"Natura este scrisă în limbaj matematic ."

Galileo Galilei

1

Vectori si matrice

Nutritie

Un nutrionist trebuie sa creeze o dieta unei persoane care are un deficit de calciu, vitamina A si magneziu. In aceasta dieta are de gand sa includa laptele, sucul de portocale si broccoliul. Necesarul zilnic este de 105 mg de calciu, 30 mg de vitamina A si 300 mg magneziu. Mai jos avem continutul de calciu, vitamina A si magneziu raportat la 100 de grame din fiecare aliment mai sus amintit.

Continut mg/100 grame			
Lapte	75 Ca	20 vit. A	210 Mg
Suc	50 Ca	10 vit. A	130 Mg
Broccoli	25 Ca	40 vit. A	170 Mg

• Dupa ce formula va compune o dieta care sa acopere necesarul zilnic?

Daca o persoana are o usoara intoleranta la lactoza e de preferat sa nu consume mai mult de 100 de grame lapte intr-o zi.

• Cum realizeaza nutritionistul o dieta pentru astfel de persoane ?

Circuite electrice

Un circuit electric este o retea electrica in bucla inchisa ce include componente electrice realizandu-se astfel o cale inchisa (cu dus si intors) pentru curentul electric. Sistemele liniare pot fi folosite pentru a determina intensitatea curentului prin diverse ramuri ale unui circuit electric.

Legea lui Ohm

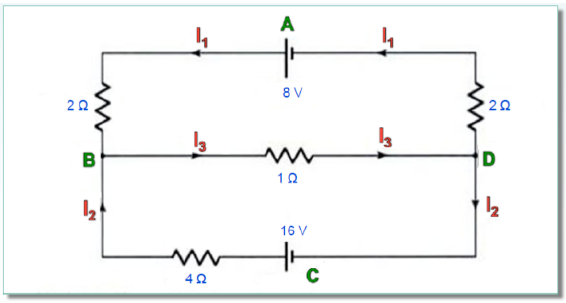
Intr-un circuit intensitatea (I) curentului electric este direct proportionala cu tensiunea aplicata (U) si invers proportionala cu rezistenta (R) din circuit

$$U = IR$$

Legile lui Kirchhoff

1. Suma intensitatilor curentilor (continui) care intra într-un nod de retea este egala cu suma intensitatilor curentilor care ies din acelasi nod
2. Suma algebrica a tensiunilor electromotoare dintr-un ochi de retea este egala cu suma algebrica a căderilor de tensiune din acel ochi de retea.

Dorim sa determinam intensitatea curentilor in circuitul de mai jos



Ideea este sa folosim cele trei legi de mai sus pentru a transforma problema intr-un sistem liniar. Sa notam cu I_1, I_2, I_3 intensitatile curentilor din ramurile circuitului. Vom aplica legea lui Kirchhoff in nodurile de retea:

$$B: \quad I_1 + I_2 = I_3$$

$$D: \quad I_3 = I_1 + I_2$$

Aceste doua relatii vor conduce la o singura ecuatie $I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

In ochiurile de retea, tinand cont de sensul curentului, legea a doua ne spune ca

$$ABDA: \quad 2I_1 + I_3 + 2I_1 = 8$$

$$CBDC: \quad 4I_2 + I_3 = 16$$

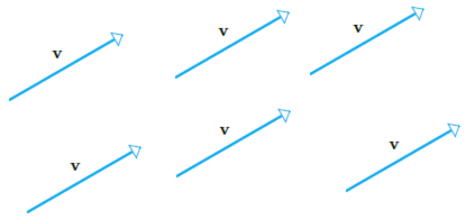
Astfel problema aflarii intensitatii curentilor se reduce la rezolvarea sistemului liniar

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 4I_1 + I_3 = 8 \\ 4I_2 + I_3 = 16 \end{cases}$$

Vectori liberi si segmente orientate

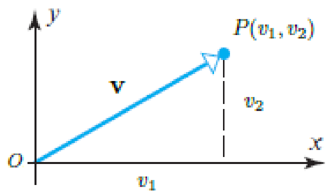
• orice vector liber $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ (respectiv $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in 3D) poate fi vazut ca o incercare de a descrie o directie

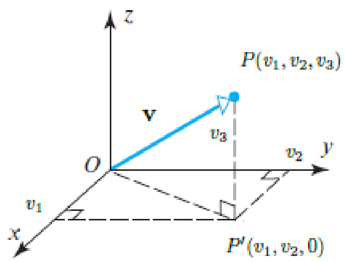
• din acest motiv $\mathbf{v}$ este egal cu orice alt vector obtinut prin translatarea sa paralela



• un reprezentant al vectorului liber $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ (respectiv $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$) se obtine reprezentand punctul $P(v_1, v_2)$ (respectiv punctul $P(v_1, v_2, v_3)$) care are aceleasi coordonate cu vectorul dat

▷ vectorul de pozitie $\overline{OP}$ al punctului P reprezinta o imagine a vectorului $\mathbf{v}$

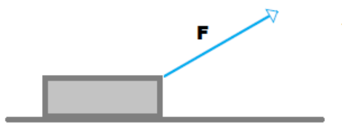




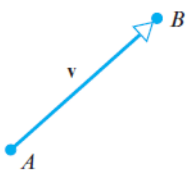
• aplicand teorema lui Pitagora in triunghiurile dreptunghice care se formeaza, in ambele cazuri, se deduce usor formula de calcul a magnitudinii (lungimii) unui vector

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \qquad \text{respectiv} \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$\Longrightarrow$ vectorii liberi poarta informatii referitoare la o directie dar si referitoare la lungime, prin urmare sunt des utilizati in fizica pentru a descrie directia pe care actioneaza o forta precum si magnitudinea fortei



• in acelasi timp putem sa consideram ca un vector liber realizeaza o deplasare a punctelor



caci daca $\mathbf{v} = \overline{AB}$ putem spune ca B este deplasatul lui A in directia si sensul lui $\mathbf{v}$ pe o distanta egala cu magnitudinea sa $|\mathbf{v}|$

• reciproc daca cunoastem coordonatele lui A si B putem sa aflam informatii despre deplasarea realizata, recuperand vectorul care a realizat deplasarea

$$\mathbf{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A), \quad \text{respectiv} \quad \mathbf{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

• ideea de a atasa un sens de parcurgere unui segment $[AB]$ conduce la notiunea de segment orientat si rezolva **problema localizarii** punctelor pe o dreapta

$\Longrightarrow$ exista doua puncte M cu proprietatea $\frac{MA}{MB} = 2$, insa daca atasam un sens acestor segmente va exista un singur punct M cu proprietatea $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 2$

Matrice dintr-o perspectiva vectoriala

• orice matrice poate fi vizualizata ca fiind o colectie de vectori linie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & a_{13}) \\ (a_{21} & a_{22} & a_{23}) \\ (a_{31} & a_{32} & a_{33}) \end{pmatrix}$$

sau vectori coloana

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{12} & \vdots & a_{13} \\ a_{21} & \vdots & a_{22} & \vdots & a_{23} \\ a_{31} & \vdots & a_{32} & \vdots & a_{33} \end{pmatrix}$$

si din acest punct de vedere matricele pot fi gandite ca fiind obiecte matematice utilizate pentru manipularea vectorilor

• **problema rangului** unei matrice devine acum o problema de extragere a informatiilor esentiale dintr-o colectie de vectori

• sa consideram matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} (\ 1 & -1 & 2) \\ (-1 & 2 & 0) \\ (-1 & 4 & 4) \end{pmatrix}$$

formata cu vectorii $L_1 = (1, -1, 2)$, $L_2 = (-1, 2, 0)$ si $L_2 = (-1, 4, 4)$

> Q: *Care vectori contin informatii ce nu pot fi recuperate din informatiile detinute de ceilalti vectori ?*
> Raspuns: Orice submatrice care livreaza rangul va identifica acei vectori

• rangul matricei=ordinul celui mai mare minor (determinant format cu elementele matricei) nenul

• pentru a calcula rangul pornim de la minori de dimensiuni mici pentru a obtine, prin lipirea unor noi elemente, minori nenuli de dimensiuni tot mai mari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ observam ca putem alege pentru start oricare dintre cei 8 minori de ordin 1 nenuli

$\Longrightarrow$ alegand elementul din coltul stanga-sus, avem

$$det(1) = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad rang\ A \geq 1$$

$\Longrightarrow$ completam acest minor cu alte elemente din matrice pentru a forma un minor de ordin 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

• sunt patru moduri posibile de a completa cu elementele ramase din matrice

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{2} \\ \boxed{-1} & 2 & \boxed{0} \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{4} & 4 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{2} \\ -1 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 4 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

• alegem unul dintre ele, spre exemplu minorul

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad rang\ A \geq 2$$

• putem completa acest minor nenul intr-un singur mod pentru a forma un minor de ordin 3

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{-1} & \boxed{4} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

• minorul obtinut este nul

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow rangA \neq 3$$

• analizand concluziile trase, deducem ca $rangA = 2$ si o submatrice care livreaza rangul este

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ aceasta submatrice contine coordonate ale primilor doi vectori L_1 si L_2

Concluzie: Primii doi vectori sunt cei care contin informatii ce nu pot fi recuperate din informatiile detinute de ceilalti iar al treilea L_3 nu contine nimic nou fata de acestia

$\Longrightarrow$ se poate verifica prin calcul ca

$$L_3 = 2L_1 + 3L_2$$

• putem afirma ca

$\Longrightarrow$ *Submatricea care livreaza rangul determina esenta informationala a unei matrice*

Problema inversei

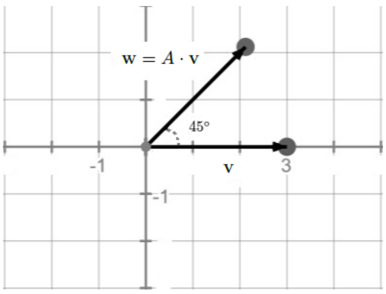
• in aceasta sectiune vom vizualiza un vector doi sau trei-dimensional ca fiind un vector coloana $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, respectiv $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pentru a-l putea inmulti cu o matrice

▷ putem folosi o matrice pentru a "deforma" vectori, de exemplu matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

deformeaza vectori rotindu-i cu 45° in sens invers acelor de ceasornic

▷ daca vectorul $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ este inmultit cu matricea A atunci vectorul $\mathbf{w} = A \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ este vectorul obtinut prin rotirea lui $\mathbf{v}$ cu 45°



• dar daca am avea la dispozitie doar vectorul deformat **w**, putem sa deformam inapoi si sa obtinem vectorul initial **v** ? (este deformarea reversibila ?)

• in cazul unei deformari prin rotatie raspunsul este evident afirmativ, vom roti vectorul **w** cu $45°$, in sensul acelor de ceasornic de aceasta data, si vom obtine vectorul initial **v**

• in general nu este intotdeauna posibil sa recuperam vectorul initial din forma celui deformat $\Longrightarrow$ se pierd informatii la deformare

Q: Daca deformam vectorul v prin matricea patrata A, putem sa recuperam apoi forma initiala a vectorului ?
Raspuns: Putem sa revenim la forma de dinaintea deformarii doar daca matricea este inversabila

$$w = A \cdot v \quad \xrightarrow[\text{inversabila}]{\text{daca A}} \quad v = A^{-1} \cdot w$$

• in cazul unei matrice de ordinul doi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

problema inversei are o solutie rapida

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ se observa ca o matrice patrata este inversabila daca si numai daca determinantul sau este nenul

• in cazul unei matrice A de ordin $n \geq 3$, algoritmul de aflare a inversei presupune urmatorii pasi

Pas 1: determina matricea transpusa A^t
Pas 2: determina matricea adjuncta A^*
Pas 3: determina inversa folosind formula $A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A^*$

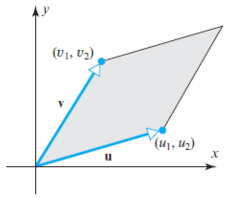
Determinanti dintr-o perspectiva geometrica

• regula lui Cramer, de rezolvare a unui sistem liniar, poate fi considerata o motivatie pur algebrica pentru a introduce obiectul matematic numit **determinant**

$\Longrightarrow$ putem motiva si geometric necesitatea introducerii aceleiasi notiuni

• aria paralelogramului determinat de doi vectori $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ este modulul determinantului format cu acesti vectori

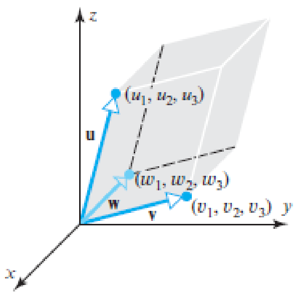
$$\mathcal{A}_{paralelogram} = \left| det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|$$



$\Longrightarrow$ doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sunt coliniari daca si numai daca determinantul format cu coordonatele lor este nul

• volumul paralelipipedului determinat de catre trei vectori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ este modulul determinantului format cu acesti vectori

$$\mathcal{V}_{paralelipiped} = \left| det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|$$



$\Longrightarrow$ trei vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sunt coplanari daca si numai daca determinantul format cu coordonatele lor este nul

• putem extinde aceste doua observatii pentru a oferi o semnificatie unui determinant de un ordin oarecare n, insa nu vom fi in stare sa vizualizam obiectul geometric al carui volum il calculam

$\Longrightarrow$ este vorba de un paralelotop, generalizarea paralelogramului si a paralelipipedului in n-dimensiuni

O abordare geometrica a sistemelor liniare

• in cele ce urmeaza vom incerca sa "desenam" sistemele de ecuatii liniare in speranta ca o abordare grafica poate clarifica unele actiuni intreprinse in activitatea de rezolvare a acestora

• in cazul $2D$ un sistem cu doua ecuatii si doua necunoscute are forma

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

iar daca dorim sa interpretam geometric problema rezolvarii sistemului trebuie sa ne gandim la puncte $A(x, y)$ care se afla pe obiectele geometrice descrise prin ecuatiile $x - 2y = -1$ si $-x + 3y = 3$

$\Longrightarrow$ problema rezolvarii unui sistem de ecuatii se traduce geometric prin problema aflarii intersectiei comune (daca exista) a obiectelor descrise de ecuatiile sistemului

$\Longrightarrow$ cu cat sunt mai multe ecuatii (obiecte geometrice) cu atat este tot mai greu sa aiba o intersectie comuna.

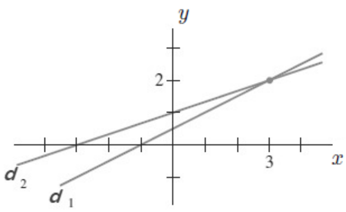
• recunoastem usor ecuatia generala a unei drepte in plan

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ de amintit aici ca a si b ofera informatii despre directia dreptei iar c despre distanta la originea $O(0,0)$ a reperului XOY.

$\Longrightarrow$ prima ecuatie spune de fapt ca $A(x,y) \in d_1$ unde $d_1 : \ x - 2y = -1$ iar a doua ca $A(x,y) \in d_2$ pentru $d_2 : \ -x + 3y = 3$

$\Longrightarrow$ prin urmare sistemul are o solutie daca si numai daca d_1 si d_2 se intersecteaza, o reprezentare grafica a celor doua drepte ofera



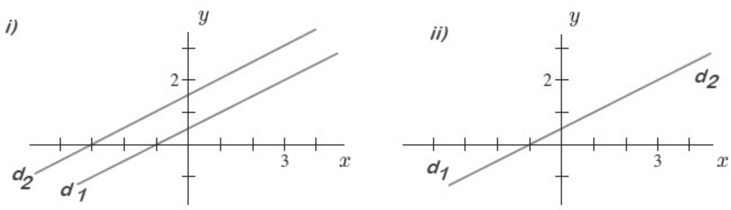
asadar dreptele se intersecteaza intr-un unic punct A

$\Longrightarrow$ prin calcul putem afla ca $x = 3$ si $y = 2$, asadar punctul de intersectie este $A(3,2)$.

• sistemele

$$i) \ \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \qquad ii) \ \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

sunt reprezentate grafic prin dreptele



$\Longrightarrow$ asadar primul sistem nu are solutie din moment ce dreptele nu se intersecteaza iar al doilea are o infinitate de solutii caci intersectia dreptelor este o intreaga dreapta

• sa consideram acum cazul $3D$ si vom porni cu sistemul

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2z + z = 4 \end{cases}$$

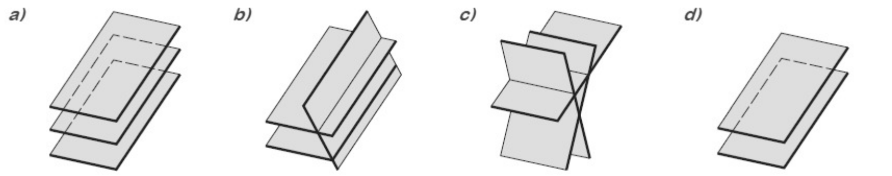
• crescand dimensiunea, vom cauta puncte $A(x, y, z)$ care sa apartina celor trei obiecte geometrice descrise prin ecuatiile sistemului

• ecuatia generala a unui plan este

$$ax + by + cz = d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

asadar a rezolva sistemul inseamna a studia daca cele trei plane, descrise prin ecuatiile de mai sus, au o intersectie comuna.

• vom investiga mai jos toate situatiile posibile care pot aparea (pozitiile relative a trei plane)

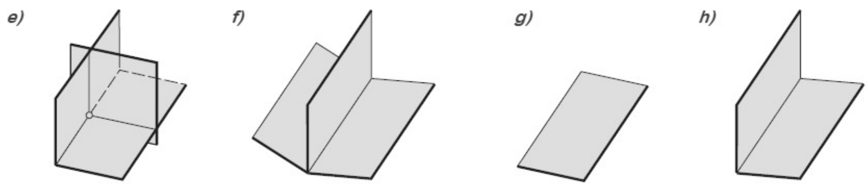


$\Longrightarrow$ in cazul **a)** planele descrise de cele trei ecuatii sunt paralele, deci nu exista puncte comune (sistem incompatibil)

$\Longrightarrow$ in cazul **b)** planele se intersecteaza doua cate doua dar nu au o interesectie comuna (sistem incompatibil)

$\Longrightarrow$ la fel si in cazul **c)**

$\Longrightarrow$ in situatia descrisa la**d)** doua plane coincid iar al treilea este paralel cu cele doua (sistem incompatibil)



$\Longrightarrow$ in cazul **e)** planele se intersecteaza intr-un unic punct, este exact cazul care corespunde situatiei $\Delta \neq 0$, cand sistemul poate fi rezolvat prin metoda Cramer

$\Longrightarrow$ in situatia de la **f)** cele trei plane au o infinitate de puncte in intersectia lor comuna (sistem compatibil nedeterminat)

$\Longrightarrow$ la fel si in situatiile descrise la **g)** si **h)**

Q: *Care este diferenta dintre cazul **f)** si **g)** ?*

Raspuns: Se poate argumenta usor ca un sistem compatibil nedeterminat cu trei ecuatii si trei necunoscute nu poate avea decat o variabila secundara α sau doua variabile secundare α si β.

In primul caz toate necunoscutele x, y si z se vor exprima in functie de α, obtinand o infinitate de puncte, toate situate pe o dreapta. Ne putem imagina dreapta ca fiind traiectoria unei particule care se deplaseaza cu viteza cunoscuta iar α reprezinta timpul. Precizand timpul scurs stim unde se afla particula pe dreapta (coordonatele x, y, z ale punctului)

In cazul in care avem doua variabile secundare, punctele comune A vor avea coordonatele depinzand de α si β si vor descrie un obiect 2-dimensional: un plan. Putem compara aceasta situatie cu cea a unui punct de pe globul pamantesc care poate fi exprimat prin coordonatele sale in spatiu (x, y, z) dar si prin latitudine si longitudine. Ne putem imagina α ca fiind latitudinea si β longitudinea.

• in cazul general n-dimensional un sistem de ecuatii liniare este o colectie de ecuatii de tipul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$$

$\Longrightarrow$ acum din punct de vedere geometric fiecare ecuatie reprezinta de fapt ecuatia unui hiperplan in spatiul euclidian n-dimensional

$\Longrightarrow$ aceste hiperplane sunt imposibil de vizualizat de catre oameni (nu percepem decat trei dimensiuni), fiind generalizari multi-dimensionale ale planelor

$\Longrightarrow$ asadar pentru sisteme cu mai mult de trei variabile abordarea geometrica esueaza si algebra isi recastiga terenul pierdut.

Rezolvarea sistemelor liniare

• revenim la sistemul considerat anterior

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2z + z = 4 \end{cases}$$

• in practica, atunci cand culegem informatii despre un fenomen, pot aparea doua situatii

1. unele ecuatii pot contine **informatii redundante** (nefolositoare) care pot fi recuperate din informatiile oferite de catre celelalte ecuatii ale sistemului
2. unele ecuatii pot contine **informatii care contrazic informatiile codificate in celelalte ecuatii**

• prin urmare, abordarea naturala trebuie sa contina urmatorii trei pasi:

Pas 1: *Identificarea ecuatiilor independente informational (care contin informatii ce nu pot fi recuperate din celelalte ecuatii) si eliminarea ecuatiilor redundante*

• determinantul unei matrice **testeaza independenta informationala** a liniilor (coloanelor) matricei

$\Longrightarrow$ daca $\det A \neq 0$ atunci liniile (coloanele) lui A sunt independente, fiecare contine informatii care nu pot fi recuperate din informatiile continute in celelalte

$\Longrightarrow$ daca $\det A = 0$ atunci liniile (coloanele) sunt dependente, cel putin una dintre ele va putea fi recuperata din continutul celorlalte

• avem asadar inca o perspectiva asupra determinantului, pe langa cea geometrica oferita intr-o sectiune anterioara

• revenind la sistemul dat vom stoca toate informatiile in matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

fiecare linie corespunde unei ecuatii din sistem

• dorim sa testam daca exista ecuatii nefolositoare (redundante) si incepem prin a testa daca toate cele trei ecuatii sunt independente informational

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

deci cel putin una poate fi dedusa din celelalte

• vom testa acum cate doua dintre ecuatii: alegem primele doua si formam determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +1 \neq 0$$

asadar primele doua linii sunt independente si a treia poate fi recuperata din informatiile condificate in aceastea doua

$\Longrightarrow$ intradevar se poate observa ca

$$L_3 = 3L_1 - L_2$$

• daca am fi testat ultimele doua linii obtineam ca acestea sunt independente si prima linie poate fi recuperata din ele

$\Longrightarrow$ de fapt oricare doua linii sunt independente si a treia va fi recuperata din informatiile codificate in aceastea.

rangul unei matrice= numarul maxim de linii (coloane) independente informational, prin urmare $rang\ A = 2$.

• folosind informatiile obtinute mai sus a treia ecuatie este redundanta si trebuie eliminata

$\Longrightarrow$ matricea cu determinant nenul de mai sus corespunde necunoscutelor x, y care vor fi numite necunoscute principale iar necunoscuta z ramasa va capata un rol secundar si va fi numita necunoscuta secundara

$\Longrightarrow$ pentru a evidentia acest lucru se renoteaza $z = \alpha$

$\Longrightarrow$ astfel din sistemul initial vom pastra doar sistemul redus care contine ecuatiile independente informational

$$\begin{cases} x - y + \alpha = 1 \\ 2x - y + 2\alpha = -1 \end{cases}$$

Remarca

Sistemul redus obtinut la primul pas poate fi intotdeauna rezolvat folosind regula lui Cramer. Din aceasta cauza putem sa denumim intreaga metoda ca fiind: **metoda lui Cramer generalizata**.

Pasul 2: *Inainte de a rezolva sistemul redus trebuie sa ne asiguram ca sistemul initial nu contine informatii contradictorii, adica este compatibil*

• in acest moment exista riscul ca ecuatia eliminata sa contrazica informatiile continute in primele doua ecuatii.

• pentru a testa compatibilitatea trebuie sa apelam la rodul muncii unor matematicieni

Kronecker-Capelli: sistemul este compatibil $\Longleftrightarrow$ $rang\ A = rang\ \bar{A}$

• acest rezultat poate fi exprimat mai elegant in modul urmator

Rouché: sistemul este compatibil $\Longleftrightarrow$ toti minorii caracteristici sunt zero

Minor caracteristic= determinant care se obtine din determinantul nenul gasit anterior (cel care decide rangul matricei A) prin lipirea de elemente din coloana termenilor liberi

• in cazul nostru matricea extinsa este

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

• matricea care trebuie bordata este evidentiata cu albastru iar elementele din care putem alege sunt cele in rosu care corespund termenilor liberi

• putem forma un singur minor caracteristic

$$m_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

• prin urmare sistemul este compatibil si putem trece la pasul urmator.

Pasul 3: *Rezolvarea sistemului redus gasit*

• sistemul redus gasit

$$\begin{cases} x - y + \alpha = 1 \\ 2x - y + 2\alpha = -1 \end{cases}$$

are solutiile $x = -\alpha - 2$, $y = -3$, $z = \alpha$ si prin urmare multimea solutiilor sistemului este $S = \{(-\alpha - 2, -3, \alpha) : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$\Longrightarrow$ conform celor spuse intr-o sectiune anterioara multimea solutiilor sistemului contine punctele $A(-\alpha-2,-3,\alpha)$ care se vor situa toate pe o dreapta, asadar cele trei plane descrise de ecuatiile sistemului se intersecteaza dupa o dreapta

$\Longrightarrow$ situatia corespunzatoare acestui sistem este descrisa de varianta **f)** desenata cateva pagini in urma

Rezolvarea sistemelor liniare voluminoase

• in practica studiul anumitor fenomene poate duce la sisteme cu foarte multe ecuatii si necunoscute

• pentru astfel de sisteme se recomanda o abordare diferita numita metoda lui Gauss (vezi sectiunea: Probleme rezolvate).

• in principiu Gauss si-a imaginat un caz particular in care sistemele sunt usor de rezolvat (tehnica obisnuita de problem-solving)

• acest caz corespunde situatiei in care matricea extinsa a sistemului are doar zerouri sub diagonala principala:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} * & * & * & * & \vdots & * \\ 0 & * & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \vdots & * \end{pmatrix}$$

• orice sistem poate fi adus la forma superior triunghiulara de mai sus printr-o combinatie de transformari elementare pe linie:

1. schimbarea a doua linii intre ele
2. inmultirea unei linii cu un numar real nenul
3. adunarea unei linii inmultite cu un numar la o alta linie

Probleme rezolvate

Problema 1

Rezolvati problema dietei, propusa in introducere

Solutie: Afisam din nou tabelul

Continut mg/100 grame			
Lapte	75 Ca	20 vit. A	210 Mg
Suc	50 Ca	10 vit. A	130 Mg
Broccoli	25 Ca	40 vit. A	170 Mg

Prima sarcina a nutrionistului este sa realizeze o dieta tinand cont de necesarul zilnic de Ca, Mg si vit. A. Notam cu x cantitatea de lapte raportata la 100 de grame. De exemplu 220 de grame va corespunde lui $x = 2,2$. Notam la fel y cantitatea de suc de portocale si cu z pe cea de broccoli, raportate la 100 de grame. Atunci obtinem urmatoarele ecuatii

Necesarul de calciu

$$105 = 75x + 50y + 25z$$

Necesarul de vitamina A

$$30 = 20x + 10y + 40z$$

Necesarul de magneziu

$$300 = 210x + 130y + 170z$$

Sistemul rezultat este

$$\begin{cases} 75x + 50y + 25z = 105 \\ 20x + 10y + 40z = 30 \\ 210x + 130y + 170z = 300 \end{cases}$$

care va livra urmatoarea formula de calcul a dietei

$$x = \frac{9}{5} - 7\alpha, \quad y = 10\alpha - \frac{3}{5} \text{ si } z = \alpha.$$

Pentru a tine cont de intoleranta la lactoza trebuie sa impunem conditia $x \leq 1$ (caci ne raportam la 100 de grame) care conduce la $\alpha \geq \frac{4}{35}$.

Problema 2

Rezolvati sistemul liniar de mai jos folosind metoda lui Gauss

$$\begin{cases} y + z - 2t + 3 = 0 \\ x + 2y - 2 - z = 0 \\ 2x + 4y + z - 3t = -2 \\ x - 4y - 7z - t = -19 \end{cases}$$

Solutie: Intai aducem sistemul la forma standard in care variabilele sunt plasate in stanga semnului " = " iar termenii liberi in dreapta

$$\begin{cases} y + z - 2t = -3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 4y + z - 3t = -2 \\ x - 4y - 7z - t = -19 \end{cases}$$

Vom inmagazina toate informatiile oferite de sistem in matricea extinsa a sistemului

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r}L_1\\L_2\\ \\ \\\end{array}\left[\begin{array}{cccccc}1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2\\0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3\\2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2\\1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19\end{array}\right]$$

Schimba L_1 cu L_2 pentru ca prima coloana sa aiba 1 pe diagonala principala a matricei

$$\begin{array}{r} \\ \\ -2L_1+L_3\rightarrow\\ -L_1+L_4\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{cccccc}1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2\\0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3\\0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6\\0 & -6 & -6 & -1 & \vdots & -21\end{array}\right]$$

Realizeaza operatii elementare pe linii astfel ca prima coloana sa contina doar 0-uri sub pivotul 1

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ 6L_2+L_4\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{cccccc}1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2\\0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3\\0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6\\0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -39\end{array}\right]$$

Pentru a doua coloana avem deja 1 pe diagonala principala si un 0 sub el, va trebui sa mai obtinem unul pe L_4

Motivul pentru care obtinem 1 pe diagonala principala este practic: vom aduna si scadea mai usor linia respectiva in dorinta de a forma 0-uri sub diagonala principala.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{3}L_3\rightarrow\\ -\frac{1}{13}L_4\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{cccccc}1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2\\0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3\\0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -2\\0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 3\end{array}\right]$$

In acest moment mai avem doar sa transformam cele doua elemente, 3 si -13, de pe diagonala (vezi deasupra) in 1-uri

In final obtinem sistemul

$$\begin{cases}x+2y-z=2\\y+z-2t=-3\\z-t=-2\\t=3\end{cases}$$

care rezolvat de jos in sus conduce la solutia unica $x=-1, y=2, z=1$ si $t=3$.

Remarca

Interpretarea rezultatelor reprezinta singura dificultate tehnica a acestei metode. Va trebui sa invatam cum sa "citim" informatiile obtinute cu ajutorul metodei Gauss.

Lipsa informatiilor sau incompatibilitate

Daca o linie intreaga este formata din 0-uri dar termenul liber este nenul atunci sistemul este incompatibil

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Aceasta forma scara contine o ultima linie care conduce la ecuatia $0 = 5$, contradictie, deci sistemul este incompatibil

Prezenta unei linii formata in totalitate din 0-uri inseamna o pierdere de informatii si conduce in general la necesitatea de a introduce variabile secundare pentru a fi in stare sa rezolvam sistemul.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Daca notam variabilele cu x, y, z, u, v, w observam ca din start avem insuficiente informatii si mai pierdem una in ultima linie.

Linia 3 ne livreaza informatia $w = \frac{1}{3}$ iar linia 2 inseamna $z + 2u = 0$ adica $z = -2u$ si apare necesitatea de a nota $u = \alpha$, asadar $z = -2\alpha$. Despre v nu avem in acest moment nicio informatie. Prima linie se traduce prin $x + 3y + 4u + 2v = 0$ si tot ce putem face este sa extragem pe x pentru a obtine

$$x = -3y - 4u - 2v = -3y - 4\alpha - 2v$$

apoi sa notam $v = \beta$ si $y = \gamma$. Deci in final

$$\begin{cases} x = -3\gamma - 4\alpha - 2\beta \\ y = \gamma \\ z = -2\alpha \\ u = \alpha \\ v = \beta \\ w = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Solutia exprimata mai sus poate varia ca forma. In ecuatia

$$x + 3y + 4u + 2v = 0$$

avem libertatea de a alege variabila pe care o vom extrage si implicit variabilele care vor capata un rol secundar. De exemplu $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}u - \frac{2}{3}v$ si se impune sa notam $x = \gamma, v = \beta$.

Problema 3

Rezolvati sistemul liniar de mai jos transformandu-l intr-o ecuatie matriciala

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + 3z = 2 - x \\ 3x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solutie: Sistemele liniare pot fi rescrise sub o forma bloc

$$A \cdot \mathbf{v} = c$$

unde $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ este vectorul coloana al necunoscutelor, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ este vectorul termenilor liberi si A este matricea sistemului. Daca matricea A este inversabila (deci trebuie sa fie si patrata) atunci putem rezolva sistemul in felul urmator

$$A \cdot \mathbf{v} = c \qquad \Longrightarrow \qquad v = A^{-1}c$$

De remarcat ca sistemul dat nu este scris in forma standard, in care fiecare ecuatie trebuie aiba afisate necunoscutele in ordine in partea stanga si termenul liber in dreapta egalului. Forma standard a sistemului dat este

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \tag{1}$$

si remarcam usor ca

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iar prin calcul putem testa egalitatea

$$A \cdot \mathbf{v} = c$$

Daca A va fi inversabila vom putea afla vectorul $\mathbf{v}$ si apoi implicit variabilele x, y, z. Se gaseste usor $det\ A = 20 \neq 0$ deci A este inversabila si vom parcurge cei trei pasi de aflare a inversei.

Pas 1: Aflam transpusa A^t (matricea formata rasturnand matricea data)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas 2: Aflam matricea adjuncta A^* inlocuind fiecare element al transpusei cu complementul sau algebric

$\Longrightarrow$ trebuie sa fim foarte atenti la modul in care construim acesti complementi algebrici

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & \boxed{3} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ primul element al transpusei este 1 de pe pozitia 11, complementul sau algebric se obtine dupa formula

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$\Longrightarrow$ adica se inmulteste $(-1)^{\text{pozitia elementului}}$ cu determinantul obtinut prin eliminarea liniei si coloanei pe care se afla 1

Analog pentru toate elementele ramase

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \boxed{3} & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ al doilea element al transpusei este tot 1 dar pe pozitia 12, complementul sau algebric se obtine dupa formula

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 = -2$$

In acest moment avem primele doua elemete ale matricei adjuncte

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Continuand calculele se obtine matricea adjuncta

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Pas 3: Se afla matricea inversa cu formula $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot A^*$
Imediat

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Se recomanda verificarea calculelor prin testarea identitatilor

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$$

Revenind la problema initiala , daca rearanjam informatiile din (1) sub forma $A \cdot \mathbf{v} = c$ atunci

$$\mathbf{v} = A^{-1}c \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

adica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix} \implies x = -\frac{3}{10},\ y = \frac{2}{10},\ z = \frac{7}{10}$$

Probleme propuse

A. Consolidare cunostinte

Problema A.1. *Adevarat sau fals ?*

- *Daca numarul de ecuatii ale unui sistem liniar depaseste numarul de necunoscute atunci sistemul este incompatibil.*
- *O ecuatie liniara cu doua sau mai multe necunoscute are o infinitate de solutii*
- *O matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rang 1 are liniile proportionale*
- *Daca matricea extinsa a sistemului $\bar{A}$ are mai multe coloane decat linii atunci sistemul este compatibil*
- *Un sistem omogen cu mai multe variabile decat ecuatii are o infinitate de solutii*

Problema A.2. *Daca matricea*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

roteste vectorii din plan cu un unghi de θ grade, ce puteti spune despre A^2 ? Argumentati.

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Sa se determine inversa matricei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema B.2. *Sa se determine rangul matricei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}$$

Problema B.3. *Rezolvati sistemele liniare:*

i)

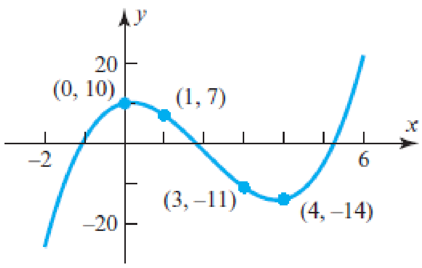
$$\begin{cases} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 = 9 \\ I_1 - 2I_3 + 7I_4 = 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 = 8 \\ -I_1 + 2I_2 + 2I_3 - I_4 = 1 \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\text{tg}\gamma = 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\text{tg}\gamma = 2 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \text{tg}\gamma = 9 \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$.

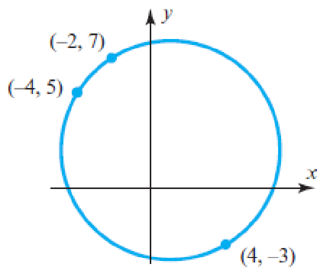
Problema B.4. *Aflati coeficientii* a, b, c, d *pentru care curba de ecuatie* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *traverseaza punctele afisate in figura de mai jos:*



Problema B.5. *Studiati compatibilitatea sistemului a carui matrice extinsa este:*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -6 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 2 & \vdots & -0.5 \\ 0 & 1.5 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & \vdots & 10 \end{pmatrix}$$

Problema B.6. *Intrucat orice cerc este unic determinat de trei puncte distincte ale sale, aflati ecuatia cercului afisat in figura de mai jos:*



Indicatie: Ecuatia generala a unui cerc este $x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$

Problema B.7. *Matricea de mai jos este matricea extinsa a unui sistem liniar:*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$$

Pentru ce valori ale lui a si b:

i) sistemul are o solutie unica ?

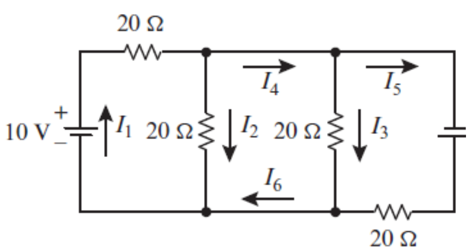
ii) sistemul este compatibil si are o necunoscuta secundara ?

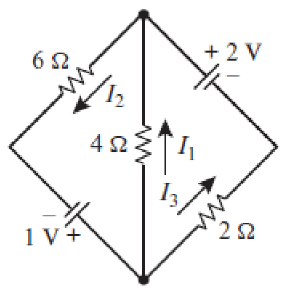
iii) sistemul este compatibil si are doua necunscute secundare ?

iv) sistemul este incompatibil ?

C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

Problema C.1. *Aflati intensitatile curentilor in circuitele de mai jos*





Bibliografie

[1] H. Anton, C. Rorres. *Elementary Linear Algebra. Applications Version* Ed. Wiley, 2014.

[2] D. Lay. *Linear Algebra and its Applications*, Ed. Addison-Wesley, 2012.