"Ecuatiile sunt partea plictisitoare a matematicii. Eu incerc sa vad lucrurile intr-o maniera geometrica."

Stephen Hawking

7

Dreapta si planul in spatiu

Sinteza teorie

• componentele unui vector $\overline{AB}$ relativ la un sistem cartezian de coordonate fixat sunt date de formula

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

• ecuatia parametrica a dreptei determinate de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si un vector director $\bar{d} = (\ell, m, n)$

$$d: \begin{cases} x = x_A + t \cdot \ell \\ y = y_A + t \cdot m \\ z = z_A + t \cdot n \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

• ecuatia (ecuatiile) carteziana va fi

$$d: \frac{x - x_A}{\ell} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n}$$

• ecuatia parametrica a dreptei determinata de doua puncte $A(x_A, y_A, z_A)$ si $B(x_B, y_B, z_B)$ este

$$d: \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

• ecuatia carteziana va fi

$$d: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

• ecuatia planului care trece printr-un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si este paralel cu doua directii date prin $\bar{v}_1 = (\ell_1, m_1, n_1)$ si $\bar{v}_2 = (\ell_2, m_2, n_2)$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

• ecuatia planului care trece prin trei puncte necoliniare $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ si $C(x_C, y_C, z_C)$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

• ecuatia carteziana a planului determinat de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si un vector normal $\bar{n} = (a, b, c)$

$$\alpha: \ a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

• daca stim unde este localizat punctul M pe segmentul AB, adica avem informatia

$$\overline{MA} = k \cdot \overline{MB}$$

atunci putem sa-i aflam coordonatele

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}, \quad y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}, \quad z_M = \frac{z_A - kz_B}{1 - k}$$

Distante si unghiuri in spatiu

• produsul vectorial a doi vectori $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ este dat de formula

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

• produsul mixt a trei vectori $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ este

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

• unghiul θ format de doua drepte coplanare d_1 si d_2 este unghiul format de catre doi vectori directori $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ ai celor doua drepte

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{d}_1, \bar{d}_2 \rangle}{\|\bar{d}_1\| \cdot \|\bar{d}_2\|} = \frac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

• distanta de la un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ la un plan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ este

$$dist(A, \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

• distanta de la un punct A la o dreapta d

$$dist(A, d) = \frac{\|\bar{d} \times \overline{M_0 A}\|}{\|\bar{d}\|}$$

unde M_0 este un punct oarecare de pe dreapta si $\bar{d}$ este vector director al dreptei

• distanta dintre dreptele necoplanare d_1 si d_2

$$dist(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{M_1 M_2}, \bar{d}_1, \bar{d}_2)|}{\|\bar{d}_1 \times \bar{d}_2\|}$$

unde $M_1 \in d_1$ si $M_2 \in d_2$ sunt puncte arbitrare de pe drepte iar $\bar{d}_1$ si $\bar{d}_2$ sunt vectori directori ai dreptelor

• unghiul θ dintre o dreapta d (cu vectorul director $\bar{d}$) si un plan α (cu un vector normal $\bar{n}$) este obtinut din

$$\sin\theta = \frac{\langle \bar{d}, \bar{n} \rangle}{\|\bar{d}\| \cdot \|\bar{n}\|}$$

• unghiul θ format de catre doua plane cu vectori normali $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ este determinant prin formula

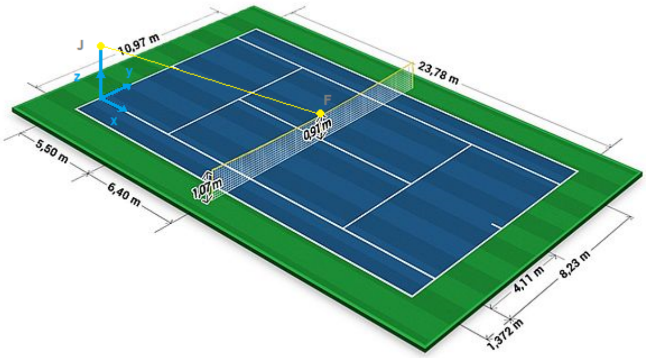
$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle}{\|\bar{n}_1\| \cdot \|\bar{n}_2\|}$$

Probleme rezolvate

Problema 1

Un jucator de tenis serveste din coltul terenului: ridica mingea la 2.50 m si apoi in traiectoria sa mingea loveste banda de sus a fileului exact in mijlocul fileului. Daca nu intalnea fileul in calea sa mingea ar fi intrat in teren ? Estimati locul (punctul) in care ar fi aterizat mingea trimisa de jucator. Ce unghi formeaza cu planul terenului traiectoria mingii ?

Solutie: Alegem un reper cartezian $Oxyz$ cu originea in coltul de unde serveste jucatorul si cu axele Ox si Oy cele doua linii de out care se intersecteaza acolo.



• identificam punctele $\mathbf{J(0,0,2.5)}$ si $\mathbf{F(11.89,4.11,0.91)}$ ca fiind locul de unde jucatorul serveste si punctul unde mingea loveste fileul. Ecuatia planului terenului va fi

$$\alpha: \; z = 0$$

• scriem ecuatia dreptei JF si aflam intersectia dreptei cu planul α al terenului, penntru a afla punctul $P(x_P, y_P, 0)$ unde mingea ar fi cazut in terenul advers

$$JF: \; \frac{x-11.89}{0-11.89} = \frac{y-4.11}{0-4.11} = \frac{z-0.91}{2.5-0.91}$$

• pentru a afla intersectia cu planul α al terenului cel mai simplu este sa trecem la ecuatia parametrica

$$JF: \begin{cases} x = -11.89 \cdot t + 11.89 \\ y = -4.11 \cdot t + 4.11 \\ z = 1.59 \cdot t + 0.91 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

• deoarece α are ecuatia $z = 0$ obtinem ca punctul P in care JF intersecteaza acest plan corespunde parametrului $t = -\frac{0.91}{1.59} = -0.57$ Prin urmare

$$x_P = -11.89 \cdot (-0.57) + 11.89 \approx 18.66$$

$$y_P = -4.11 \cdot (-0.57) + 4.11 \approx 6.45$$

• mingea ar fi cazut in teren daca se obtin coordonatele

$$x_P \leq 23.78, \quad y_P \leq 8,23 \;\; \text{and} \;\; \text{(vezi dimensiunile terenului)}$$

$\Longrightarrow$ mingea ar fi cazut in interiorul terenului

• se afla unghiul format de dreapta JF cu planul $z = 0$ folosind directia dreptei data prin vectorul $\overline{FJ} = (x_J - x_F, y_J - x_F, z_J - z_F) = (-11.9, -4.11, 1.59)$ si normala la planul terenului $\bar{n} = (0,0,1)$

• folosind formula unghiului format de o dreapta cu un plan avem:

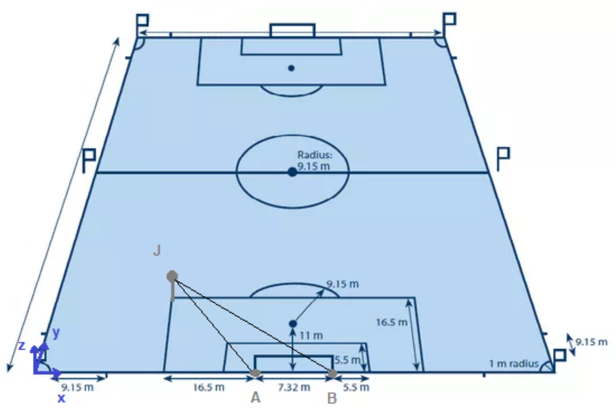
$$\sin\theta = \frac{\langle(-11.9,-4.11,1.59),(0,0,1)\rangle}{\|(-11.9,-4.11,1.59)\| \cdot \|(0,0,1)\|} = \frac{1.59}{12.68} = 0.125$$

iar din tabelele cu valorile functiei sinus gasim $\theta \approx 7°$

Problema 2

Spunem ca din punctul M vedem segmentul $[AB]$ sub un unghi de θ grade daca $m(\widehat{AMB}) = \theta$. Mai jos aveti descris un teren de fotbal de dimensiuni $50\ m \times 100\ m$. Sub ce unghi vede un jucator de fotbal, avand inaltimea de $1.50\ m$, linia portii atunci cand acesta ajunge in coltul careului mare?

Solutie: Consideram un reper cartezian $Oxyz$ cu originea in coltul terenului, in locul indicat de unul dintre stegulete, astfel incat axa Ox sa coincida cu linia portii si axa Oy cu linia laterala de aut.



• se afla coordonatele punctului de unde priveste jucatorul $\mathbf{J(29.84, 16.5, 1.5)}$ (am tinut cont de inaltimea sa si pozitionarea in spatiu) iar $\mathbf{A(46.34, 0, 0)}$, $\mathbf{B(53.66, 0, 0)}$ vor fi coordonatale punctelor in care poarta este fixata in sol. Apoi se determina vectorii:

$$\overline{JA} = (x_A - x_J, y_A - y_J, z_A - z_J)$$

si

$$\overline{JB} = (x_B - x_J, y_B - y_J, z_B - z_J)$$

care dau directiile dreptelor AJ si BJ.

• se afla unghiul cerut folosind formula $\cos\theta = \frac{\langle \overline{JA}, \overline{JB} \rangle}{\|\overline{JA}\| \cdot \|\overline{JB}\|}$

Probleme propuse

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Se dau punctele $A(1,1,2)$, $B(2,1,-1)$ si dreptele:*

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases} . \qquad d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Sa se scrie:

i) *Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei* AB

ii) *Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei* d_1

iii) *Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei* d *care trece prin* A *si este paralela cu dreapta* d_2

Problema B.2. *Se dau punctele* $A(1,-1,0)$, $B(-1,0,-1)$, $C(-1,1,-1)$ *si dreapta:*

$$d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

i) *Sa se scrie ecuatia planului care contine punctele* A, B, C

ii) *Ecuatia carteziana a planului care contine punctul* A *si este perpendicular pe dreapta* d

iii) *Ecuatia carteziana a planului care contine dreptele* d *si* AB.

Problema B.3. *Sa se gaseasca coordonatele proiectiei ortogonale a punctului* $M(1,2,-2)$ *pe planul* $\alpha : -2x+2y-3z+1=0$. *Sa se gaseasca coordonatele simetricului lui* M *fata de acest plan.*

Problema B.4. i) *Sa se arate ca dreapta* $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ *este paralela cu planul* $3x-3y+2z-5=0$

ii) *Sa se calculeze distanta dintre dreptele:*

$$d_1 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2} \quad si \quad d_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}.$$

Problema B.5. *Sa se determine distanta de la punctul* $M(3,-1,2)$ *la dreapta*

$$d : \begin{cases} 2x-y+z-4=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

Problema B.6. *Sa se studieze pozitia relativa a dreptei*

$$d : \begin{cases} x-y+2z-2=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$$

fata de planul $\alpha : x-2z+2=0$. *Sa se gaseasca ecuatia proiectiei ortogonale a dreptei* d *pe planul* α

Problema B.7. *Se dau dreptele:*

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2} \text{ si } d_2 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$$

Se cere:

i) Sa se scrie ecuatiile perpendicularei comune dreptelor d_1 si d_2

ii) Sa se calculeze distanta dintre dreptele d_1 si d_2

Problema B.8. *Sa se gaseasca coordonatele simetricului punctului $M(-1,0,2)$ fata de dreapta*

$$d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

Problema B.9. *Sa se gaseasca unghiul dintre dreptele:*

$$d_1 : \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \quad si \quad d_2 : \quad \frac{x+1}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-2}{3}$$

apoi dintre:

$$d_1 : \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases} \qquad si \quad d_2 : \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$$

Problema B.10. *Aflati unghiul dintre planele:*

$$\pi_1 : \quad x+2y-2z-1=0 \quad si \quad \pi_2 : \quad x+y+1=0$$

si apoi dintre dreapta:

$$d : \begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

si planul π_1.

Bibliografie

[1] O. Bundau, A. Juratoni *Exercitii si probleme de algebra liniara*, Ed. Politehnica, 2012.