagonală. Să se calculeze apoi A^{2020} şi A^{-1} folosind aceasta proprietate de diagonalizare.*

Problema B.2. *Rezolvati sistemul*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Gasiti solutia particulara care satisface conditiile $x_1(0) = 0$ si $x_2(0) = 0$.

Problema B.3. *O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numeste strict diagonal dominanta daca $|a_{ii}| > \sum_{i \neq k} |a_{ik}|$ pentru fiecare linie. Aratati ca o matrice strict diagonal dominanta este inversabila.*

Problema B.4. *Aflati vectorii si valorile proprii corespunzatori matricei*

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema B.5. *O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numeste circulara daca elementele sale se obtin prin permutarea circulara a primei linii*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \dots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

Unei astfel de matrice i se asociaza in mod natural functia

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}$$

Notam cu $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ radacina primitiva a unitatii de ordin n. Aratati ca

i) Orice valoare proprie este de tipul

$$\lambda_i = f(\omega^i) = a_1 + a_2\omega^i + a_3\omega^{2i} + \ldots + +a_n\omega^{(n-1)i}, \quad i = \overline{1,n}$$

ii) Vectorii

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \omega^i, \omega^{2i}, \ldots, \omega^{(n-1)i}), \quad i = \overline{1,n}$$

sunt vectori proprii liniar independenti.

iii) Gasiti o conditie pe care a_i, $i = \overline{1,n}$, sa o satisfaca pentru ca A sa fie singulara

Problema B.6. *Transformarea liniara $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita prin*

$$T(x, y) = (x + 2y, y)$$

realizeaza forfecari de factor $k = 2$ de-a lungul axei Ox. Aratati ca printr-o schimbare a sistemului de coordonate transformarea nu poate deveni o scalare neuniforma relativ la noul sistem.

Indiciu: Versorii noului sistem formeaza o baza vectoriala a lui $\mathbb{R}^2$. Problema poate fi rezolvata si intuitiv reprezentand-o grafic. Cum deformeaza transformarea T patratul unitate?

Problema B.7. *Aratati ca daca λ este valoare proprie a matricei inversabile A, atunci $\frac{1}{\lambda}$ este valoare proprie a matricei A^{-1}.*

Problema B.8. *Sirul lui Fibonacci este dat prin relatia de recurenta*

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \textit{si} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n > 1.$$

Putem rescrie relatia de recurenta sub forma matriciala

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aflati termenul general al sirului $(F_n)_{n\geq 0}$.

C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

Problema C.1.

Bibliografie

[1] H. Anton, C. Rorres. *Elementary Linear Algebra. Applications Version* Ed. Wiley, 2014.

[2] O. Bundau, A. Juratoni *Exercitii si probleme de algebra liniara*, Ed. Politehnica, 2012.

[3] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

[4] D. Lay. *Linear Algebra and its Applications*, Ed. Addison-Wesley, 2012.

[5] D. Kalman, J White. *Polynomial equations and circulant matrices*, American Math. Monthly, 108(9), 2001.