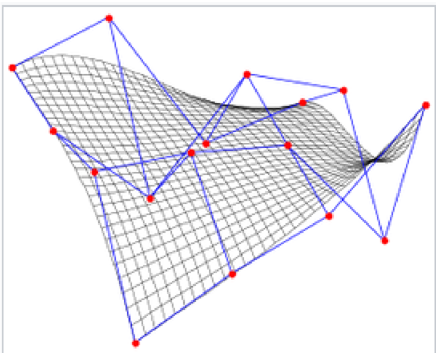
"You don't see something until you have the right metaphor to let you perceive it ."

James Gleick

9 Suprafeţe

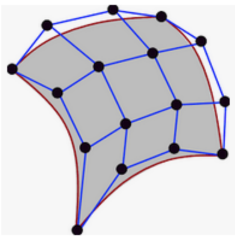
Design cu ajutorul suprafetelor Bézier

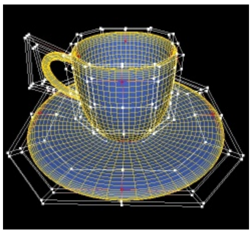


Suprafetele Bézier reprezinta o metoda eleganta de a construi o suprafata, fiind initial folosite in design-ul automobilelor. Astazi sunt folosite pe scara larga in grafica computerizata si computer-aided design (CAD). Ideea principala este sa folosim puncte de control pentru a genera orice forma sau imagine. O ecuatie parametrica generala, in cazul a $(n+1) \times (m+1)$ puncte de control, este data prin formula

$$S: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)P_{ij}$$

unde $B_{i,n}(u) = C_n^i u^i(1-u)^{n-i}$ sunt polinoamele Bernstein, P_{ij} punctele de control, iar $u, v \in [0,1]$. In grafica computerizata cele mai utilizate suprafete Bézier sunt suprafetele Bézier bicubice (m=n=3), in principal deoarece sunt o punte intre simplitate si complexitate, asigurand libertatea dorita artistului cu un nivel minimal de complexitate pentru programator si renderer.





Suprafete. Exemple

• vom incepe prin a defini notiunea de suprata si prin prezentarea unor suprafete clasice

Suprafete regulate

O multime $S \subset \mathbb{R}^3$ este o suprafata regulata daca fiecare dintre punctele sale p are o vecinatate V pentru care exista o multime deschisa $D \subset \mathbb{R}^2$ si o functie $\boldsymbol{r} : D \to V \subset S$

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in D$$

cu urmatoarele proprietati:

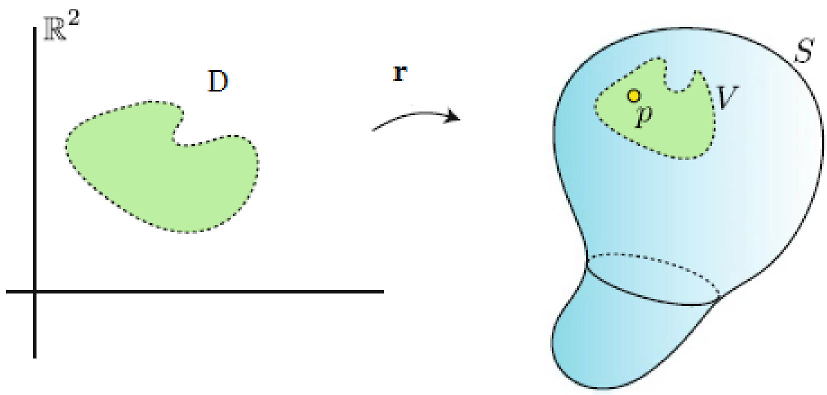
i) $\boldsymbol{r}$ este bijectiva si continua cu inversa continua

ii) fiecare componenta a sa $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ este derivabila partial, cu derivatele partiale continue

iii) in fiecare punct din D

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq (0,0,0)$$

functia $\boldsymbol{r}$ va fi numita parametrizare locala a lui V.



• perechea (V, r^{-1}) se numeste harta a suprafetei
• definitia de mai sus spune ca local o suprafata poate fi deformata pentru a deveni un plan
• de acum inainte prin suprafata vom intelege suprafata regulata
• o suprafata simpla este o suprafata care poate fi descrisa printr-o singura parametrizare $r : D \to S$

Grafice de functii

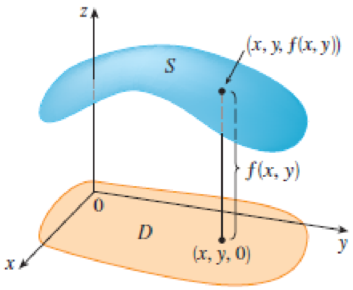
• daca $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este derivabila partial cu derivatele partiale continue atunci

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + f(x,y) \cdot \boldsymbol{k}$$

este o parametrizare globala a graficului lui f, deoarece

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \neq (0,0,0).$$

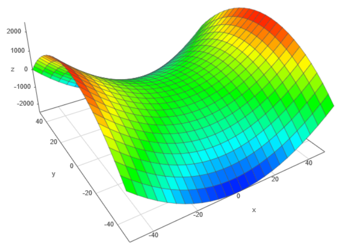
• graficul este o suprafata data in ecuatia explicita $z = f(x,y)$ si fiecare punct de pe grafic are coordonatele $(x, y, f(x,y))$



• in particular pentru

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

se obtine suprafata



• puteti folosi acest link pentru a genera suprafete ca grafice de functii

Suprafete de revolutie

• daca rotim o curba $3D$ regulata $c(u) = \begin{pmatrix} c_1(u) \\ c_2(u) \\ c_3(u) \end{pmatrix}$, $u \in (a,b)$, a carei imagine nu interesecteaza axa Oz si nici nu se auto-intersecteaza, in jurul axei Oz obtinem o suprafata simpla cu urmatoarea parametrizare

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(u) \\ c_2(u) \\ c_3(u) \end{pmatrix}, \quad u \in (a,b), v \in (0, 2\pi).$$

• matricea $\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ care actioneaza in formula de mai sus asupra coordonatelor curbei se numeste matrice de rotatie de-a lungul axei Oz

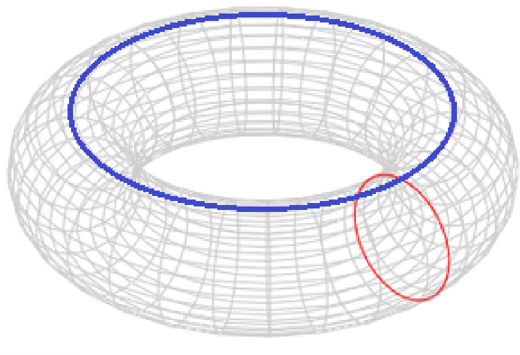
$\Longrightarrow$ cu celelalte matrice de rotatie putem roti in jurul oricarei axe a reperului cartezian $Oxyz$

Torul

• un tor poate fi obtinut rotind un cerc, situat in planul Oxz cu originea in $(a,0,0)$ si raza $0 < R < a$, in jurul axei Oz.

• o astfel de suprafata va fi parametrizata prin $\boldsymbol{r} : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + R\cos u \\ 0 \\ a + R\sin u \end{pmatrix}$$
$$= (a + R\cos u)\cos v \cdot \boldsymbol{i} + (a + R\cos u)\sin v \cdot \boldsymbol{j} + (a + R\sin u) \cdot \boldsymbol{k}$$

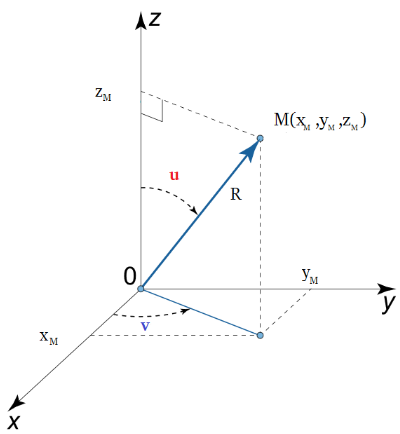


Sfera

• sfera cu centrul $C(x_c, y_c, z_c)$ and raza R este o suprafata care nu admite o singura parametrizare globala, deoarece nu poate fi acoperita decat prin cel putin patru harti: una pentru fiecare emisfera

• emisfera nordica, de exemplu, este o suprafata simpla cu parametrizarea $r : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ data prin

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x_c + R \cdot \sin u \, \cos v) \cdot \boldsymbol{i} + (y_c + R \cdot \sin u \, \sin v) \cdot \boldsymbol{j} + (z_c + R \cdot \cos u) \cdot \boldsymbol{k}.$$



• sfera poate fi vizualizata ca fiind o suprafata de revolutie

• sfera poate fi precizata si prin ecuatia carteziana implicita

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$$

si centrul sau va avea coordonatele $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right)$ iar raza este $R = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2 - 4q}$

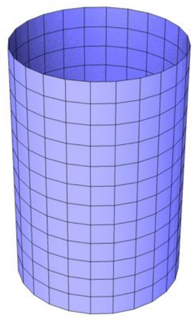
Cilindrul circular drept

• fata laterala a unui cilindru este o suprafata simpla

• o parametrizare a fetei laterale a unui cilindru de raza R este

$$\boldsymbol{r}(u, v) = R\cos u \cdot \boldsymbol{i} + R\sin u \cdot \boldsymbol{j} + v \cdot \boldsymbol{k}$$

unde $0 \leq u \leq 2\pi, \quad a \leq v \leq b$



Suprafete. Generalitati

• in continuare studiem geometria unei suprafete simple, pentru a nu complica lucrurile prea mult

• in general, o suprafata este precizata fie prin ecuatia carteziana implicita

$$S: \quad F(x, y, z) = 0$$

fie prin ecuatia vectoriala

$$S: \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

• puteti folosi acest site pentru a genera suprafete prin ecuatia vectoriala si acest site pentru a genera suprafete prin ecuatia implicita (va trebui sa setati Add to graph: Implicit Surface)

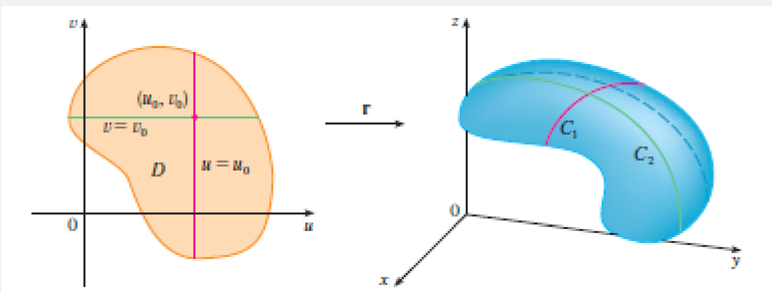
• la fel cum, in cazul curbelor, vectorul de pozitie $\mathbf{r}(t)$ determina in mare parte geometria curbei, in cazul suprafetelor, vectorul $\mathbf{r}(u, v)$ impreuna cu derivatele sale partiale $\mathbf{r}_u$ si $\mathbf{r}_v$ sunt responsabili pentru principalele proprietati ale unei suprafete

Curbe de coordonate

Daca $\boldsymbol{r}$ este o parametrizare a unei suprafete simple S, atunci pentru valori fixate ale parametrilor u_0, v_0 functiile

$$u \to \boldsymbol{r}(u, v_0), \quad v \to \boldsymbol{r}(u_0, v)$$

se numesc curbe de coordonate pe S.

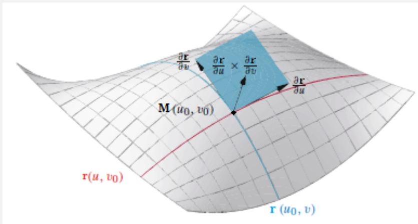


• meridianele si paralelele sunt curbe de coordonate pe o sfera (o emisfera a unei sfere riguros vorbind)

• este important sa putem exprima ecuatia planului tangent atat pentru suprafete date prin ecuatia vectoriala cat si pentru suprafete date prin ecuatia implicita

Planul tangent

Planul tangent intr-un punct $M(u_0, v_0)$ la o suprafata simpla S este planul care contine punctul M si vectorii tangenti $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ si $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ la curbele de coordonate. Planul are directia normala data de $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$.



$$\alpha: \begin{vmatrix} x - x_M & y - y_M & z - z_M \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

• pentru o suprafata data prin ecuatia implicita

$$S: \quad F(x, y, z) = 0$$

un vector normal in punctul $M(x_M, y_M, z_M)$ este

$$\bar{\mathbf{n}} = (F'_x(x_M, y_M, z_M), F'_y(x_M, y_M, z_M), F'_z(x_M, y_M, z_M))$$

prin urmare ecuatia planului tangent in M devine

$$\alpha: \quad F'_x(x_M, y_M, z_M)(x - x_M) + F'_y(x_M, y_M, z_M)(y - y_M) + F'_z(x_M, y_M, z_M)(z - z_M) = 0$$

• ecuatia planului tangent la sfera:

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$$

in punctul $M(x_M, y_M, z_M)$ se poate obtine si prin procedeul numit dedublare

$$\alpha: \quad x x_M + y y_M + z z_M + m\frac{x + x_M}{2} + n\frac{y + y_M}{2} + p\frac{z + z_M}{2} + q = 0$$

dar de fapt formula este o consecinta a celei generale

Lungimea unei curbe pe o suprafata

• numim expresiile

$$E(u, v) = \langle \boldsymbol{r}_u(u, v), \boldsymbol{r}_u(u, v) \rangle = \|\boldsymbol{r}_u(u, v)\|^2$$

$$F(u, v) = \langle \boldsymbol{r}_u(u, v), \boldsymbol{r}_v(u, v) \rangle$$

$$G(u,v) = \langle \boldsymbol{r}_v(u,v), \boldsymbol{r}_v(u,v)\rangle = \|\boldsymbol{r}_v(u,v)\|^2$$

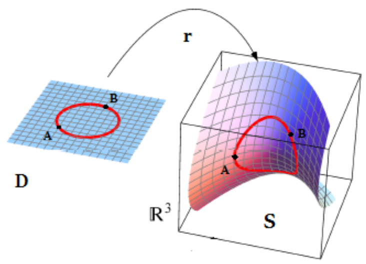
coeficienti ai primei forme fundamentale a lui S.

• coeficientii primei forme fundamentale determina mare parte din geometria suprafetelor, curbura suprafetelor, aria sau lungimea unor rute pe o suprafata pot fi exprimate in functie de acestia

• o curba plana regulata

$$c : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

in D genereaza o curba spatiala regulata



$$r \circ c : \quad r(u(t), v(t)) = x(u(t), v(t)) \cdot \boldsymbol{i} + y(u(t), v(t)) \cdot \boldsymbol{j} + z(u(t), v(t)) \cdot \boldsymbol{k}$$

pe o suprafata parametrica cu parametrizarea $r : D \to S$.

Lungimea unei curbe

Lungimea arcului de curba cuprinsa intre punctele $A(t = a)$ si $B(t = b)$, determinat de curba $r \circ c$, este data de

$$\ell_{AB} = \int_a^b \sqrt{[\dot{u}(t)]^2 E(u(t), v(t)) + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t) F(u(t), v(t)) + [\dot{v}(t)]^2 G(u(t), v(t))}\; dt$$

• pentru o curba inchisa ca in figura anterioara trebuie specificat care dintre cele doua arce dintre A si B sunt considerate sau curba necesita o orientare

Unghiul dintre curbele de coordonate

Intr-un punct $M(u_0, v_0)$ unghiul format de curbele de coordonate este unghiul format de vectorii tangenti $r_u(u_0, v_0)$, $r_v(u_0, v_0)$ in M la aceste curbe

$$cos\ \theta = \frac{\langle r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\rangle}{\|r_u(u_0, v_0)\| \cdot \|r_v(u_0, v_0)\|} = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0) \cdot G(u_0, v_0)}}$$

• pentru doua curbe c_1, c_2 oarecare de pe suprafata (care se intersecteaza in $M(u_0, v_0)$) unghiul este definit la fel doar ca intai se exprima vectorii tangenti v_1, v_2 la cele doua curbe in functie de $r_u(u_0, v_0)$ si $r_v(u_0, v_0)$

$$v_1 = a \cdot r_u(u_0, v_0) + b \cdot r_v(u_0, v_0)$$

$$v_2 = c \cdot r_u(u_0, v_0) + d \cdot r_v(u_0, v_0)$$

si apoi se aplica formula unghiului

$$cos\ \theta = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{acE + (ad + bc)F + bdG}{\sqrt{(a^2E + 2abF + b^2G)(c^2E + 2cdF + d^2G)}}$$

unde E, F, G sunt calculati in (u_0, v_0)

• ar fi de remarcat ca pe o sfera suma tututor unghiurilor unui triunghi sferic nu trebuie sa fie $180°$

Probleme rezolvate

Problema 1

Se se scrie ecuatiile normalei si ecuatia planului tangent la suprafata S in punctul M pentru

i) suprafata

$$S: \quad (u+v)\cdot\bar{i} + (u^2+v^2)\bar{j} + (u^3+v^3)\bar{k}$$

si punctul $M(u=1, v=2)$

ii) suprafata

$$S: \quad z = x^2 + y^2$$

si punctul $M(1,-2,5)$

Solutie: Cele doua subpuncte trateaza aceeasi problema pentru o suprafata data printr-o ecuatie vectoriala, respectiv o ecuatie implicita, caci a doua suprafata poate fi exprimata ca

$$S: \quad x^2 + y^2 - z = 0$$

adica $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

i) Atat dreapta normala cat si planul tangent in M sunt unic determinate de punctul M si un vector normal la planul tangent, care pentru o suprafata data prin ecuatia vectoriala este

$$\bar{n} = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$$

unde u_0, v_0 sunt coordonatele parametrice ale lui M.

Asadar indata ce determinam acest vector normal vom putea sa afisam ecuatiile planului si ale dreptei cerute. Sa observam pentru inceput ca ecuatia data este ecuatia vectoriala a suprafetei, care poate fi exprimata si in forma

$$S: \quad r(u,v) = (u+v, u^2+v^2, u^3+v^3)$$

iar M are coordonatele parametrice $u_0 = 1$ si $v_0 = 2$ date.

Avem nevoie de cele doua derivate partiale ale vectorului de pozitie $r(u,v)$:

$$r_u(u,v) = (1, 2u, 3u^2)$$

si

$$r_v(u,v) = (1, 2v, 3v^2)$$

prin urmare $r_u(1,2) = (1,2,3)$ si $r_v(1,2) = (1,4,48)$. In consecinta un vector normal in M la suprafata S este

$$\bar{n} = r_u(1,2) \times r_v(1,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 48 \end{vmatrix} = 84i - 45j + 2k$$

asadar $\bar{n} = (84, -45, 2)$ si planul tangent va fi determinat de punctul $M(1, 2)$ (ale carui coordonate carteziene trebuie aflate) si un vector normal la plan (vectorul $\bar{n}$). Avand coord. parametrice $(1, 2)$ obtinem prin inlocuire. in ecuatia suprafetei, pe cele carteziene $M(3, 5, 9)$. Planul tangent va fi

$$\alpha : \quad 84(x-3) - 45(y-5) + 2(z-9) = 0$$

iar dreapta normala

$$d : \quad \frac{x-3}{84} = \frac{y-5}{-45} = \frac{z-9}{2}$$

ii) Dreapta normala cat si planul tangent in M sunt unic determinate de punctul M si un vector normal la planul tangent, care pentru o suprafata data prin ecuatia implicita este

$$\bar{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$$

unde x_0, y_0, z_0 sunt coordonatele carteziene ale lui M. De aceasta data coordonatele carteziene sunt date, asadar $x_0 = 1, y_0 = -2$ si $z_0 = 5$.

Vectorul normal este construit in jurul derivatelor partiale ale lui F, prin urmare deoarece $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

$$F'_x(x, y, z) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F'_x(1, -2, 5) = 2$$

$$F'_y(x, y, z) = 2y \quad \Longrightarrow \quad F'_x(1, -2, 5) = -4$$

$$F'_z(x, y, z) = -1 \quad \Longrightarrow \quad F'_x(1, -2, 5) = -1$$

si in final $\bar{n} = (2, -4, -1)$ va fi un vector normal in $M(1, -2, 5)$ la suprafata S. Planul tangent devine

$$\alpha : \quad 2(x-1) - 4(y-(-2)) + -1(z-5) = 0$$

iar dreapta normala

$$d : \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-(-2)}{-4} = \frac{z-5}{-1}$$

Problema 2

Fie suprafata simpla

$$S : \ r(u, v) = u \cdot \bar{i} + 2v^2 \cdot \bar{j} + (u^2 + v) \cdot \bar{k}$$

Aflati

i) Coeficientii primei forme fundamentale

ii) Elementul de arie dS

iii) Ecuatia planului tangent in punctul $M(u = 0, v = 0)$ al suprafetei

Solutie: i) Pentru a calcula coeficientii primei forme fundamentale scriem intai vectorul de pozitie $r(u, v)$ sub forma

$$r(u, v) = (u, 2v^2, u^2 + v)$$

si reamintim faptul ca

$$E = r_u \cdot r_u, \quad F = r_u \cdot r_v \ \text{ si } \quad E = r_v \cdot r_v$$

prin urmare avem nevoie de derivatele partiale

$$r_u(u, v) = (1, 0, 2u)$$

si

$$r_u v(u, v) = (0, 4v, 1)$$

Asadar

$$E = r_u \cdot r_u = \|r_u\|^2 = 1^2 + 0^2 + (2u)^2 = 4u^2 + 1$$

$$F = r_u \cdot r_v = (1, 0, 2u) \cdot (0, 4v, 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4v + 2u \cdot 1 = 2u$$

iar

$$G = r_v \cdot r_v = \|r_v\|^2 = 0^2 + (4v)^2 + 1^2 = 4v^2 + 1$$

ii) Elementul de arie $dS = \|r_u \times r_v\| dudv$ este utilizat pentru a calcul aria unei suprafete simple prin integrala dubla

$$\mathcal{A}(S) = \iint_D \|r_u \times r_v\| dudv$$

Fara a utiliza produsul vectorial $r_u \times r_v$, putem exprima elementul de arie cu ajutorul coeficientilor primei forme fundamentale

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Deoarece $EG - F^2 = (4u^2 + 1)(4v^2 + 1) - (2u)^2 = 16u^2v^2 + 4v^2 + 1$ obtinem

$$dS = \sqrt{16u^2v^2 + 4v^2 + 1}\ dudv$$

iii) Pentru ecuatia planului tangent in $M(u_0 = 0, v_0 = 0)$ folosim formula

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_M & y - y_M & z - z_M \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

pentru care avem nevoie de coordonatele carteziene ale lui M. Aceste coordonate se obtin usor inlocuind coordonatele parametrice $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ in ecuatia suprafetei. Deci $(0, 0, 0)$ sunt coordonatele sale carteziene. Pe celelalte doua linii ale determinantului anterior se afla componentele derivatelor partiale ale vectorului de pozitie $r(u, v)$

$$r_u(0, 0) = (1, 0, 0)$$

si

$$r_v(0, 0) = (0, 0, 1)$$

tinand cont de expresiile calculate la subpunctul i). Asadar planul tangent in $M(0, 0, 0)$ este

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care prin prelucrare devine

$$\alpha: \quad y = 0$$

Problema 3

Calculati lungimea arcului de curba obtinut pentru

$$\begin{cases} u = t \\ v = t \end{cases} \quad , \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

pe suprafata $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Solutie: Ecuatia data este ecuatia implicita a unei sfere cu centrul in $O(0,0,0)$ si raza R, caci ecuatia generala a unei sfere este

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 + (z - z_O)^2 = R^2$$

Vom considera coordonatele sferice pe sfera, caci curba data este localizata in emisfera nordica intrucat $u = t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Emisfera nordica este o suprafata simpla cu parametrizarea data de

$$\boldsymbol{r}(u, v) = R \cdot \sin u \, \cos v \cdot \boldsymbol{i} + R \cdot \sin u \, \sin v \cdot \boldsymbol{j} + R \cdot \cos u \cdot \boldsymbol{k}.$$

Reamintim ca intreaga sfera nu este o suprafata simpla

Curba $3D$ obtinuta pentru $u = v = t$ este

$$c: \begin{cases} x = R \sin t \cos t \\ y = R \sin t \sin t \\ z = R \cos t \end{cases} \quad , \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Arcul de curba dorit porneste la $A(0,0,R) = A(t = 0)$ si se termina in punctul $B(0,R,0) = B(t = \frac{\pi}{2})$. Pentru a-i calcula lungimea avem nevoie de coeficientii primei forme fundamentale

$$E(u, v) = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = R^2(\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 v \sin^2 u + \sin^2 u) = R^2$$

$$F(u, v) = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = R^2 \sin u(-\cos u \cos v \sin v + \cos u \sin v \cos v) = 0$$

$$G(u, v) = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = R^2 \sin^2 u(\sin^2 v + \cos^2 v) = R^2 \sin^2 u$$

Deoarece $\dot{u}(t) = t' = 1$ si $\dot{v}(t) = t' = 1$, lungimea arcului de curba cautat devine

$$\begin{aligned} \ell_{AB} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[\dot{u}(t)]^2 E(u(t), v(t)) + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t) F(u(t), v(t)) + [\dot{v}(t)]^2 G(u(t), v(t))} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1^2 \cdot R^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1^2 \cdot R^2 \sin^2 t} \, dt \\ &= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t} \, dt \end{aligned}$$

si asa mai departe, acum totul se reduce la calculul unei integrale obisnuite.

Probleme propuse

B. Tehnica de calcul

Problema 1. *Consideram suprafata*

$$S: \begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases}, \quad (u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$$

i) *Gasiti coeficientii primei forme fundamentale*

ii) *Calculati curbura si torsiunea curbei de coordonate* $c: \; v = \frac{\pi}{4}$

iii) *Aflati masura unghiului dintre tangenta in* $A(u_0 = 0)$ *la curba* c *si dreapta*

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

Problema 2. *Fie suprafata*

$$S: \; \boldsymbol{r}(u,v) = e^u \cos v \boldsymbol{i} + e^{-u} \sin v \boldsymbol{j} + e^{2u} \boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times (0,2\pi)$$

Aflati ecuatia planului tangent si un vector normal la suprafata in punctul $M(u_0 = 0, v_0 = \frac{\pi}{2})$.

Problema 3. *Consideram suprafata*

$$S: \quad \boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + \sin(u+v)\boldsymbol{k}$$

i) *Aflati ecuatia dreptei normale si a planului tangent in punctul* $O(0,0,0)$ *si calculati unghiul dintre dreapta normala si vectorul* $\boldsymbol{k}$.

ii) *Aflati distanta de la punctul* $A(0,0,1)$ *la suprafata data*

Problema 4. *Se se scrie ecuatiile normalei si ecuatia planului tangent la suprafata*

$$S: \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$$

in punctul $M(4,3,4)$

Bibliografie

[1] O. Bundau, A. Juratoni *Exercitii si probleme de algebra liniara*, Ed. Politehnica, 2012.