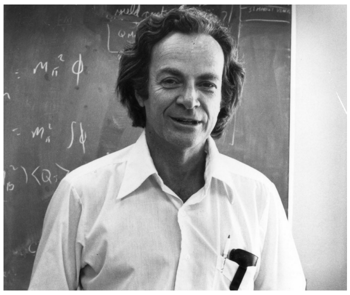
" Un matematician este o masina care transforma cafeaua in teoreme."

Alfréd Rényi

2 Calculul integralelor generalizate

Va tineti de glume, domnule Feynman!



Am invatat sa rezolv integrale si sa aplic diverse metode de integrare dintr-o carte pe care profesorul meu de fizica din liceu, domnul Bader, mi-a dat-o. Intr-o zi mi-a spus ca ar trebui sa raman dupa ora sa vorbeasca cu mine. "Feynmann", a spus el, "vorbesti prea mult si faci prea multa galagie. Stiu de ce. Te plictisesti. Iti voi da o carte. Cand vom avea ore vei sta in coltul clasei si vei studia aceasta carte iar cand vei sti tot ce e in cartea aceasta poti incepe sa vorbesti din nou." Si astfel am ajuns sa nu mai fiu atent la orele de fizica, indiferent daca se discuta despre legea lui Pascal sau orice altceva. Stateam in spate citind aceasta carte: *Analiza superioara* de Woods.

Aceasta carte mi-a adus la cunostinta cum se deriveaza un parametru aflat in interiorul semnului integral. Se pare ca la universitate nu se pune mare pret pe acest fapt. Dar eu am inteles cum trebuie folosita aceasta metoda si foloseam acest intrument intr-una. Deoarece am parcurs cartea singur, autodidact fiind, aveam metode ciudate de a rezolva integralele.

Rezultatul a fost urmatorul: cand oamenii de la MIT sau Princeton aveau dificultati in a rezolva o anumita integrala definita, care nu putea fi abordata cu metodele standard invatate in scoala, atunci veneam eu si incercam sa diferentiez sub semnul integral si functiona des. In acest fel am ajuns renumit, ca pot rezolva integrale, si asta doar pentru ca aveam alte tehnici decat ceilalti iar acestia imi aduceau la cunostinta problema dupa ce probasera toate metodele cunoscute de ei.

Richard Feynman, fizician

Integrale cu parametru

• in cele ce urmeaza vom prezenta asa-zisa ”metoda Feynman” de calcul a integralelor Riemann sau generalizate.

Integrala cu parametru

Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, astfel ca f pentru $\xi \in [c,d]$ fixat, ca functie in x, sa fie Riemann integrabila pe $[a,b]$. Numim functia

$$F(\xi) = \int_a^b f(x,\xi)dx$$

integrala Riemann cu parametru.

Integrala generalizata cu parametru

Fie $f : [a,b) \times [c,d) \to \mathbb{R}$, $b, d \in \overline{\mathbb{R}}$, astfel ca f pentru $\xi \in [c,d)$ fixat, ca functie in x, sa fie integrabila generalizat pe $[a,b)$. Numim functia

$$F(\xi) = \int_a^{b_-} f(x,\xi)dx$$

integrala generalizata cu parametru.

Ilustrare

Integrala

$$F(\xi) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\xi x} dx$$

este un exemplu de integrala generalizata cu parametru, unde evident $f(x,\xi) = \frac{\sin x}{x} e^{-\xi x}$ si $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Integrala converge, deoarece $\left| \frac{\sin x}{x} e^{-\xi x} \right| \leq e^{-\xi x}$ si

$$|F(\xi)| \leq \int_0^\infty e^{-\xi x} dx = \frac{1}{\xi} < \infty$$

Asadar functia f, pentru un $\xi \in (0,\infty)$ fixat, ca functie in x este integrabila generalizat pe $(0,\infty)$.

Continuitatea integralelor Riemann cu parametru

Daca $f(x,\xi)$ este continua pe $[a,b] \times [c,d]$, atunci exista

$$F(\xi) := \int_a^b f(x,\xi)dx$$

pentru orice $\xi \in [c,d]$ si $F(\xi)$ este continua pe $[c,d]$.

Utilitatea practica

Daca integrala cu parametru satisface conditiile teoremei de continuitate principalul castig este faptul ca limita va comuta cu semnul integral

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \int_a^b f(x,\xi)dx = \int_a^b \lim_{\xi \to \xi_0} f(x,\xi)dx = \int_a^b f(x,\xi_0)dx$$

Continuitatea integralelor generalizate cu parametru

Fie $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua, unde $a > 0$. Presupunem ca exista o functie integrabila generalizat $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ si

$$|f(x,\xi)| \le g(x), \quad x \ge a.$$

Atunci functia

$$F(\xi) = \int_a^\infty f(x,\xi)dx$$

este continua pe $[c,d]$.

Remarca

Acelasi rezultat e valabil si in cazurile $[a,b)$ sau $(a,b]$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.
De remarcat aparitia conditiei de majorare cu o functie integrabila generalizat

$$|f(x,\xi)| \le g(x), \quad \forall\ \xi, \quad \text{si} \quad \int_a^\infty g(x)dx < \infty$$

precum si faptul ca majorarea este uniforma in ξ.

Schimbarea ordinii de integrare

Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to I\!R$ continua, atunci are loc relatia

$$\int_c^d F(\xi)d\xi = \int_c^d \int_a^b f(x,\xi)dxd\xi = \int_a^b \int_c^d f(x,\xi)d\xi dx.$$

Schimbarea ordinii in integralele generalizate

Fie $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua, unde $a > 0$. Presupunem ca exista o functie integrabila generalizat $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ si

$$|f(x,\xi)| \le g(x), \quad x \ge a.$$

Atunci are loc identitatea

$$\int_c^d F(\xi)d\xi = \int_c^d \int_a^\infty f(x,\xi)dxd\xi = \int_a^\infty \int_c^d f(x,\xi)d\xi dx.$$

Demonstratie: Vezi [Bartle] Propozitia 33.8.

Derivarea integralelor Riemann cu parametru

Daca $f(x,\xi)$ este continua pe $[a,b]\times[c,d]$ si $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ exista si e continua, atunci si functia $F(\xi)$ este derivabila cu derivata continua pe intervalul $[c,d]$ si are loc

$$F'(\xi)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)dx$$

• cu modificarile de rigoare se obtine varianta pentru integrala generalizata

• de remarcat ca pentru fiecare proprietate corespunzatoare integralelor generalizate trebuie sa ne asiguram de convergenta integralelor generalizate implicate in relatiile investigate

Derivarea integralelor generalizate cu parametru

Fie $f:[a,\infty)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continua. Presupunem ca derivata partiala $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ exista si e continua. Functiile f si $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ sunt majorate de catre doua functii integrabile generalizat pe $[a,\infty)$

$$|f(x,\xi)|\le g_1(x),\quad \left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)\right|\le g_2(x),\quad x\in[a,\infty).$$

unde $\displaystyle\int_a^\infty g_1(x)dx<\infty$ si $\displaystyle\int_a^\infty g_2(x)dx<\infty$.
Atunci $F(\xi)$ este derivabila si

$$F'(\xi)=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \xi}(x,\xi)dx$$

este continua pe $[c,d]$.

Spre exemplu

Sa consideram integrala cu parametru

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(\xi x)dx$$

Deoarece $\left|e^{-x^2}\cos(\xi x)\right|\le e^{-x^2}$ functia F va fi continua pe $\mathbb{R}$. Mai departe rezulta

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|=\left|e^{-x^2}(-x)\sin(x\xi)\right|\le e^{-x^2}|x|$$

si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}|x|dx<\infty$. In concluzie, functia F este derivabila si derivata sa se calculeaza respectand regula din teorema anterioara.

Regula Leibniz pentru limite de integrare variabile

Fie $a, b : (c, d) \to [\alpha, \beta]$ functii derivabile si $f : [\alpha, \beta] \times (c, d) \to \mathbb{R}$ continua astfel ca derivata partiala $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ exista si este continua pe $[\alpha, \beta] \times (c, d)$. Avem de asemenea majorantii

$$|f(x, \xi)| \leq g_1(x) \quad \text{si} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi) \right| \leq g_2(x),$$

astfel incat $\int_\alpha^\beta g_1(x)dx$ si $\int_\alpha^\beta g_2(x)dx$ exista.
Atunci are loc regula Leibniz

$$\frac{d}{d\xi} \int_{a(\xi)}^{b(\xi)} f(x, \xi)\ dx = \int_{a(\xi)}^{b(\xi)} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi)\ dx + f(b(\xi), \xi)b'(\xi) - f(a(\xi), \xi)a'(\xi)$$

Demonstratie: vezi [Konrad] Corolarul 11.4

Util in practica

Pentru integrala Riemann $\int_{a(\xi)}^{b(\xi)} f(x)\ dx$ regula Leibniz devine

$$\frac{d}{d\xi} \int_{a(\xi)}^{b(\xi)} f(x)\ dx = f(b(\xi))b'(\xi) - f(a(\xi))a'(\xi)$$

Functia reala factorial $x!$

• una dintre motivatiile definirii functiei gamma este reprezentata de necesitatea extinderii lui $n!$ pentru numere reale si complexe.

Functia gamma Γ a lui Euler

Definim functia gamma pentru $s > 0$ prin intermediul urmatoarei integrale generalizate

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

Remarca

In fisa seminarului trecut am demonstrat ca aplicatie convergenta integralei care defineste functia gamma pentru $s > 0$.
Exista si alte definitii echivalente prin care aceasta functie poate fi introdusa, de exemplu

$$\Gamma(s) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{s-1} dx$$

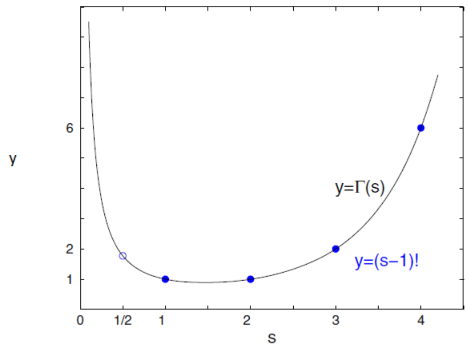
sau

$$\Gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx-e^x}\,dx.$$

Din punct de vedere istoric Leonhard Euler a rezolvat primul problema extinderii notiunii de factorial pentru numere reale propunand prima dintre formulele de mai sus ca solutie. Carl Friedrich Gauss in jurul anului 1820 propune si el urmatoarea formula a functiei gamma

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)}$$

- urmatoare figura arata grafic cum interpoleaza functia gamma factorialul $n!$



- cele mai utile proprietati ale functiei gamma sunt afisate in continuare

Formula de dublare a lui Legendre

Pentru $s > 0$ are loc

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s)$$

Ecuatia functionala a functiei gamma

Functia gamma este continua si nu are radacini. Are proprietatea

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

si satisface ecuatia functionala

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Aplicari consecutive conduc la formula

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)}$$

Formula Euler

Pentru orice $0 < s < 1$ are loc identitatea

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(s\pi)}$$

Consecinta

In cazul $s = \frac{1}{2}$, identitatea de mai sus implica rezultatul

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Imblanzirea functiei eroare

Vom calcula integrala Gauss

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Sa incepem prin a observa ca

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

iar apoi schimbarea de variabila $x = y^2$ livreaza

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-y^2}}{y} 2y dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = 2I$$

Daca folosim ceea ce tocmai am invatat rezulta

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 2I \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Functia beta si teoria stringurilor

In anul 1968 tanarul cercetator Gabriele Veneziano in timp ce lucra la CERN a observat o stranie coincidenta: multe proprietati ale fortei nucleare tari sunt descrise perfect de catre functia beta a lui Euler, o functie despre care se credea ca serveste doar unor scopuri pur matematice.

In anii care au urmat Yoichiro Nambu, Holger Nielsen si Leonard Susskind au reusit sa prezinte o explicatie fizica pentru ceea ce Veneziano observase. Ei au aratat ca interactiile nucleare ale particulelor elementare modelate ca si string-uri 1-dimensionale in loc de particule 0-dimensionale sunt perfect descrise de functia beta. Acest moment a reprezentat, de fapt, nasterea teoriei string-urilor.

Functia beta β

Definim functia beta pentru $s, t > 0$ prin

$$\beta(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx$$

Remarca

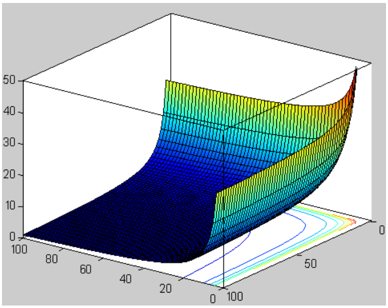
Functia beta are si alte posibile reprezentari si anume

$$\beta(s,t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s-1} x \cdot \cos^{2t-1} x dx$$

sau

$$\beta(s,t) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(1+x)^{s+t}} dx.$$

Graficul functiei beta pentru s, t pozitive



Ecuatia functionala a functiei beta

Functia beta are proprietatea de simetrie

$$\beta(s,t) = \beta(t,s)$$

iar in cazul $s > 0, t > 1$ satisface ecuatia functionala

$$\beta(s,t) = \frac{t-1}{s+t-1}\beta(s,t-1)$$

Consecinta utila

Proprietatea de simetrie implica

$$\beta(s,t) = \frac{s-1}{s-1+t}\beta(s-1,t) \qquad s > 1, t > 0.$$

Formula Euler corespunzatoare functiei beta

Pentru orice $0 < s < 1$ are loc identitatea

$$\beta(s, 1-s) = \frac{\pi}{\sin(s\pi)}$$

Functia beta centreaza si marcheaza

Pentru a calcula integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ sa observam

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1+t)^1}dt = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}dt$$

$$= \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Formula lui Euler implica rezultatul

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \beta\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$$

Reprezentarea functiei beta prin functia gamma

Rezultatul principal al teoriei functiei beta este dat de identitatea

$$\beta(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}, \quad s, t > 0.$$

Demonstratie: vezi [Lipovan] Corolarul 4.2.1

Consecinta

Cand m, n sunt doua numere naturale, are loc

$$\beta(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

Probleme rezolvate

Problema 1

Demonstrati identitatea

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

Solutie: Construim integrala cu parametru

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dx$$

unde $f(x,t) = e^{-tx}$. Se observa usor ca

$$F(t) = \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

Deoarece, pentru m fixat, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^{tx}} = 0$, va exista un $c > 0$, astfel ca

$$|x^m e^{-tx}| \le \frac{c}{x^2}, \quad t \ge \frac{1}{2}.$$

Acum vom aplica teorema de derivabilitate a integralelor generalizate cu parametru, deoarece se poate constata ca toate conditiile teoremei sunt indeplinite. Asadar

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} = \int_0^\infty -xe^{-tx} dx.$$

Un pas mai departe

$$F''(t) = \frac{2}{t^3} = \int_0^\infty x^2 e^{-tx} dx,$$

iar dupa n pasi

$$F^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}} = \int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-tx} dx$$

Alegand $t = 1$ se obtine

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

Problema 2

Integrala Gauss I este convergenta si are loc

$$I := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Solutie: Se observa usor ca

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \qquad \text{(functie para)}.$$

Notam

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

si consideram integrala cu parametru

$$F(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$$

Atunci $F(0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$ si $\lim_{\xi\to\infty} F(\xi) = 0$. Va exista $g(x) := \frac{1}{1+x^2}$ astfel ca

$$|f(x,\xi)| = \left|\frac{e^{-\xi^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

si $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx = \frac{\pi}{2} < \infty$.

Toate conditiile teoremei de derivabilitate sunt indeplinite. Deci

$$F'(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{e^{-\xi^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right) dx = \int_0^{\infty} -2\xi e^{-\xi^2(1+x^2)} dx = -2\xi e^{-\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-(\xi x)^2} dx$$

Facand substitutia $y = \xi x$ se obtine

$$F'(\xi) = -2\xi e^{-\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-(y)^2} dy = -2\xi e^{-\xi^2} J$$

In incheiere

$$\int_0^{\beta} F'(\xi) d\xi = \int_0^{\beta} -2\xi e^{-\xi^2} J d\xi = -2J \int_0^{\beta} e^{-\xi^2} d\xi$$

apoi

$$\lim_{\beta\to\infty} (F(\beta) - F(0)) = -2J \lim_{\beta\to\infty} \int_0^{\beta} \xi e^{-\xi^2} d\xi = -2J^2$$

$$\lim_{\xi\to\infty} F(\xi) - F(0) = 0 - \frac{\pi}{2} = -2J^2$$

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

si

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Problema 3

Calculati integrala

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx$$

pentru un $a \neq 0$ fixat.

Solutie: Consideram functia

$$f(t,a) = \int_0^t \frac{1}{x^2+a^2}dx$$

care folosind teorema de derivare a integralelor Riemann cu parametru conduce la

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2a\int_0^t \frac{dx}{(x^2+a^2)}.$$

Pe de alta parte se constata usor ca

$$f(t,a) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_0^t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$$

deci

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right) = -\frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{t^2}{a^2}}\left(-\frac{t}{a^2}\right)\\ &= -\frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} - \frac{t}{a}\frac{1}{t^2+a^2}\end{aligned}$$

Prin urmare

$$\int_0^t \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx = -\frac{1}{2a}\left(-\frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} - \frac{t}{a}\frac{1}{t^2+a^2}\right) = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2}\frac{1}{t^2+a^2}$$

In concluzie

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2}\frac{1}{t^2+a^2} + \mathcal{C}$$

Problema 4

Calculati integrala

$$I = \int_0^\infty x^4 e^{-x^2}dx.$$

Solutie: Substituim $x^2 = t$

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty t^2 e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{5}{2}-1}e^{-t}dt\\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) \overset{\text{ecuatia functionala}}{=} \frac{1}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Problema 5

Calculati integrala

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} dx$$

Solutie: Prin schimbarea de variabila $\sqrt{x} = t$ se obtine

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} 2t^1 dt = 2\int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= 2\beta\left(2, \frac{1}{2}\right) \overset{\text{reprezentarea prin }\Gamma}{=} 2\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \\ &= 2\frac{1!\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)} \overset{\text{ecuatia functionala}}{=} \frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

deoarece $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Problema 6

Calculati urmatoarea integrala

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x dx, \quad a, b > 0.$$

Solutie: Prin schimbarea de variabila $\sin x = t$ se obtine

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 t^{a-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{b-1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 t^{a-1}\left(1-t^2\right)^{\frac{b-1}{2}}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1}\left(1-t^2\right)^{\frac{b}{2}-1} dt \end{aligned}$$

Se impune o noua schimbare de variabila $y^2 = t$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 y^{\frac{a-1}{2}}(1-y)^{\frac{b}{2}-1} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{a}{2}-1}(1-y)^{\frac{b}{2}-1} dy \\ &\overset{\text{definitia }\beta}{=} \frac{1}{2}\beta\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \end{aligned}$$

Probleme propuse

A. Consolidare cunostinte

Problema A.1. *Incercati sa calculati integrala*

$$I = \int_0^1 \frac{ln(x+1)}{x^2+1} dx$$

prin metodele invatate in liceu. Incercati apoi "sa vedeti mai mult decat vi se arata".

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Calculati*

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x}dx$$

Hint: $I(t) = \int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}dx$.

Problema B.2. *Calculati integrala*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^2}.$$

Hint: Considera $F(t) = \int_0^1 \frac{1}{1+tx}dx$

Problema B.3. *Studiati continuitatea functiei*

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{1+x^2}dx, \ t \in \mathbb{R}.$$

Problema B.4. *Pentru a calcula integrala* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ *folositi integrala cu parametru*

$$F(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi x}\frac{\sin x}{x}dx, \quad \xi > 0.$$

Problema B.5. *Calculati integralele*

$$i) \int_0^\infty x^6 e^{-x^2}dx \qquad ii) \int_0^\infty x^{1000}e^{-x^2}dx \qquad iii) \int_0^\infty \frac{dx}{e^{100x^2}}$$

Problema B.6. *Calculati integralele*

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{61} x \cos^{43} x dx$

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{101} x dx$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{54} x dx$

iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos^{19} x dx$

Problema B.7. *Evaluati integrala*

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3 - \cos x}}.$$

Problema B.8. *Demonstrati ca*

a) Pentru $a \in \mathbb{R}$ *cu* $0 < a < 1$ *are loc*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \beta(a, 1-a)$$

b) Pentru orice numar natural $n \geq 2$ *are loc*

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} dx = \frac{1}{n}\beta\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

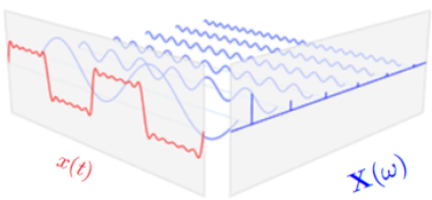
C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

Problema C.1. *In studiul semnalelor folosim deseori transformarea unui semnal din domeniul timp (amplitudinea ca functie de timp) in domeniul frecventelor (amplitudinea ca functie de frecventa). Putem realiza o astfel de transformare a unui semnal* $x(t)$ *prin intermediul integralei cu parametru*

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-t\omega}\ dt$$

Aflati transformata semnalului rampa

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



prin transformarea de mai sus.

Problema C.2. *Aratati ca integrala Planck are urmatoarea valoare*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\ dx = \Gamma(4) \cdot \zeta(4)$$

unde

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

este definita aici pentru un $s > 0$ *real.*

Indicatii:

· arata ca $\int_0^\infty e^{-bx}x^{s-1}\ dx = \frac{\Gamma(s)}{b^s}$ pentru $b > 0$

· foloseste faptul ca

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^s}$$

pentru a arata ca

$$\zeta(s) \cdot \Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}\ dx$$

Bibliografie

[1] M. Eisermann. *Höhere Mathematik 3*, 2016.

[2] R. Bartle. *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1976.

[3] K. Konrad. *Differentiating under the integral sign*

[4] R. Negrea. Curs Matematici speciale, 2021.

[5] C. I. Hedrea. Seminar Matematici speciale, 2021.

[6] O. Lipovan. Analiza matematica: Calcul Integral, *Editura Politehnica*, 2006.