"In matematica nu intelegi lucrurile. Doar te obisnuiesti cu ele"

John von Neumann

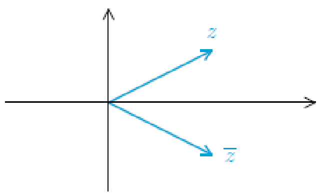
3

Functii si integrale complexe

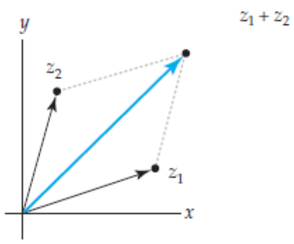
Geometria numerelor complexe

• numerele complexe pot fi reprezentate grafic printr-un vector orientat cu originea in originea reperului si varful in punctul $A(x, y)$, spunem ca z este afixul punctului $A(x, y)$

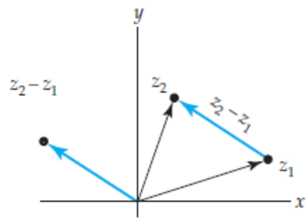
• imaginea conjugatului $\bar{z}$ se obtine prin simetrie fata de axa Ox



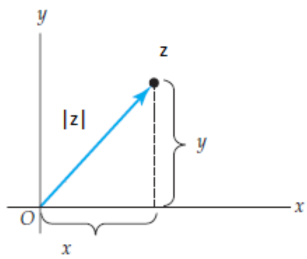
• imaginea sumei $z_1 + z_2$ se obtine prin regula paralelogramului



• imaginea diferentei $z_1 - z_2$ sa se obtine cu regula triunghiului apoi se aplica o translatie pana in originea reperului



• modulul $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ coincide cu norma euclidiana a vectorului prin care z este reprezentat

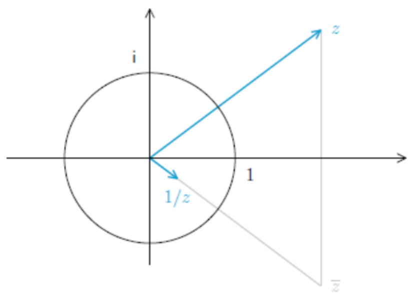


• daca $z \neq 0$, putem forma inversul sau folosind regula

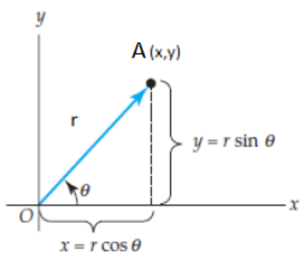
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

• inversul unui numar complex se reprezinta prin simetrie fata de axa Ox apoi inversiune fata de cercul unitate

• vectorul care reprezinta numarul complex $\frac{1}{z}$ are acelasi sens ca si $\bar{z}$ dar are lungimea $\frac{1}{r}$, cand z are lungimea r



• unghiul θ format de semiaxa pozitiva Ox si vectorul $\overrightarrow{OA}$, prin care numarul complex e reprezentat, se numeste argumentul numarului complex $z = x + iy$



• avem urmatoarea formula pentru a obtine acest unghi

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

• deoarece cos si sin sunt 2π-periodice, argumentul nu este unic determinat, ci $\theta \pm 2\pi, \theta \pm 4\pi$, etc, reprezinta alte argumente posibile ale lui z

• din aceasta cauza vom nota cu

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

multimea tuturor argumentelor

Reprezentarea polara a unui numar complex

Fiecare numar comlex poate fi reprezentat sub forma

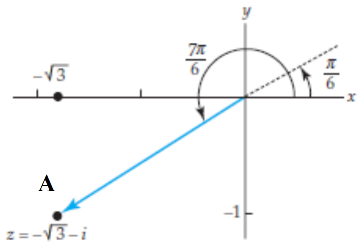
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

unde $r = |z|$ si θ se vor numi coordonatele polare ale lui z.

Exemplu instructiv

Cautam sa aflam reprezentarea trigonometrica a lui $z = -\sqrt{3} - i$. Deoarece $x = -\sqrt{3}$ si $y = -1$ obtinem

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$



Punctul $A(-\sqrt{3}, -1)$ (imaginea lui z) se afla in cadranul III din aceasta cauza ar trebui sa avem

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

O astfel de valoare se obtine pentru $k = 1$, deci $\theta = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \frac{7\pi}{6}$. Modulul sau este $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$. Prin urmare reprezentarea trigonometrica (polara) este

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

Argument principal

Vom nota unghiul θ pentru care are loc

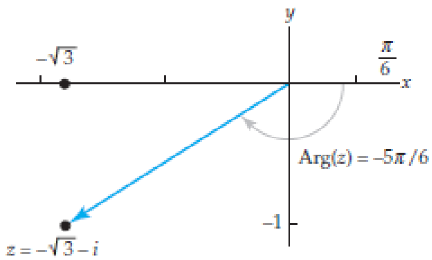
$$-\pi < \theta \leq \pi$$

prin $\mathrm{Arg}(z)$ si il vom numi argumentul principal a lui z. Are loc relatia

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Identificarea argumentului principal

In exemplul anterior argumentul ales a fost $\theta = \frac{7\pi}{6}$. Prin intermediul formulei $\mathrm{Arg}(z) = \theta \pm 2k\pi \in (-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{N}$, cautam sa obtinem argumentul principal. Prin urmare $\mathrm{Arg}(z) = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

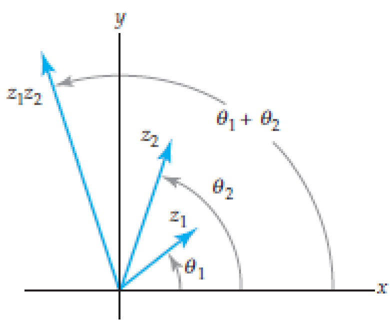


Asadar avem inca o posibila reprezentare trigonometrica

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

• in acest moment putem sa dam o semnificatie grafica produsului a doua numere complexe cu ajutorul reprezentarilor polare

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$



• putem astfel intelege ce se intampla la inmultirea lui z_2 cu z_1: numarul complex z_1 transforma vectorul de pozitie a lui z_2 rotindu-l cu un unghi $\theta_1 =$

$Arg(z)$ in jurul originii apoi scalandu-l incat sa aiba lungimea egala cu produsul lungimilor celor doi vectori

• o inmultire cu un numar complex este din punct de vedere geometric o rotatie si apoi o scalare

• o situatie asemanatoare are loc pentru catul lor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

• una dintre motivatiile formei trigonometrice este posibilitea de a exprima elegant puterea unui numar complex

Formula lui Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

• ca o consecinta se obtin formulele radacinilor de ordin n

Radacinile ecuatiei $w^n = z$

Pentru orice numar natural n ecuatia $w^n = z$ are exact n solutii, acestea fiind

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

unde $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Exemplu instructiv

Ecuatia $w^n = i$, $w \in \mathbb{C}$ va avea trei solutii. Se observa usor, reprezentand grafic numarul i, ca $|i| = 1$ si $\theta = \frac{\pi}{2}$,. Afisam mai jos cele trei radacini de ordinul 3 calculate conform formulei anterioare.

Pentru $k = 0$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Pentru $k = 1$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

si pentru $k = 2$

$$
\begin{aligned}
w_3 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} \\
&= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} \\
&= -i
\end{aligned}
$$

Radacinile de ordinul n ale unitatii $\varepsilon^n = 1$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ exista exact n radacini de ordinul n ale numarului $z = 1$, mai precis

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n} \\
\varepsilon_2 &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_k &= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_n &= 1
\end{aligned}
$$

• din punct de vedere grafic imaginile acestora sunt n puncte situate pe cercul de raza 1 si origine O (cercul unitate).

Functii complexe

• o functie cu valori complexe este o functie $f : D \to \mathbb{C}$ pentru care domeniul de valori este o submultime a lui $\mathbb{C}$
• atunci cand $D \subset \mathbb{C}$ spunem ca avem o functie complexa.
• pentru o functie complexa f de obicei scriem

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

unde $z = x + iy$, astfel u si v vor fi functii reale

Functii liniare

O functie complexa f se numeste liniara daca exista constantele complexe $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, astfel incat

$$f(z) = az + b, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Remarca

Pentru $a = 1$ se obtine ceea ce in geometrie numim translatie in directia indicata de b

$$f(z) = z + b, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Cand $a \in \mathbb{R}_+$ si $b = 0$ obtinem o scalare cu factorul de scalare a>0

$$f(z) = az, \quad z \in \mathbb{C}.$$

adica modulul lui z va fi marit $(a > 1)$ sau micsorat $(0 < a < 1)$.
Daca $a \in \mathbb{C}$ astfel ca $|a| = 1$ si $b = 0$ atunci obtinem o rotatie in jurul originii, in sens pozitiv trigonometric, de unghi $\theta = \mathrm{Arg}(a)$:

$$f(z) = (\cos\theta + i\sin\theta)z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Structura unei aplicatii liniare

Orice aplicatie liniara $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se descompune in

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

unde cele trei functii reprezinta

1) $f_1(z) = (\cos\theta + i\sin\theta)z$ o rotatie in jurul originii
2) $f_2(z) = |a|z$ o scalare
3) $f_3(z) = z + b$ o translatie de "vector" b

• in continuare vom incepe sa prezentam varianta complexa a unor functii elementare

• unele extinderi nu conduc la functii propriu-zise ci la ceea ce vom numi functii multivalente: adica functii care asociaza unui numar z mai multe posibile valori

Functia exponentiala complexa

Functia exponentiala $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este definita prin

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} := e^x \cos y + ie^x \sin y$$

• se observa usor ca de fapt $|e^z| = e^x$ si $\arg(z) = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Proprietatile functiei exponentiale

i) functia exponentiala este o functie $2\pi i$-periodica

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ii) $e^z e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C},$

iii) $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

iv) $(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Logaritmul complex

Functia multivalenta

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z) = \ln|z| + i \cdot (Arg(z) + 2k\pi)$$

se numeste logaritm complex $\mathrm{Ln} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ si reprezinta solutia ecuatiei

$$e^w = z.$$

Proprietatile logaritmului complex

Pentru orice $z, w \neq 0$ au loc

i) $\mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(w) = \mathrm{Ln}(zw)$

ii) $\mathrm{Ln} z - \mathrm{Ln}(w) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{w}\right)$

iii) $\mathrm{Ln}(z^n) = n \cdot \mathrm{Ln}(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$

• egalitatile de mai sus trebuie interpretate ca identitati intre multimi si nu intre numere complexe, caci functia multivalenta complexa returneaza ca valoare o multime de numere si nu un numar

"Functia" putere

Putem defini ridicarea la putere complexa cu ajutorul logaritmului complex

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln|z| + i \arg(z))}$$

unde $\alpha \in \mathbb{C}$ este o constanta complexa.

• functia putere definita mai sus este tot multivalenta deci nu e propriu-zis o functie

• insa expresia $e^{\alpha(\ln|z| + i\mathrm{Arg}(z))}$ numita valoare principala a functiei putere $f(z) = z^\alpha$ este o functie complexa de z, atribuind o unica valoare fiecarui numar z

Remarca

Proprietatile alegbrice obisnuite ale functiei putere nu se aplica variantei complexe. De exemplu, regula $z^\alpha \cdot w^\alpha = (zw)^\alpha$ nu e valabila pentru orice $z, w \in \mathbb{C}^*$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tinand cont de definitia functiei multivalente putere obtinem

$$\begin{aligned}(-1)^i \cdot (-1)^i =& e^{i(0 + i\arg(-1))} e^{i(0 + i\arg(-1)))} \\ =& e^{-(\pi + 2k\pi)} e^{-(\pi + 2k\pi)} = \frac{1}{e^{2\pi + 4k\pi}}\end{aligned}$$

dar si

$$[(-1) \cdot (-1)]^i = 1^i = e^{i(0 + i\arg(1))} = e^{-(0 + 2k\pi)} = \frac{1}{e^{2k\pi}}$$

Functiile trigonometrice si hiperbolice complexe

Urmatoarele functii sunt extinderi ale functiilor reale corespunzatoare

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

• aceste functii sunt continue si derivabile pe $\mathbb{C}$

Proprietati elementare

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$

i) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ si $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

ii) $\cosh(iz) = \cos z$ si $\sinh(iz) = i \sin z$

iii) in $\mathbb{C}$ au loc, la fel ca in $\mathbb{R}$, regulile

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

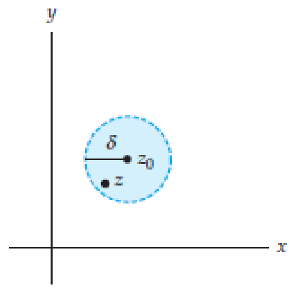
Complex versus real

• in planul complex distanta se calculeaza prin

$$d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

• tinand cont de aceasta putem sa vizualizam o vecinatate deschisa in jurul lui z_0 ca fiind un disc centrat in z_0 si de raza δ, adica multimea

$$D(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$$



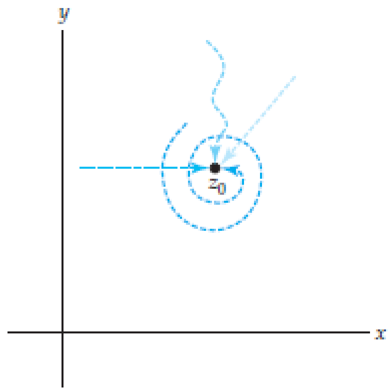
Siruri convergente

Fie $(z_n)_n$ un sir de numere complexe si $z \in \mathbb{C}$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente

$$z_n \to z, \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z) \text{ si } \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$$

• in $\mathbb{C}$ o functie $f : D \to \mathbb{C}$ are limita L in punctul z_0 daca si numai daca pentru toate sirurile $(z_n)_n$, care converg la z_0, sirul $f(z_n)$ converge la L.

• diferenta dintre cazul complex si cel real este ca in $\mathbb{C}$ sirurile nu se apropie de limita doar dintr-o directie ci se pot apropia dintr-o infinitate de directii sau pe o infinitate de traiectorii



• in cazul sirurilor reale apropierea de limita se face doar pe o traiectorie orizontala (axa Ox)

• in complex convergenta este mai greu de realizat dupa cum arata urmatorul exemplu

Ilustrare

Limita $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{2z}$ nu exista !

Consideram un sir $(z_n)_n$, care converge pe directia axei Ox la 0, de exemplu $z_n = \frac{1}{n}$. Atunci vom avea

$$f(z_n) = \frac{\overline{z_n}}{2z_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Dar pentru un alt sir $(w_n)_n$, care converge pe directia axei Oy la 0, de exemplu $w_n = \frac{1}{n}i$, va rezulta

$$f(w_n) = \frac{\overline{w_n}}{2w_n} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{2i}{n}} = -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}.$$

Deci o contradictie cu criteriul lui Heine.

Limita unei functii complexe

Fie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ si $L = a + ib$, atunci

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

daca si numai daca

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \quad \text{si} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b.$$

Exemplu instructiv

Calculam limita $\lim_{z\to 1+i}(z^2+1)$. Fie $z = x + iy$, ca de obicei. Atunci

$$f(z) = z^2 + i = (x+iy)^2 + i = x^2 - y^2 + (2xy+1)i$$

Pentru a aplica ultima teorema, consideram $u(x,y) = x^2 - y^2$ si $v(x,y) = 2xy + 1$. Aici $z_0 = 1 + i$, deci $x_0 = 1$ si $y_0 = 1$.

Avem

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 - y^2) = 0$$

si

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (2xy+1) = 3$$

prin urmare limita exista si este $L = \lim_{z\to 1+i}(z^2+1) = 0 + 3i$.

Continuitatea functiilor complexe

Fie $D \subset \mathbb{C}$ o vecinatate deschisa a lui $z_0 = x_0 + iy_0$. O functie $f : D \to \mathbb{C}$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

este continua in z_0, daca functiile reale u, v sunt continue in (x_0, y_0).

• functia exponentiala $f(z) = e^z$ este continua pe $\mathbb{C}$, caci $u(x,y) = e^x \cos y$ si $v(x,y) = e^x \sin y$ sunt ambele produse de functii reale continue

Derivabilitatea functiilor complexe

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu. O functie $f : D \to \mathbb{C}$ se numeste derivabila complex in $z_0 \in D$, daca exista limita

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Numarul complex $f'(z_0)$ se numeste derivata lui f in z_0.

• o functie se numeste olomorfa in $z_0 \in \mathbb{C}$ cand este definita intr-o vecinatate deschisa a acestuia $D(z_0, \delta) \subset \mathbb{C}$ si este derivabila complex in toate punctele vecinatatii.

• regulile de derivare ale functiilor derivabile complex sunt identice cu cele din cazul real, singura problema care apare este cea a derivabilitatii intr-un punct dat.

Exemplu instructiv

Functia $f(z) = x + 4iy$ nu este derivabila complex in niciun punct z_0 !

Sa consideram $z_0 = x_0 + iy_0$ si sa formam limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x - x_0) + i(4y - 4y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Daca ne apropiem de (x_0, y_0) vertical, adica prin sirul (x_0, y_n) cu $y_n \to y_0$ obtinem

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x - x_0) + i(4y - 4y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_0 - x_0) + i(4y_n - 4y_0)}{(x_0 - x_0) + i(y_n - y_0)} = 4$$

Daca ne apropiem de (x_0, y_0) orizontal, adica prin intermediul unui sir (x_n, y_0) cu $x_n \to x_0$ obtinem

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x - x_0) + i(4y - 4y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - x_0) + i(4y_0 - 4y_0)}{(x_n - x_0) + i(y_0 - y_0)} = 1$$

• derivabilitatea complexa este ceva mai pretentioasa decat simpla derivabilitate a componentelor u si v dupa cum arata teorema **Looman-Menchoff**

Derivabilitate complexa vs. derivabilitate reala

Fie functia $f : D \to \mathbb{C}$ definita prin $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, atunci cand $z = x + iy$ si sunt indeplinite urmatoarele conditii

i) f este continua intr-o vecinatate a lui $z_0 \in D$.

ii) derivatele partiale $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ si $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ exista intr-o vecinatate a lui z_0.

iii) functiile u, v satisfac intr-o vecinatate a lui z_0 conditiile Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Atunci functia f este derivabila complex in z_0 (chiar olomorfa).

Exemplu

Se argumenteaza usor olomorfia functiei $f(z) = \cos z$ intr-un punct oarecare notat $z_0 = x_0 + iy_0$, prin utilizarea definitiei functiei complexe cosinus

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

si aflarea partii sale reale $u = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x$ si imaginare $v = -\frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$.

Integrarea functiilor complexe

• integrala Riemann a unei functii cu valori complexe se defineste in mod natural prin

Integrala Riemann

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ o functie continua. Definim integrala lui f pe $[a,b]$ prin

$$\int_a^b f(t)\ dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$$

Exemplu

$$\int_0^\pi \cos t + i \cdot \sin t\ dt = \int_0^\pi \cos t\ dt + i \cdot \int_0^\pi \sin t\ dt = \sin t \Big|_0^\pi + i \left(- \cos t \Big|_0^\pi \right)$$
$$= 0 + i \cdot 2 = 2i.$$

• pentru a defini insa integrala unor functii complexe este nevoie de un studiu amanuntit al curbelor si al unor clase de multimi in planul complex.

Curbe in planul complex

Prin curba in planul complex vom intelege o aplicatie continua

$$c : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad a < b,$$

intre un interval compact si multimea numerelor complexe. Orice curba va avea o reprezentare

$$c(t) = x(t) + i \cdot y(t), \quad t \in [a,b]$$

O curba se numeste neteda daca este derivabila cu derivata continua.

Curbe elementare

Segmente: fie numerele $z_1 = x_1 + iy_1$ si $z_2 = x_2 + iy_2$, segmentul dintre punctele $A(x_1, y_1)$ si $B(x_2, y_2)$ reprezinta de fapt o curba $c : [0,1] \to \mathbb{C}$

$$c(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = x(t) + i \cdot y(t), \quad t \in [0,1],$$

unde $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ si $y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1)$.

Cercul: un cerc de raza R si centru $O(x_0, y_0)$ poate fi interpretat ca fiind o curba $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$c(t) = (x_0 + R\cos t) + i \cdot (y_0 + R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

• un ***semicerc*** se obtine restrictionand valorile posbile ale lui t la un subinterval al lui $[0, 2\pi]$, corespunzator semicercului

• in practica majoritatea curbelor prezinta unele mici ”imperfectiuni”, intr-un numar finit de puncte

Curbe netede pe portiuni

O curba se numeste neteda pe portiuni daca exista o partitie

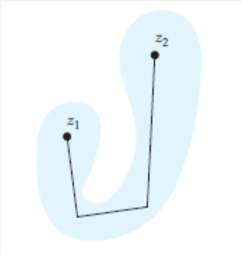
$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

astfel ca c sa fie neteda pe fiecare interval (a_k, a_{k+1}), $0 \le k < n-1$.

• sunt trei tipuri de multimi care intervin frecvent in teoria integrarii functiilor complexe, D fiind de obicei domeniul de definitie al unei functii care trebuie integrata

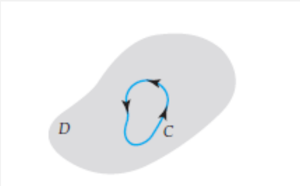
Domeniu

Multimea $D \subset \mathbb{C}$ se numeste domeniu daca este deschisa si pentru orice $z_1, z_2 \in D$ exista o curba $c \subset D$ care uneste z_1 cu z_2.



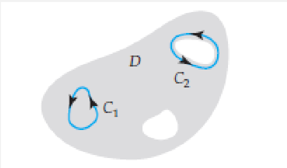
Domeniu simplu conex

D este un domeniu si curba inchisa γ aflata in D poate fi contractata pana devine un punct al multimii respective. (nu are gauri)



Domeniu multiplu conex

Un domeniu care nu este simplu conex se numeste multiplu conex.(are gauri)



Integrala in planul complex

Fie $D \in \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o functie continua si $c : [a, b] \to D$ o curba neteda. Atunci definim integrala curbilinie complexa a lui f pe curba c prin

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(c(t)) \cdot c'(t)dt$$

Cand c este doar neteda pe portiuni definim

$$\int_c f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z)dz.$$

pentru partitia corespunzatoare.

Exemplu

Calculam

$$\int_c \frac{1}{z} dz,$$

unde c este cercul unitate.

Pentru inceput curba c are reprezentarea parametrica

$$c(t) = \cos t + i \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Conform definitiei

$$\begin{aligned}
\int_c \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (\cos t + i \sin t)' dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos t - i \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t + i \cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t)dt = \int_0^{2\pi} i \; dt = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Proprietati elementare ale integralelor complexe

i) $\displaystyle\int_c \alpha f(z) + \beta f(z)dz = \alpha \int_c f(z)dz + \beta \int_c g(z)dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

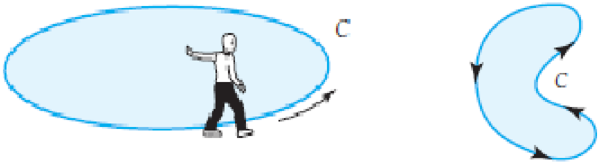
ii) $\displaystyle\int_{c_1 \cup c_2} f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz,$

Remarca

- Integrala complexa nu depinde de parametrizarea curbei.
- Integrala complexa curbilinie depinde de orientarea curbei. Daca notam

prin c^{-} curba c data cu orientarea inversa, atunci

$$\int_{c^{-}} f(z)dz = -\int_{c} f(z)dz.$$



Orientare pozitiva

Recuperarea unui rezultat clasic

Fie $D \subset \mathbb{C}$ deschisa si simplu conexa si $f : D \to \mathbb{C}$ continua. O primitiva a lui f este o functie olomorfa $F : D \to \mathbb{C}$ pentru care $F' = f$. Atunci pentru orice curba neteda pe portiuni c aflata in D are loc

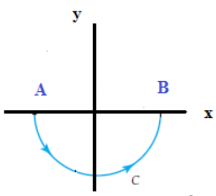
$$\int_{c} f(z)dz = F(c(b)) - F(c(a)).$$

Exemplu instructiv

Functia $f(z) = z$ are primitiva

$$F(z) = \frac{z^2}{2}.$$

Fie acum c semicercul cercului unitate (considerat cu orientarea pozitiva) situat intre punctele $A(-1, 0)$ si $B(1, 0)$. Acest semicerc, considerat ca fiind o curba, admite parametrizarea $c(t) = \cos t + i \sin t$ pentru $t \in [\pi, 2\pi]$, deoarece $z_A = -1 + 0i = \cos \pi + i \sin \pi$ si $z_B = 1 + 0 \cdot i = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$.



$$\int_{c} zdz = F\left(c\left(2\pi\right)\right) - F(c(\pi)) = (1 + i \cdot 0)^2 - (-1 + i \cdot 0)^2 = 1 - 1 = 0$$

Pe de alta parte

$$\begin{aligned}\int_{c} z\ dz &= \int_{\pi}^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(\cos t + i \sin t)' dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt\end{aligned}$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(2t) + i\sin(2t)dt = \left.\frac{\cos(2t)}{2}\right|_{\pi}^{2\pi} - i\left.\frac{\cos(2t)}{2}\right|_{\pi}^{2\pi} = 0$$

• in foarte multe probleme este util sa cunoastem dezvoltarea in serie Taylor in jurul lui 0, care in unele cazuri poate fi folosita pentru a obtine dezvoltarea in jurul unui punct oarecare z_0

Dezvoltari in serii de puteri in jurul lui 0

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \dots z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \\
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\
\sinh z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cosh z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Dezvoltari in jurul unui punct oarecare z_0

Uneori putem folosi formulele dezvoltarilor in serii de puteri in jurul lui 0 pentru a recupera o dezvoltare in jurul unui punct oarecare z_0. Spre exemplu pentru a afla dezvoltarea lui $\sin z$ in jurul lui z_0 inlocuim $z - z_0$ in formula dezvoltarii in jurul lui 0

$$\sin z \cdot \cos z_0 - \sin z_0 \cdot \cos z = \sin(z - z_0) = (z - z_0) - \frac{(z-z_0)^3}{3!} + \frac{(z-z_0)^5}{5!} - \dots$$

Prin urmare avem nevoie de acelasi trick pentru $\cos z$

$$\cos z \cdot \cos z_0 + \sin z \cdot \sin z_0 = \cos(z - z_0) = 1 - \frac{(z-z_0)^2}{2!} + \frac{(z-z_0)^4}{4!} - \dots$$

Din cele doua relatii obtinem atat dezvoltarea lui $\sin z$ cat si a lui $\cos z$, interpretandu-le ca pe un sistem liniar cu necunoscutele $\sin z, \cos z$.

• formula clasica din cazul real este valida si in cazul complex

Serii de puteri in jurul unui z_0 oarecare

In general pentru functii olomorfe are loc formula de dezvoltare in serie Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

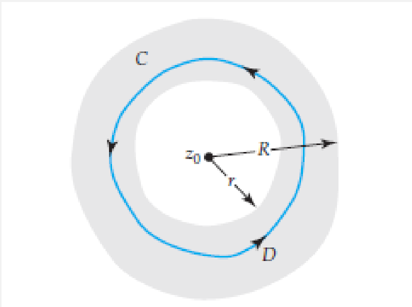
in jurul lui $z_0 \in \mathbb{C}$.

• in contextul functiilor complexe este mult mai utila notiunea urmatoare

Dezvoltarea in serie Laurent

Fie f o functie olomorfa in coroana circulara $r < |z - z_0| < R$. Atunci ea poate fi dezvoltata in serie Laurent in punctele acestei multimi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n.$$



Coeficientii dezvoltarii sunt dati prin

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

unde c este o curba inchisa simpla, pozitiv orientata, care este situata in totalitate in $r < |z - z_0| < R$ si contine punctul z_0 in interiorul sau.

Exemplu

Consideram functia $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ pe care dorim sa o dezvoltam in serie Laurent in jurul lui $z_0 = 0$ si putem considera z ca facand parte din coroana circulara $0 < |z| < \infty$.

Cu ajutorul dezvoltarii in serie Taylor

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

obtinem dezvoltarea in serie Laurent in jurul lui $z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \ldots$$

deci $a_n = 0$ pentru $n < -1$, $a_{-1} = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3!}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{5!}$ si asa mai departe.

Singularitati izolate

Fie $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ si $F : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Atunci numim z_0 singularitate izolata a lui f.

• in cele ce urmeaza vom dori sa clasificam singularitatile izolate ale unei functii

Caracterizarea singularitatilor prin serii Laurent

Functia f poseda in $z_0 \in \mathbb{C}$ o singularitate izolata. Atunci numim z_0

i) o singularitate aparenta a lui f, daca in dezvoltarea in serie Laurent in jurul lui z_0 toti a_n cu $n < 0$ sunt nuli

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

ii) un pol de ordinul m al lui f, daca in dezvoltarea in serie Laurent $a_n = 0$ pentru $n < -m$

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

iii) o singularitate esentiala, cand dezvoltarea Laurent admite o infinitate de termeni cu exponent negativ

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

• foarte utila in aplicatii va fi urmatoarea teorema, intrucat elimina posibile erori de rationament

• dupa cum se va vedea in exemplul care urmeaza, ordinul polilor nu este dat intotdeauna de exponentul numitorului

Teorema de caracterizare a polilor

Functia f are in z_0 un pol de ordin m daca si numai daca exista o functie g olomorfa in z_0 astfel ca $g(z_0) \neq 0$ iar intr-o vecinatate a lui z_0 avem

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

• daca functia f are in z_0 un pol, atunci $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

Aplicare

Functia $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-i)^2}$ are in $z_0 = i$ un pol de ordin 2, verificam usor ca $\cos(i) \neq 0$ iar $\cos z$ este olomorfa in orice punct din $\mathbb{C}$.

In schimb functia $f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{\sin z}{(z-0)^2}$ nu are un pol de ordin 2 in $z_0 = 0$ caci $\sin 0 = 0$. Folosind dezvoltari in serie se poate argumenta ca ordinul polului este $m = 1$

Teorema de caracterizare a singularitatilor aparente

Singularitatea z_0 este o singularitate aparenta daca si numai daca limita $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ exista in $\mathbb{C}$.

Exemplu fundamental

Functia $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ are o singularitate aparenta in $z_0 = 0$. Daca incercam sa aplicam teorema de caracterizare a polilor observam ca $\sin 0 = 0$ deci nu se poate aplica. In schimb putem sa dezvoltam in serie Laurent in jurul lui z_0 si sau sa folosim deja mentionata dezvoltare

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

pentru a vedea ca

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

Prin urmare nu avem termeni cu exponent negativ deci z_0 este singularitate aparenta conform definitiei.

In acelasi timp putem observa ca

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

si aplicand teorema de caracterizare ajungem la acelasi rezultat.

Teorema de caracterizare a singularitatilor esentiale

Singularitatea z_0 este o singularitate esentiala daca si numai daca limita $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ nu exista iar $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| \neq \infty$.

Exemplu

Functia $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ are in $z_0 = 0$ o singularitate esentiala.

Metoda 1: Limita $\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ nu exista si $\lim_{z \to 0} |e^{\frac{1}{z}}| \neq \infty$.

Pentru prima limita alegem $z_n = \frac{1}{n} \to 0$ si $w_n = -\frac{1}{n} \to 0$. Atunci

$f(z_n) = e^n$ si $f(w_n) = e^{-n}$ dar

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(w_n)$$

Pentru a argumenta relatia $\lim_{z\to 0} |f(z)| \neq \infty$ putem considera aceleasi siruri. Atunci $|e^z| = e^x$, pentru $z = x + iy \in \mathbb{C}$ si prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty \neq 0 = \lim_{n\to\infty} |f(w_n)|.$$

Metoda 2: Pe de alta parte putem sa dezvoltam in serie Laurent functia $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ in jurul punctului $z_0 = 0$. Pornim din nou de la dezvoltarea in serie Taylor, de data aceasta a lui e^z in $z_0 = 0$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

De unde rezulta

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Aceasta ultima identitate arata ca dezvoltarea Laurent a lui f in jurul lui $z_0 = 0$ are o infinitate de termeni cu exponent negativ.

Reziduul unei functii

Fie $D \subset \mathbb{C}$ deschisa, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa si $\varepsilon > 0$, astfel ca $D(z_0, \varepsilon) \subset D$. Atunci numim

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z)dz$$

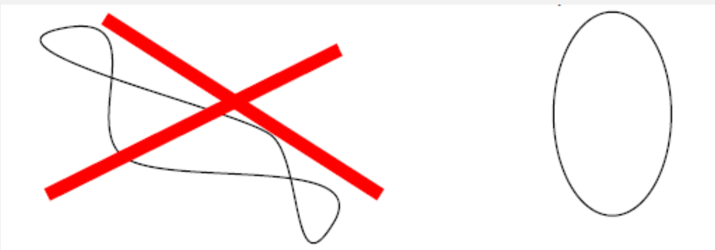
reziduul lui f in z_0.

Remarca

Reziduul nu depinde de alegerea razei ε.
Punctul z_0 nu trebuie sa fie in mod obligatoriu o singularitate dar cand nu este singularitate reziduul va fi 0.

Curba inchisa simpla

O curba inchisa $c : [a, b] \to \mathbb{C}$ se numeste simpla, atunci cand pe intervalul $[a, b)$ este injectiva. Din punct de vedere geometric asta inseamna ca nu are puncte de auto-intersectii.



• in unele exemple prezentate mai incolo vom vedea cum trebuie sa integram pe o curba care are auto-intersectii (nu este simpla)

• principala dificultate tehnica a integrarii pe curbe nesimple consta in schimbarea orientarii pe diferite portiuni ale curbei

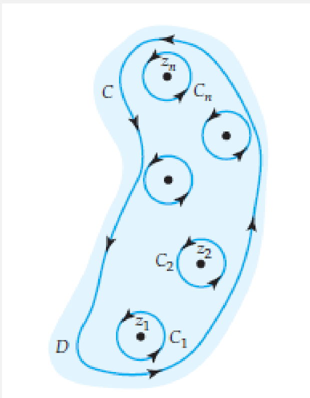
• urmatorul rezultat reprezinta cea mai utila unealta disponibila pe piata in efortul de integrare a functiilor complexe

Teorema reziduurilor

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puncte distincte in D si functia $f : D \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ olomorfa.

Atunci pentru orice curba neteda pe portiuni, inchisa simpla si pozitiv orientata c, care se afla in totalitate in D si contine in interior punctele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ avem relatia

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$



Remarca

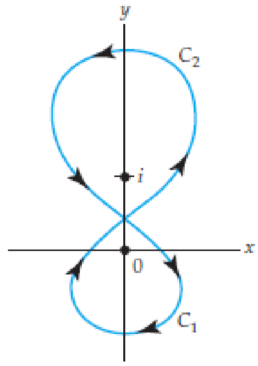
Pentru o curba c orientata negativ se obtine

$$\int_c f(z)dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Manevrarea curbelor nesimple

Vom evalua urmatoarea integrala

$$\int_c \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz$$



unde c este curba din desenul alaturat. Se observa ca nu este simpla.

Ideea este sa o descompunem in curbe simple, mai precis ca $c = c_1 \cup c_2$, unde curba c_2 va fi orientata pozitiv iar c_1 va fi orientata negativ. Se observa cum se schimba orientarea pe diverse portiuni ale curbei date c.

Functia $f(z) = \dfrac{z^3+3}{z(z-i)^2}$ are o singularitate izolata in interiorul lui c_1 in punctul $z_1 = 0$ si alta in interiorul lui c_2 in punctul $z_2 = i$.

Pentru inceput avem

$$\int_{c_1 \cup c_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = \int_{c_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz + \int_{c_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz$$

Apoi conform teoremei reziduurilor

$$\int_{c_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}, 0\right)$$

si

$$\int_{c_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}, i\right)$$

livreaza valoarea integralei date.

Remarca

Ca o concluzie, prezenta restrictiei de a avea doar curbe simple in teorema reziduurilor este doar cu scopul de a simplifica formula teoremei, intrucat o curba nesimpla se manevreaza la fel de usor.

• din moment ce reziduurile devin instrumente importante in calculul integralelor avem nevoie de metode mai rapide de evaluare a acestora

Calculul reziduurilor

i) Daca functia olomorfa f are in punctul z_0 un pol de ordin m, $m \geq 1$, atunci

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

Pentru un pol simplu ($m = 1$) avem

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

ii) In general

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1},$$

unde a_{-1} este coeficientul lui $\dfrac{1}{z-z_0}$ in dezvoltarea Laurent a lui f in jurul punctului z_0.

Formulele integrale ale lui Cauchy

$\Longrightarrow$ Fie G un domeniu simplu conex si $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Atunci pentru orice curba inchisa neteda pe portiuni c din D are loc

$$\int_c f(z) dz = 0,$$

deoarece $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0$ pentru o functie olomorfa in z_0.

$\Longrightarrow$ Fie G un domeniu si $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Atunci pentru o multime $D(z_0, \varepsilon) \subset\subset D$

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

deoarece z_0 este un pol pentru functia din interiorul integralei si

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, z_0\right) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^n}{dz^n} \left((z-z_0)^{n+1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

pentru orice functie olomorfa f.

Exemplu instructiv

In ultimul exemplu ambele singularitati sunt poli, deoarece

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} = \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}$$

si notand $g(z) = \frac{z^3+3}{(z-i)^2}$ avem scrierea $f(z) = \frac{g(z)}{z}$, iar g este olomorfa in $z_1 = 0$ si $g(0) \neq 0$.

Din teorema de carcterizare a polilor rezulta ca f are in $z_1 = 0$ un pol simplu. Din aceasta cauza

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}, 0\right) = \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{z^3+3}{z(z-i)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z^3+3}{(z-i)^2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Prin urmare

$$(\star) \qquad \int_{c_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = -2\pi i\cdot(-3) = 6\pi i.$$

Pe de alta parte

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} = \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}$$

si $h(z) = \frac{z^3+3}{z}$ este olomorfa si are proprietatea $h(i) \neq 0$. Asadar f are in $z_2 = i$ un pol de ordinul doi. Deci

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}, i\right) &= \lim_{z_0\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\right)\\ &= \lim_{z_0\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^3+3}{z}\right) = \lim_{z_0\to i}\frac{3z^2\cdot z-(z^3+3)}{z^2}\\ &= \frac{-2i-3}{-1} = 2i+3.\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad (\star\star) \qquad \int_{c_2}\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = 2\pi i\cdot(2i+3) = -4\pi+6\pi i$$

si in concluzie

$$\int_c \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = 6\pi i + -4\pi + 6\pi i = -4\pi + 12\pi i.$$

- in teorema reziduurilor apar doar singularitatile localizate in interiorul curbei pe care integram
- singularitatilor izolate de tip poli simpli le este permis sa fie localizate si pe curba, si pentru astfel de puncte geometria curbei devine importanta, in special prezenta "colturilor" in punctele respective
- prezenta altor tipuri de singularitati pe curba este in general problematica

Teorema semireziduurilor

Fie $D \subset D$ un domeniu simplu conex si c o curba simpla inchisa, neteda pe portiuni in domeniul D. Consideram o functie f care admite in interiorul curbei c un numar finit de singularitati izolate $z_1, z_2, \dots, z_n$ si un numar finit de poli simpli $w_1, w_2, \dots, w_p$ situati pe curba c astfel ca

$$f : D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, w_1, w_2, \dots, w_p\} \to \mathbb{C}$$

este olomorfa. Atunci

i) daca c admite o tangenta unica in $w_1, w_2, \dots w_p$ atunci

$$\int_c f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Rez}(f, z_k) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \text{Rez}(f, w_j)$$

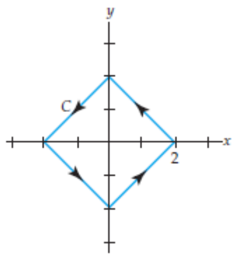
ii) daca α_j este unghiul dintre semitangentele in w_j la c

$$\int_c f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Rez}(f, z_k) + i \sum_{j=1}^{p} (\pi - \alpha_j)\text{Rez}(f, w_j)$$

Exemplu

Vom calcula integrala

$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)} dz,$$



unde c este curba alaturata. Se observa usor ca cele doua singularitati ale integrandului sunt $z_1 = 0$ si $z_2 = 2$, ambele fiind poli simpli, iar ultima este situata pe curba.

In punctul z_2 curba nu admite o tangenta unica iar unghiul format de semitangente va fi $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Conform teoremei semireziduurilor avem

$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)} dz = 2\pi i \text{Rez}(f, 0) + i(\pi - \frac{\pi}{2})\text{Rez}(f, 2)$$

Pentru poli simpli avem formulele

$$\text{Rez}(f, 0) = \lim_{z \to 0} (z - 0) \frac{e^z}{z(z-2)} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{Rez}(f, 2) = \lim_{z \to 0} (z - 2) \frac{e^z}{z(z-2)} = \frac{e^2}{2}.$$

In concluzie
$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)}dz = -\pi i + i\frac{\pi}{2}\frac{e^2}{2}$$

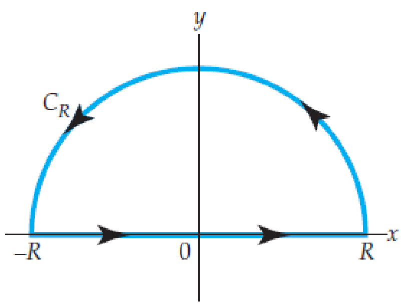
Aplicatii ale teoremei reziduurilor

Problema 1

Calculati integrala
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\ dx$$

Solutie: Integralele de forma
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$$
chiar si atunci cand integrala in sens generalizat este divergenta, dar exista valoarea principala Cauchy, pot fi evaluate uneori folosind integralele complexe.

Ideea principala este sa se construiasca o curba c asemeni celei din imagine, formata din segmentul $[-R, R]$ si semicercul C_R provenit dintr-un cerc de raza R si centru in originea reperului.



Informatia cheie este urmatoarea
$$\int_c f(z)\ dz = \int_{C_R} f(z)\ dz + \int_{[-R,R]} f(z)\ dz \qquad (\star)$$
insa ultima integrala este $\displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\ dx$ iar penultima va converge la 0 atunci cand $R \to \infty$, in anumite conditii.

Mai precis daca pentru z aflat pe cercul de raza R si anume $z = Re^{i\theta}$ exista doua constante M si $k > 1$ astfel incat
$$|f(z)| \le \frac{M}{R^k} \qquad \forall\ z = Re^{i\theta},$$

atunci

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ dz = 0$$

caci

$$\left|\int_{C_R} f(z)\ dz\right| \leq \int_0^\pi |f(\gamma(t))|\cdot|\dot\gamma(t)|\ dt \leq \int_0^\pi \frac{M}{R^k}\cdot|\dot\gamma(t)|\ dt = \frac{M}{R^k}\cdot\pi R,$$

unde $\gamma(t) = R(\cos t + i\sin t)$, $t\in[0,\pi]$ este ecuatia parametrica a semicercului. Am folosit faptul ca lungimea unei curbe (semicerc aici) se calculeaza cu formula

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\ dt.$$

Trecand la limita in relatia $(\star)$ se obtine

$$\lim_{R\to\infty}\int_c f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ dz + \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(z)\ dz$$

adica

$$2\pi i\sum_{i=1}^k Rez(f,z_i) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$$

caci prima integrala nu este influentata decat de reziduurile functiei in singularitatile sale. Am presupus ca f are exact k singularitati izolate.

Pentru integrala data

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+1}\ dx$$

intai trebuie argumentat ca este convergenta (descompunand-o intai in doua integrale, pe $(-\infty,0)$ si $(0,\infty)$, si folosind un criteriu de convergenta).

Apoi, folosind rezulatele de mai sus putem calcula valoarea efectiva a integralei introducand functia complexa asociata $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ care va satisface inegalitatea necesara pe $z = Re^{i\theta}$

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{(Re^{i\theta})^4+1}\right| = \frac{1}{|R^4e^{4i\theta}+1|} \leq \frac{1}{|R^4e^{4i\theta}|-1} \leq \frac{1}{R^4-1} \leq \frac{2}{R^4}$$

asadar putem alege $M = 2$ si $k = 4$. Am folosit mai sus inegalitatea triunghiului

$$|z|-|w| \leq |z+w| \leq |z|+|w|,\quad \forall z,w\in\mathbb{C}.$$

Aceasta functie admite ca singularitati izolate toate cele patru solutii ale ecuatiei $z^4+1=0$. Pentru un R suficient de mare in interiorul curbei c nu se afla decat

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$$

si

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$$

deoarece celelalte doua se afla localizate sub axa Ox.

Prin urmare conform teoriei prezentate mai sus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\ dx = 2\pi i \cdot Rez(f, z_0) + 2\pi i \cdot Rez(f, z_1)$$

Intrucat $z^4+1 = (z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ unde $z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$ si $z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$ se argumenteaza usor ca z_0 si z_1 sunt poli de ordin 1, folosind teorema de caracterizare a polilor. De exemplu

$$f(z) = \frac{\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}}{(z-z_0)^1}$$

si $g(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$ nu se anuleaza in z_0.

Aplicand formula de calcul a reziduurilor pentru poli simpli se obtine

$$Rez(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{1}{z^4+1} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - i\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$Rez(f, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} - i\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

si apoi concluzia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\ dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Problema 2

Calculati integrala

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\ d\theta$$

Solutie: Integralele de tipul

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\ d\theta$$

pot fi reduse la integrale curbilinii complexe prin schimbarea de variabila

$$z = e^{i\theta}$$

care va transforma integrala data intr-o integrala pe cercul unitate $|z| = 1$.

Pentru a efectua schimbarea de variabila amintita sa remarcam urmatoarele informatii utile

$$dz = ie^{i\theta}\ d\theta$$

si functiile $\cos\theta$ si $\sin\theta$, pentru θ real, pot fi exprimate prin

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{si} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Aceste relatii vor conduce la urmatoarele relatii, extrem de utile in realizarea schimbarii de variabila necesara

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \quad \text{si} \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

In acest fel, integrala data devine

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\, d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(2+\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right)} \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\, dz$$

Radacinile numitorului sunt $z_1 = -2-\sqrt{3}$ si $z_2 = -2+\sqrt{3}$ si putem scrie integrandul ca

$$\frac{z}{(z^2+4z+1)^2} = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

Se remarca usor ca doar z_2 este in interiorul cercului unitate, z_1 fiind localizat in exterior. Mai mult, teorema de caracterizare a polilor arata ca z_2 este un pol de ordin 2.

Prin urmare

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\, dz = 2\pi i \cdot Rez(f, z_2)$$

iar

$$\begin{aligned} Rez(f,z_2) &= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \left((z-(-2+\sqrt{3}))^2 \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\right)' \\ &= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \left(\frac{z}{(z-(-2-\sqrt{3}))^2}\right)' \\ &= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{-z+2+\sqrt{3}}{(z-(-2-\sqrt{3}))^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Integrala ceruta va fi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\, d\theta = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Probleme propuse

A. Consolidare cunostinte

Problema A.1. *Scrieti urmatoarele numere complexe in forma polara*

$$z_1 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i, \quad z_2 = 1-i.$$

i) *Aflati argumentul principal $Arg(z_1)$ si apoi calculati $(-\sqrt{3}-i)^{50}$.*

ii) *Pentru numerele complexe $z_1=-1, z_2=5i$, verificati ca au loc*

$$Arg(z_1z_2) \neq Arg(z_1)+Arg(z_2)$$
$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq Arg(z_1)-Arg(z_2)$$

in schimb

$$arg(z_1z_2) = arg(z_1)+arg(z_2)$$
$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1)+arg(z_2).$$

Problema A.2. *Schitati multimea punctelor z, din planul complex, care satisfac urmatoarele conditii:*

i) $1 < |z-1-i| \leq 2$

ii) $|z-i| = |z-1|$

iii) $|Arg(z)| < \frac{\pi}{4}$

iv) $\mathrm{Re}\,((1+i)z-1) = 0$

v) $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$.

Problema A.3. *Demonstrati identitatile*

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

$$\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$(\cosh z)' = \sinh z \qquad si \qquad (\sinh z)' = \cosh z$$

pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$.

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Demonstrati ca* $\sinh z = 0$ *daca si numai daca* $z = n\pi i$ *si* $\cosh z = 0$ *daca si numai daca* $z = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi i$.

Problema B.2. *Aratati ca* $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ *si* $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$. *Demonstrati identitatea*

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}), \qquad z, w \in C$$

si inegalitatea triunghiului $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Problema B.3. *Rezolvati in $\mathbb{C}$ ecuatiile*

$$\sin z = 2$$

$$\cos z = -3 + i$$

Problema B.4. *Rezolvati in $\mathbb{C}$ ecuatiile*

$$z^6 = 1 + i$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$z^4 + 1 = 0$$

Calculati apoi $\sqrt{3 + \sqrt{3}i}$.

Problema B.5. *Aratati ca urmatoarele functii sunt olomorfe in* $z_0 = 0$

$$f(z) = \cos z, \quad g(z) = \sinh z, \quad h(z) = e^z.$$

Problema B.6. *Calculati reziduurile functiilor de mai jos in punctele specificate*

i) $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^3}, \qquad Rez(f,0) = ?$

ii) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}, \qquad Rez(f,0) = ?$

iii) $f(z) = z\cos\frac{1}{z}, \qquad Rez(f,0) = ?$

iv) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \qquad Rez(f,0) = ?$

Problema B.7. *Calculati integralele*

i) $I = \displaystyle\int_c \frac{dz}{z^5+1}, \quad$ *unde* $c : x^2 + y^2 = 2x$

ii) $J = \displaystyle\int_c \frac{z-e}{z^4+6} \quad$ *unde* $c : \ |z| = 3$

iii) $K = \displaystyle\int_{|z+2|=5} \frac{3i+z^4}{(z+3)z^2} dz$

iv) $\displaystyle\int_{|z|=3} e^{z^{-1}} z^3 dz$

Problema B.8. *Calculati integrala*

$$\int_c \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} dz$$

unde c este dreptunghiul definit de $x = -2$, $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$ *si* $y = 1$.

Problema B.9. *Calculati integrala*

$$\int_c \frac{1}{z^6+1} dz$$

unde c semicercul definit de $y = 0$ *si* $y = \sqrt{4-x^2}$.

Problema B.10. *Calculati integrala*

$$\int_c z^2 e^{\frac{1}{z}} + \frac{ze^z}{z^4 - \pi^4} dz$$

unde c este curba $4x^2 + y^2 = 16$

Problema B.11. *Folositi teoria reziduurilor pentru a arata ca*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{4} \qquad si \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Problema B.12. *Folositi teoria reziduurilor pentru a arata ca*

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$$

Problema B.13. *Aratati ca*

$$\int_0^{\infty} \frac{(lnx)^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^3}{8}$$

folosind teoria reziduurilor.

Indicatie: vezi curs

Bibliografie

[1] D. G. Zill si P. D. Shanahan. A First Course in Complex Analysis with Applications, *Jones and Bartlett Publishers, Inc.*, 2003.

[2] C. I. Hedrea. Seminar Matematici speciale, 2021.

[3] R. Negrea. Curs Matematici speciale, 2021

[4] K. Fritzsche. Grundkurs Funktionentheorie: Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen, *Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg*, 2009.

[5] R. Wrede si M. Spiegel. Schaum′s Outline Series: Advanced Calculus, *McGraw-Hill*, 2010.