"The key to growth is the introduction of higher dimensions of consciousness into our awareness."

Lao Tzu

2
Spatii vectoriale

Codarea mesajelor

Mesajele transmise, cum ar fi datele provenite de la un satelit, sunt intotdeauna supuse interferentelor. E important asadar sa putem cripta mesajele in asa fel incat, dupa ce sunt alterate de interferente, sa poata fi decriptate la forma lor originala. Acest lucru se face uneori prin repetarea mesajului de doua sau trei ori, un lucru de altfel comun si in vorbire. Insa multiplicarea informatiilor stocate intr-un computer va duce la supraincarcarea memoriei acestuia. E important sa incercam sa gasim cai de a decoda mesajele dupa ce sunt distorsionate de interferente. Acest proces se numeste coding. Un cod care detecteaza erorile intr-un mesaj distorsionat de interferente (scrambled message) se numeste **detector de erori**. Daca, in plus, poate corecte erorile se numeste **corector de erori**.

Tehnici de baza de coding: Cele mai multe mesaje sunt trimise sub forma unui sir digital de 0-uri si 1-ri, ca de exemplu 10101 sau 1010011, asadar sa presupunem ca vrem sa transmitem mesajul 1011. Acest “cuvant” binar poate reprezenta un cuvant adevarat ca si ”cumpara” sau o intreaga propozitie ”cumpara actiuni”. O varianta de criptare a lui 1011 ar fi sa ii atasam o coada binara in asa fel incat daca mesajul este deformat, sa zicem in 0011, putem sa detectam eroarea. O astfel de coada poate fi 1 sau 0, in functie de numarul de 1-uri din mesaj. Mai precis adaugam un 1 daca avem un numar impar de 1-uri in cuvantul binar transmis si 0 daca avem un numar par. In acest fel toate cuvintele criptate vor avea un numar par de 1-uri. Deci 1011 va fi codificat ca si 10111. Acum daca acest mesaj este deformat in 00111 stim ca a aparut o eroare din moment ce avem un numar impar de 1-ri. Aceasta metoda de detectare a erorilor se numeste verificarea paritatii si e prea simpla pentru a fi utila. De exemplu daca doua cifre sunt schimbate, metoda noastra nu va detecta eroarea. Alta abordare ar fi sa repetam de doua ori mesajul si sa transmitem 10111011. Acum daca 00111011 este receptionat, stim ca una din cele doua copii a fost deformata. Si aceasta metoda da rezultate slabe si nu este prea des folosita.

O tehnica avansata de codare: codul Hamming

In anii $50'$ R.H. Hamming a introdus o metoda de corectare a unei singure erori care e acum cunoscuta ca find codarea Hamming. Pentru a examina detaliile acestei tehnici avem nevoie de cateva notiuni de algebra liniara.

Spatii vectoriale peste corpul $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$

Multimea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ a resturilor la impartirea cu 2 impreuna cu adunarea si inmultirea definite mai jos

$$0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0, \quad 0 + 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1, \quad 0 \cdot 0 = 0$$

formeaza un corp.

Amintim ca structura de spatiu vectorial a lui $\mathbb{R}^n$ peste corpul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ este data de adunarea vectoriala:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

si inmultirea cu scalari:

$$\alpha \odot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ si λ numere reale.

Analog echipam $\mathbb{Z}_2^n$ cu o adunare vectoriala definita de adunarea binara pe componente si o inmultire cu scalari (0 sau 1). De exemplu in $\mathbb{Z}_2^3$ avem:

$$(1, 0, 1) \oplus (1, 1, 0) = (0, 1, 1)$$

$$0 \odot (1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Echipata cu aceste operatii multimea $\mathbb{Z}_2^n$ devine un spatiu vectorial peste corpul $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ si putem discuta despre liniar independenta, sisteme de generatori, subspatii, dimensiune. Spre deosebire de $\mathbb{R}^n$ spatiul vectorial $\mathbb{Z}_2^n$ contine un numar finit de 2^n vectori.

Codul Hamming $(7,4)$***:*** pentru doua numere intregi $k \leq n$, un subspatiu vectorial alui a $\mathbb{Z}_2^n$ de dimensiune k se numeste cod liniar (n,k).

Consideram matricea H cu elemente in $\mathbb{Z}_2$ a carei coloane notate $c_1, c_2, \ldots, c_7$ sunt formate din cei 7 vectori nenuli din $\mathbb{Z}^3$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Subspatiul vectorial

$$ker\ H := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^7 : H \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

poarta numele de codul Hamming $(7,4)$

Se poate arata ca

$$B = \{(1,0,0,0,0,1,1), (0,1,0,0,1,0,1), (0,0,1,0,1,1,0), (0,0,0,1,1,1,1)\}$$

formeaza o baza a spatiului vectorial $ker\ H$.

Matricea G ale carei linii sunt elementele bazei B se numeste **matricea generatoare** a codului Hamming (7,4)

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mai jos explicam procedura codului Hamming si corectarea erorilor dar pentru aceasta trebuie sa facem urmatoarele remarci. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_7\}$ baza canonica in $\mathbb{Z}_2^7$. Putem verifica relatiile $He_i = c_i$ pentru orice $i = \overline{1,7}$ si prin urmare niciunul dintre vectorii bazei canonice nu se afla in $ker\ H$.

1. Daca v apartine lui $ker\ H$ atunci $v + e_i$ nu apartin lui $ker\ H$ pentru orice i.
2. Daca v este un vector din $\mathbb{Z}_2^7$ pentru care exista un i astfel ca $Hv = c_i$ atunci $v + e_i$ apartine lui $ker\ H$ si pentru $j \neq i$ avem ca $v + e_j$ nu apartin acestei multimi.

Algoritmul pentru corectarea erorilor cu codul $(7,4)$

Sa presupunem ca vrem sa transmitem un cuvant $\mathbf{u}$ constand din patru cifre binare u_1, u_2, u_3, u_4, si presupunem ca acesta ar putea fi deformat de interferente care ii schimba doar o componenta. Fie w cuvantul primit.

1. Pentru a coda $\mathbf{u}$, formam combinatia liniara v a elementelor din baza B de mai sus cu cele patru componente a lui $\mathbf{u}$ ca si coeficienti. De fapt v poate fi obtinut din cuvantul original prin inmultirea cu matricea G

$$v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} G$$

Prin constructie vectorul v apartine lui $ker\ H$. De remarcat ca rezultatul calculului $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} G$ este un vector cu sapte componente ale carui prime patru componente reprezinta mesajul original.

2. Se calculeaza Hw, unde H este matricea descrisa mai sus.

3. Daca $Hw = 0$, atunci w partine lui $ker\ H$. Astfel, prezenta unei singure erori va insemna ca w nu apartine lui $ker\ H$. In acest caz concluzionam ca nu au existat deformari si **u** este reprezentat de primele patru componente ale lui w.

4. Daca $Hw = c_i$ pentru un anumit i, atunci $v + e_i$ este un vector din $ker\ H$ iar $v + e_j$ nu apartine lui $ker\ H$ pentru $j \neq i$. In acest caz schimbam componenta a i-a in w (de le 0 la 1 sau de la 1 la 0) si obtinem un nou vector $\bar{w}$. Primele sale patru componente vor fi acum reprezentate de cuvantul **u**

In tehnica de mai sus cuvintele trimise sunt foarte scurte: doar 4 componente. In realitate mesajele electronice contin mult mai multe componente si decodarea nu poate fi facuta decat cu ajutorul calculatorului, calculele fiind enorme. O problema cu codul Hamming (7,4) este ca nu poate detecta mai mult de o eroare.

Puteti exersa cele prezentate mai sus:

Problema

Am receptionat mesajul $w = 1100011$ *criptat cu ajutorul codului Hamming* $(4,7)$. *Stim ca s-a scurs cel mult o eroare in transmisia sa. Aflati mesajul original.*

Ce trebuie sa stii deja ?

Pentru a putea face parte din audienta trebuie sa stii

- notiunea de rang si teoria elementara a matricelor
- reprezentarea grafica a vectorilor in $2D$ si $3D$
- teoria elementara a polinoamelor cu coeficienti reali
- sisteme carteziene de coordonate in $2D$ si $3D$

Vectori in $\mathbb{R}^n$

• vom defini pe multimea $\mathbb{R}^n$ a vectorilor n-dimensionali $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ doua operatii:

Adunarea vectoriala $\oplus$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

↳ grafic, in 2D si 3D suma se obtine prin regula paralelogramului

Scalarea vectoriala $\odot$

$$\alpha \odot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

• impreuna cu aceste doua operatii spunem ca $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ este spatiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$ (multimea scalarilor)

• adunarea si scalarea vectoriala sunt notate in general cu "+" si "·" chiar daca exista un pericol de confuzie

• o multime de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ din $\mathbb{R}^n$ se numeste liniar independenta daca

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p = \theta \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

↳ practic, S este liniar independenta daca niciun vector din S nu se poate exprima ca o combinatie liniara de vectori din S

↳ in relatia de mai sus $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ este vectorul nul

Mod practic de studiu al liniar independentei

Pentru stabilirea liniar independentei unei multimi de p vectori

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, \ v_p\}$$

se formeaza matricea A pentru care acesti vectori reprezinta coloanele sau liniile sale. Daca

$$\text{rang}(A) = \text{numar de vectori ai multimii S} = p$$

atunci S este liniar independenta.

• o multime de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ din $\mathbb{R}^n$ se numeste sistem de generatori al spatiului vectorial $\mathbb{R}^n$ daca pentru orice vector $v \in \mathbb{R}^n$ exista scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\bar{v} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p.$$

↳ adica orice vector din $\mathbb{R}^n$ se poate exprima ca o combinatie liniara a vectorilor multimii S.

Mod practic de studiu al sistemelor de generatori
Pentru a stabili daca o multime formata cu p vectori

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$$

este sistem de generatori se formeaza matricea A pentru care acesti vectori reprezinta coloanele sau liniile sale. Daca

$$\text{rang}(A) = \text{dimensiunea spatiului vectorial } \mathbb{R}^n = n$$

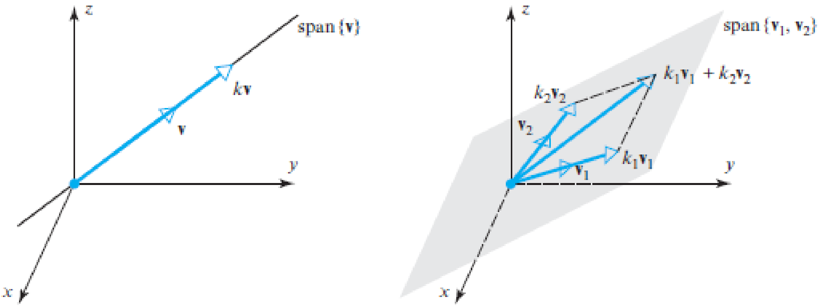
atunci S este sistem de generatori.

Remarca

Multimea generata de un sistem de vectori se noteaza cu

$$span\{v_1, v_2, \dots, v_p\} = \{k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_p v_p \ : \ k_1, k_2, \dots, k_p \in \mathbb{R}\}$$

si se numeste subspatiul vectorial generat de sistemul de vectori $v_1, v_2, \dots, v_p$.
In $\mathbb{R}^3$ putem vizualiza usor cum arata cateva astfel de subspatii. De exemplu $span\{v\} = \{kv : \ k \in \mathbb{R}\}$ este o dreapta prin originea reperului Oxyz cu directia data de vectorul v. In schimb pentru doi vectori necoliniari v_1, v_2 multimea $span\{v_1, v_2\} = \{k_1 v_1 + k_2 v_2 : \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$ este un plan care contine originea si doi vectori de directie v_1 si v_2.



Putem sa folosim dreapta si planul, care contin originea unui reper, ca modele (reprezentari mentale) pentru notiunea de subspatiu vectorial finit dimensional. Spre exemplu, cand vom incerca sa vizualizam notiunea de distanta de la un vector la un subspatiu vom putea desena un punct in locul vectorului (vector de pozitie al punctului) si un plan (subspatiu vectorial 2-dimensional) in locul subspatiului.

Baza a spatiului vectorial $\mathbb{R}^n$= multime ordonata care este liniar independenta si sistem de generatori.

• schimband ordinea vectorilor se obtine o baza distincta, chiar daca avem aceiasi vectori

Remarca

Mai sus avem un prototip al unei structuri algebrice numite spatiu vectorial. Folosind acest prototip putem extinde toate afirmatiile de mai sus la alte multimi de obiecte pe care le vom numi tot ”vectori”, atata vreme cat avem definita o adunare a obiectelor si o scalare (marire/micsorare).

Pe multimea $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \ : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ a polinoamelor de grad cel mult 2 putem defini o adunare a polinoamelor si o scalare (inmultire cu un numar real). Astfel $\mathbb{R}_2[X]$ devine spatiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. O baza canonica a spatiului $\mathbb{R}_2[X]$ este formata din ”vectorii”

$$e_1 = X^2, \quad e_2 = X, \quad e_3 = 1.$$

Analog multimea $M_2(\mathbb{R})$ a matricelor de ordin doi devine spatiu vectorial cu operatiile de adunare a matricelor si de inmultirea cu un numar real. O baza canonica a spatiului $M_2(\mathbb{R})$ este formata din ”vectorii”

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O baza canonica a spatiului $\mathbb{R}^3$ este formata din vectorii

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \bar{e}_3 = (0, 0, 1)$$

dimensiune a spatiului vectorial=numar de vectori dintr-o baza a sa

• se observa ca $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ si $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

• este suficient sa discutam de acum doar de prototipul $\mathbb{R}^n$ al structurii algebrice spatiu vectorial deoarece are loc urmatorul rezultat fundamental:

Orice spatiu vectorial real (peste corpul $\mathbb{R}$) care are dimensiunea n se poate identifica cu $\mathbb{R}^n$.

Remarca

De exemplu $\mathbb{R}_2[X]$ se identifica cu $\mathbb{R}^3$ in felul urmator

$$p = aX^2 + bX + c \quad \rightsquigarrow \quad v = (a, b, c)$$

adica identificam un polinom cu vectorul coeficientilor sai.

Oarecum asemanator identificam $M_2(\mathbb{R})$ cu $\mathbb{R}^4$ prin

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad v = (a, b, c, d)$$

• daca relativ la o baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a lui $\mathbb{R}^n$ avem scrierea

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

numim $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ coordonate ale vectorului v relativ la baza B si notam

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

• daca $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ si $B_2 = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ sunt baze in $\mathbb{R}^n$ si

$$\begin{cases} e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\ e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

adica exprimam vectorii bazei B_2 in functie de cei ai lui B_1

se numeste matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 matricea

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• daca $T_{B_1B_2}$ este matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 atunci au loc relatiile

$$T_{B_1B_2} = T_{B_2B_1}^{-1}$$

$$T_{B_1B_2} = T_{B_cB_1}^{-1} \cdot T_{B_cB_2}$$

unde B_c este baza canonica din $\mathbb{R}^n$

• coordonatele unui vector relativ la o baza B se pot obtine cu ajutorul matricei de trecere T_{B_cB}

$$[v]_B = T_{B_cB}^{-1} \cdot [v]_{B_c}.$$

• in general au loc formulele

$$[v]_{B_2} = T_{B_1B_2}^{-1} \cdot [v]_{B_1} \quad \text{sau} \quad [v]_{B_1} = T_{B_1B_2} \cdot [v]_{B_2}.$$

Matrice, un punct de vedere liniar independent

• matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

poate fi interpretata ca o colectie de vectori linie

$$A = \begin{pmatrix} (1 & 2 & -1) = \ell_1 \\ (0 & 0 & 2) = \ell_2 \\ (-1 & -2 & 3) = \ell_3 \\ (2 & 4 & 0) = \ell_4 \end{pmatrix}$$

sau de vectori coloana

$$A = \left(\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A)$ = nr. de linii liniar independente = nr. de coloane liniar independente

$\text{rang}(A)$ = dimensiunea subspatiului generat de vectorii linie/coloana

↳ $rang(A) = 2$ si se poate verifica ca primele doua linii ℓ_1 si ℓ_2 sunt liniar independente iar $\ell_3 = -\ell_1 + \ell_2$ sau $\ell_4 = 2\ell_2 + \ell_3$

↳ oricare trei linii sunt liniar dependente si exista doua linii liniar independente, de exemplu ℓ_1, ℓ_2

↳ acelasi rezultat are loc pentru coloanele c_1, c_2, c_3.

Structura matricelor de rang 1

Daca $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ are rangul 1 atunci exista doi vectori $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ si $v = (b_1\ b_2\ \dots\ b_n)$ astfel ca

$$A = u \cdot v$$

- vom vedea ca rangul nu creste prin inmultire cu o alta matrice

Teorema lui Sylvester

$$rang(A) + rang(B) - n \leq rang(AB) \leq \min\{rang(A), rang(B)\}$$

- are loc si inegalitatea:

$$rang(A + B) \leq rang(A) + rang(B)$$

evidenta intrucat prin adunare putem modifica fundamental matricea ea putand deveni chiar inversabila.

Determinanti in geometrie

• daca din punt de vedere algebric determinantul "masoara" liniar independenta liniilor, din punct de vedere geometric masoara arii sau volume

Aria unui triunghi

Aria triunghiului format de punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ si $C(x_C, y_C)$ este

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left| det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Avem nevoie de modul inaintea determinantului pentru a ne asigura ca aria este tot timpul pozitiva.

Ce ascunde liniar dependenta ?

• daca determinantul de mai sus este nul stim ca liniile sunt liniar dependente, asadar va exista o linie care sa fie o combinatie liniara de celelalte, sa presupunem de exemplu $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$, adica

$$(x_C \quad y_C \quad 1) = \alpha \cdot (x_A \quad y_A \quad 1) + \beta \cdot (x_B \quad y_B \quad 1)$$

• observam ca relatia de mai sus implica $1 = \alpha + \beta$ si prin urmare

$$\begin{cases} x_C = \alpha \cdot x_A + (1-\alpha) \cdot x_B \\ y_C = \alpha \cdot y_A + (1-\alpha) \cdot y_B \end{cases}$$

care conduce la:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = 1 - \alpha$$

adica punctul C se afla pe dreapta AB.

• asadar determinatul este nul daca si numai daca punctele sunt coliniare

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \text{ coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Remarca

• coordonatele punctelor M situate pe dreapta AB sunt o combinatie afina a coordonatelor punctelor A si B adica

$$(x_M, y_M) = \alpha \cdot (x_A, y_A) + (1-\alpha)(x_B, y_B) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

• coordonatele punctelor N situate in interiorul segmentului AB sunt o combinatie convexa a coordonatelor punctelor A si B

$$(x_N, y_N) = \alpha \cdot (x_A, y_A) + (1-\alpha)(x_B, y_B) \qquad \alpha > 0$$

Volumul unui tetraedru

Volumul tetraedrului format de punctele $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ si $D(x_D, y_D, z_D)$ este dat de formula

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}\left| det \begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{pmatrix} \right|$$

• printr-un rationament asemanator liniar dependenta liniilor conduce la conditia de coplanaritate a punctelor

$$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), \text{ si } D(x_D, y_D, z_D) \text{ coplanare}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Liniar independenta functiilor

Functiile $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sunt liniar independente daca si numai daca wronskian-ul lor $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este nenul

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \ldots & f_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

pentru orice valoare a lui x, din domeniul comun de definitie.

• stim deja ca polinoamele $f_1 = 1$, $f_2 = X$ si $f_3 = X^2$ sunt liniar independente, putem verifica acelasi rezultat si pentru functiile polinomiale atasate $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ si $f_3(x) = x^2$, caci

$$W(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Determinanti Vandermonde si formula lui Lagrange

• o problema clasica in matematica se refera la aflarea polinomului de grad $n-1$, $p = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_1 X + a_0$ care satisface relatiile:

$$p(x_1) = y_1,\ p(x_2) = y_2,\ \ldots,\ p(x_n) = y_n$$

necunoscutele sunt evident $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ iar daca transformam relatiile anterioare intr-un sistem de ecuatii obtinem un sistem liniar cu determinantul matricei sistemului egal cu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

• un astfel de determinant se numeste determinant Vandermonde si are loc formula:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i}^{n} (x_j - x_i)$$

• cu putina rabdare se obtine in cele din urma formula polinomului p

Formula de interpolare a lui Lagrange

Un polinom de grad $n-1$ care satisface conditiile

$$p(x_1) = y_1,\ p(x_2) = y_2,\ \ldots, p(x_n) = y_n$$

este dat de formula

$$\begin{aligned} p =& \frac{(X - x_2)(X - x_3) \cdot \ldots \cdot (X - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdot \ldots \cdot (x_1 - x_n)} \cdot y_1 \\ &+ \frac{(X - x_1)(X - x_3) \cdot \ldots \cdot (X - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdot \ldots \cdot (x_2 - x_n)} \cdot y_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{(X - x_1)(X - x_2) \cdot \ldots \cdot (X - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1})} \cdot y_n \end{aligned}$$

Unde este liniar independenta ?

- polinoamele:

$$p_1 = \frac{(X-x_2)(X-x_3)\cdot\ldots\cdot(X-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)}$$

$$p_2 = \frac{(X-x_1)(X-x_3)\cdot\ldots\cdot(X-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_2-x_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = \frac{(X-x_1)(X-x_2)\cdot\ldots\cdot(X-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})}$$

sunt liniar independente, formeaza chiar o baza a spatiului $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ al polinoamelor de grad cel mult $n-1$, cu coeficienti reali.

Probleme rezolvate

Problema 1

Putem forma o baza a lui $\mathbb{R}^3$ care sa contina vectorii:

$$v_1 = (1,2,3) \quad \text{si} \quad v_2 = (1,1,0) \quad ?$$

Solutie: Spatiul vectorial $\mathbb{R}^3$ are dimensiunea 3 si vom avea nevoie de trei vectori pentru a forma o baza a sa. Daca dorim ca acesti doi vectori sa faca parte din aceasta baza (pe care trebuie sa o construim) atunci v_1 si v_2 trebuie sa fie liniar independenti. Verificam liniar independenta acestora folosind criteriul practic de studiu al liniar independentei .

Vectorii dati se colecteaza in matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece rang $A = 2 =$ numar de vectori $\Longrightarrow v_1, v_2$ sunt liniar independenti.

Lema: Orice sistem de vectori liniar independenti poate fi completat la o baza a spatiului vectorial.

Vom afla vectorul lipsa notandu-l $v_3 = (a,b,c)$. Daca dorim ca v_1, v_2 si v_3 sa formeze o baza aceasti vectori trebuie sa formeze impreuna un sistem liniar independent si in acelasi timp un sistem de generatori. Oricare dintre aceste doua conditii se traduc, datorit criteriilor enuntate anterior in fisa seminarului, prin

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix} \neq 0$$

caci doar astfel rangul matricei este 3=numar de vectori=dimensiunea spatiului.

Gasim destul de usor ca pentru $a = 1, b = 0, c = 0$ se obtine un determinant nenul. Asadar putem completa cu $v_3 = (1, 0, 0)$ cei doi vectori pentru a forma baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Problema 2

Sa se scrie matricea de trecere de la baza

$$B_1 = \{3X + 1, 5X + 2\}$$

la baza

$$B_2 = \{X + 3, -X + 2\}$$

din $\mathbb{R}_1[X]$.

Solutie: ***Metoda 1***

Scriem vectorii din baza B_2 in functie de vectorii din baza B_1

$$X + 3 = \alpha(3X + 1) + \beta(5X + 2)$$

si dupa ce identificam coeficientii obtinem sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} 1 = 3\alpha + 5\beta \\ 3 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

cu solutia $\alpha = -13, \beta = 8$

Analog

$$-X + 2 = \gamma(3X + 1) + \delta(5X + 2)$$

si dupa ce identificam coeficientii

$$\begin{cases} -1 = 3\gamma + 5\delta \\ 2 = \gamma + 2\delta \end{cases}$$

cu solutia $\alpha = -12, \beta = 7$

Prin urmare matricea de trecere este

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -13 & -12 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Metoda 2: Intotdeauna putem afla usor matricea de trecere de la baza canonica a spatiului la o baza data. In acest caz baza canonica este $B_c = \{1, X\}$ si matricea de trecere de la baza B_c la baza B_1 este

$$T_{B_cB_1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iar de la B_c la B_2

$$T_{B_cB_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

adica coeficientii polinoamelor se aseaza pe coloane. Putem afla matricea de trecere de la baza B_1 la B_2 folosind formula

$$T_{B_1B_2} = T^{-1}_{B_cB_1} \cdot T_{B_cB_2}$$

deci

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -12 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Metoda 3: Identificam $\mathbb{R}_1[X] = \{aX + b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ cu $\mathbb{R}^2$ prin

$$aX + b \ \rightsquigarrow \quad v = (a, b)$$

si atunci toata problema se reduce la o problema din $\mathbb{R}^2$

Sa se scrie matricea de trecere de la baza

$$B_1 = \{(3, 1), (5, 2)\}$$

la baza

$$B_2 = \{(1, 3), (-1, 2)\}$$

din $\mathbb{R}^2$.

Rezolvarea este acum asemanatoare cu cea de la anterioarele doua metode doar ca se lucreaza direct in $\mathbb{R}^2$ unde manevrarea vectorilor si structura de spatiu vectorial sunt mai naturale.

Problema 3

Vectorul $v \in \mathbb{R}^3$ are relativ la baza

$$B = \{w_1 = (1, 1, 0), w_2 = (1, 0, 0), w_3 = (1, 1, 1)\}$$

coordonatele $(-1, 2, 1)$.
Care sunt coordonatele sale relativ la baza canonica din $\mathbb{R}^3$?
Care sunt coordonatele sale relativ la baza

$$B_1 = \{u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, \sqrt{2}, 1), u_3 = (1, -\sqrt{2}, 1)\} \quad ?$$

Soluţie: Din enunt deducem ca

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

prin urmare, avem reprezentarea:

$$v = -1(1, 1, 0) + 2(1, 0, 0) + 1(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

Asadar vectorul v este de fapt vectorul $(0, 0, 1)$ din $\mathbb{R}^3$. Intrucat, in mod natural, vectorii din $\mathbb{R}^3$ sunt reprezentati relativ la baza canonica, avem

$$[v]_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pentru a afla coordonatele lui v relativ la baza B_1 putem sa utilizam fie coordonatele sale relativ la baza B fie relativ la baza B_c. Relatiile de schimbare a coordonatelor la o schimbare a bazei sunt

$$[v]_{B_1} = T_{B_1B}[v]_B = T_{B_1B_c}T_{B_cB}[v]_B = T^{-1}_{B_cB_1}T_{B_cB}[v]_B$$

deci

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Putem folosi coordonatele relativ la baza canonica si atunci

$$[v]_{B_1} = T_{B_1B_c}[v]_{B_c} = T^{-1}_{B_cB_1}[v]_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarca

Motivul pentru care matricea de trecere de la o baza la alta se obtine trecand coordonatele vectorilor pe coloane tine de cele doua moduri in care putem scrie relatia de mai sus. Daca dorim sa exprimam $[v]_{B_1}$ sub forma unei matrice linie $[v]_{B_1} = (a, b, c)$ atunci in matricea de trecere de la o baza la alta nu trebuie sa asezam coordonatele pe coloane si obtinem relatii de tipul urmator

$$[v]_{B_1} = [v]_{B_c}T_{B_1B_c} = [v]_{B_c}T^{-1}_{B_cB_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

In ambele cazuri obtinem

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Putem verifica faptul ca

$$v = (0, 0, 1) = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3$$

Remarca

Putem sa discutam despre perpendicularitatea vectorilor (ortogonalitate) daca introducem un produs scalar intre vectorii unui spatiu vectorial. De exemplu pentru doi vectori $\bar{v} = a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3$ si $\bar{w} = a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3$ putem defini

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

In felul acesta spunem ca doi vectori $\bar{v}, \bar{w}$ sunt ortogonali $\iff$ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$
Prin calcul se poate observa ca vectorii bazei B_1 sunt ortogonali doi cate doi. La fel si vectorii bazei canonice.

Problema 4

Teoria curbelor Bezier, folosita in animatia 3D, se bazeaza pe ideea ca urmatoarele polinoame, numite polinoame Bernstein

$$p_k = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}$$

formeaza o baza pentru multimea $\mathbb{R}_n[X]$ a polinoamelor de grad cel mult n. Verificati daca

$$p_0 = (1-X)^2, \quad p_1 = 2X(1-X) \quad p_2 = X^2,$$

formeaza o baza in $\mathbb{R}_2[X]$.

Soluţie: ***Metoda intai***

Avand trei vectori p_0, p_1, p_2 intr-un spatiu 3-dimensional este suficient sa testam ca $detA \neq 0$ datorita celor doua criterii de studiu a liniar independentei si al sistemelor de generatori.

Formam intai matricea coordonatelor relativ la baza canonica $B_c = \{X^{\cdot}X, 1\}$

$$p_0 = 1 \cdot X^2 - 2 \cdot X + 1 \cdot 1$$

$$p_1 = -2 \cdot X^2 + 2 \cdot X + 0 \cdot 1$$

$$p_2 = 1 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 0 \cdot 1$$

Asadar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si verificam $detA = -2 \neq 0 \implies rangA = 3$=numar de vectori=dim $\mathbb{R}_2[X]$.

$\implies p_0, p_1, p_2$ formeaza o baza a lui $\mathbb{R}_2[X]$.

Metoda a doua

Putem sa consideram functiile polinomiale asociate celor trei polinoame $p_0(x) = (1-x)^2, \quad p_1(x) = 2x(1-x), \quad p_2(x) = x^2$. Pentru a arata ca cele trei functii obtinute sunt liniar independente aratam ca wronskianul asociat este nenul

$$W(p_0, p_1, p_2)(x) = \begin{vmatrix} p_0(x) & p_1(x) & p_2(x) \\ p_0'(x) & p_1'(x) & p_2'(x) \\ p_0''(x) & p_1''(x) & p_2''(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$W(p_0, p_1, p_2)(x) = \begin{vmatrix} (1-x)^2 & 2x(1-x) & x^2 \\ -2(1-x) & -2x + 2(1-x) & 2x \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Folosim apoi urmatorul rezultat

Lema: Intr-un spatiu vectorial n-dimensional orice sistem de n vectori liniar independenti formeaza o baza a sa.

Problema 5

Sa se arate ca pentru o matrice oarecare $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ multimea

$$kerA := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

formeaza un subspatiu vectorial al lui $\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$.
Aflati o baza a subspatiului $kerA$ corespunzator matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Soluţie: In $kerA$ se afla toti vectorii coloana care in urma aplicarii matricei A devin vectorul coloana nul.

O submultime S a unui spatiu vectorial real este subspatiu vectorial daca si numai daca

$$\forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \bar{v}, \bar{w} \in S \implies \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in S$$

asadar orice combinatie liniara de vectori din S trebuie sa ramana in S.

In cazul nostru va trebui sa aratam ca

$$\forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \bar{v}, \bar{w} \in kerA \implies \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in kerA$$

Consideram $\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in kerA$, adica $A\bar{v} = \bar{0}$ si $A\bar{w} = \bar{0}$.

Observam ca

$$A(\alpha\bar{v} + \beta\bar{w}) = \alpha A\bar{v} + \beta A\bar{w} = \alpha\bar{0} + \beta\bar{0} = \bar{0}$$

deci si $\alpha\bar{v} + \beta\bar{w}$ este transformat tot in $\bar{0}$ de catre matricea A.

$$\Longrightarrow \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in kerA.$$

In cele ce urmeaza vom determina structura elementelor din $kerA$. A afla $kerA$ pentru matricea data este echivalent cu a rezolva ecuatia

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

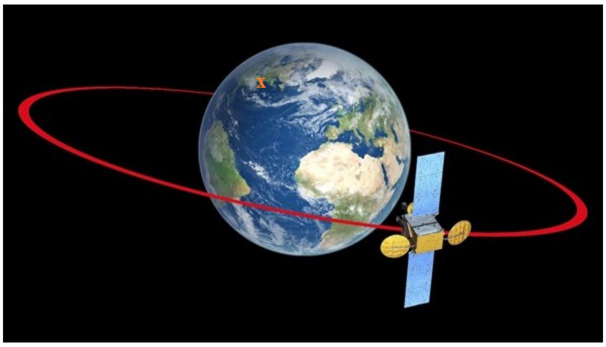
Aceasta ecuatie duce la un sistem compatibil nedeterminat cu multimea solutiilor $\{(\alpha, -\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ deci

$$kerA = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, -1, 1) \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

deci $kerA$ este o multime generata de un vector $(1, -1, 1)$, prin urmare un subspatiu vectorial 1-dimensional cu o baza $B = \{(1, -1, 1)\}$

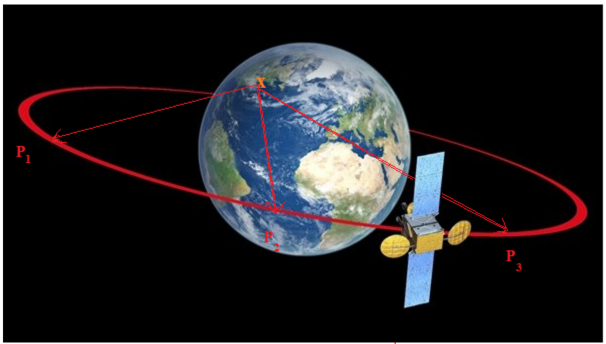
Problema 6

Un satelit de spionaj este plasat pe o orbita de forma eliptica situata in planul ecuatorului. Pozitia sa este inregistrata de catre un senzor aflat la Cape Canaveral, notat in figura cu X. In trei momente diferite de timp cercetatorii NASA au inregistrat urmatorii vectori de pozitie $v_{t_1} = (1, -3, 2)$, $v_{t_2} = (1, 1, 1)$ si $v_{t_3} = (-1, -9, 1)$ ai satelitului, dupa care au tras concluzia ca sistemul de navigatie al acestuia este avariat. De ce ? Justificati !



Solutie: Ideea problemei este sa utilizam interpretarea geometrica a liniar independentei. Daca n vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n$ sunt liniar independenti atunci ei genereaza prin combinatii liniare un spatiu vectorial n-dimensional. Oricare doi vectori $\bar{v}, \bar{w}$ cu originea comuna, liniar independenti, genereaza un plan ($span\{\bar{v}, \bar{w}\}$), acesta fiind un spatiu vectorial 2-dimensional.

Notam cu P_1, P_2, P_3 cele trei pozitii ale satelitului observate pe traiectoria sa eliptica.



Cei trei vectori de pozitie sunt $v_{t_1} = \overrightarrow{XP_1}(1,-3,2), v_{t_2} = \overrightarrow{XP_1}(1,1,1)$ si $v_{t_3} = \overrightarrow{XP_3}(-1,9,1)$. Se verifica usor ca acestia sunt liniar dependenti

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Deci exista α si β astfel ca

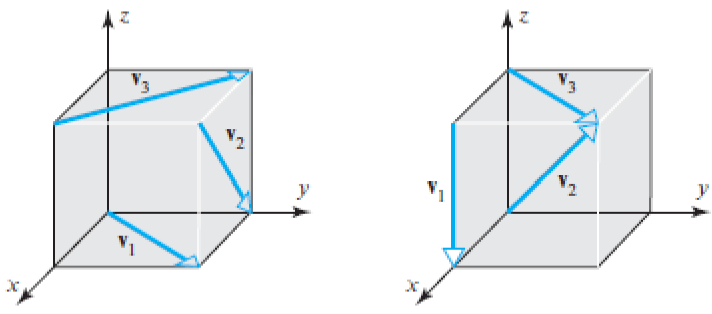
$$v_{t_3} = \alpha \cdot v_{t_1} + \beta \cdot v_{t_2}$$

Insa doi vectori v_{t_1} si v_{t_2} cu originea comuna, liniar independenti, genereaza prin combinatii liniare un plan. Prin urmare v_{t_3} se afla in acelasi plan cu acestia! Asadar punctele X, P_1, P_2, P_3 sunt coplanare. Dar un plan, care nu contine elipsa (Cape Canaveral nu se afla pe ecuator), intersecteaza elipsa in cel mult doua puncte. Contradictie ! Punctele P_1, P_2, P_3 nu pot fi toate pe elipsa, deci satelitul nu se deplaseaza dupa cum a fost programat. Asadar sistemul de navigatie este defect.

Probleme propuse

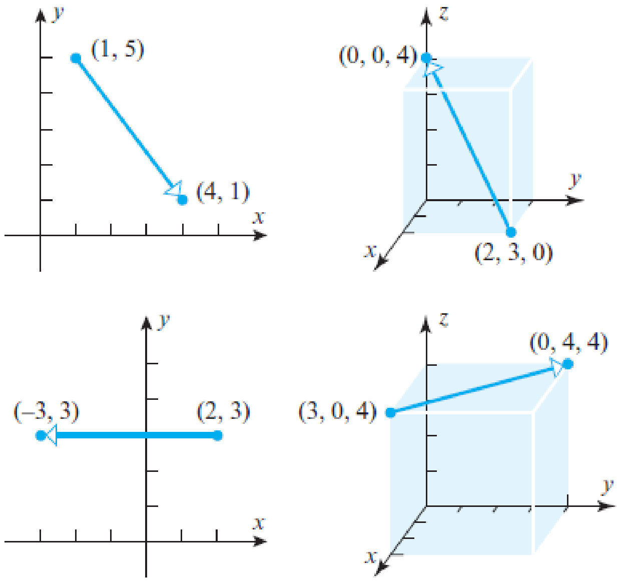
A. Consolidare cunostinte

Problema A.1. *Sunt vectorii v_1, v_2, v_3 liniar independenti ? Discutati cele doua cazuri prezentate mai jos.*



(a) (b)

Problema A.2. *Aflati componentele vectorilor din figurile de mai jos:*



Problema A.3. *Descompuneti vectorul* $v = (1, 1)$ *dupa directiile generate de vectorii* $v_1 = (2, 1)$ *si* $v_2 = (3, 0)$*, intai folosind argumente grafice apoi algebrice.*

Problema A.4. *Fie* v_1*,* v_2 *si* v_3 *vectori liniar independenti din* $\mathbb{R}^n$*. Consideram vectorii* $w_1 = v_2 - v_1$*,* $w_2 = v_3 - v_2$*,* $w_3 = v_1 - v_3$*. Sunt* w_1, w_2 *si* w_3 *liniar independenti ? Argumentati.*

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Aratati ca multimea:*

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - 3y + z - t = 0\}$$

impreuna cu adunarea si inmultirea cu scalari obisnuite din $\mathbb{R}^4$ *formeaza un spatiu vectorial. (Un hiperplan, care contine originea in 4D, este subspatiu vectorial)*

Problema B.2. *Sa se studieze daca urmatoarele sisteme de vectori sunt liniar independente. In caz contrar, sa se determine un subsistem* S' *maximal liniar independent, precum si dependenta liniara a acestora:*

a) $S = \{p_1 = -X^2 + 7X + 8,\ p_2 = -X^2 + 3X + 2,\ p_3 = X^2 - X + 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$.

b) $S = \{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1.0, 2), v_3 = (0, 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$

Problema B.3. *Sa se studieze care din sistemele de vectori date sunt sisteme de generatori pentru spatiile mentionate:*

a) $S = \{p_1 = X^2 + X + 1, p_2 = X^2 + X, p_3 = X^2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$

b) $S = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{2,1}(\mathbb{R})$

c) $S = \{v_1 = (i, 0, i), v_2 = (0, -i, 0), v_3 = (2i, -i, 2i)\} \subset \mathbb{C}^3$.

Problema B.4. *Fie sistemele de vectori:*

$$B_1 = \{f_1 = (1, 1, 0), \quad f_2 = (1, 0, 0), \quad f_3 = (1, 1, 2)\}$$

$$B_2 = \{g_1 = (1, 1, 3), \quad g_2 = (1, 1, 2), \quad g_3 = (3, 2, 4)\}.$$

a) Aratati ca B_1 si B_2 sunt baze ale spatiului vectorial $\mathbb{R}^3$

b) Aflati matricea de trecere $T_{B_1 B_2}$

c) Sa se determine coordonatele vectorului v relativ la baza B_1 daca acesta este dat prin $v = -2g_1 + g_2 + 3g_3$.

Problema B.5. *Fie baza $B = \{v_1 = (2, 1), v_2 = (3, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$. Se cere:*

a) Sa se determine baza $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ stiind ca $T_{BB_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

a) Sa se determine baza $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ stiind ca $T_{B_2 B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

Problema B.6. *Sa se arate ca urmatorii vectori $v_1 = (1, -1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ si $v_3 = (1, 0, 0)$ formeaza o baza pentru $\mathbb{R}^3$ si sa se determine coordonatele vectorului $u = (1, 2, 3)$ in aceasta baza.*

Problema B.7. *Aratati ca vectorul $v = (1, 2, 3)$ apartine spatiilor vectoriale $V_1 = span\{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ $V_2 = span\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ dar nu apartine spatiului $V_3 = span\{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (3, 1, 1)\}$.*

Problema B.8. *Fie colectia de vectori*

$$S = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, 2, 1), v_3 = (1, -2, -3)\} \subset \mathbb{R}^3$$

i) Studiati daca multimea este liniar dependenta si daca este gasiti o relatie de dependenta intre vectori

ii) Gasiti submultimea maximala a lui S care este liniar independenta si extindeti-o la o baza al lui $\mathbb{R}^3$

iii) Gasiti matricea de tranzitie de la aceasta baza la baza canonica din $\mathbb{R}^3$

Problema B.9. *Fie* $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ *o submultime a lui* $\mathbb{R}^2$. *Aratati ca* V *nu e susbspatiu liniar a lui* $\mathbb{R}^2$.

Problema B.10. *Aratati ca multimea*

$$B = \{p_k = C_3^k x^k (1-x)^{3-k} : \ k = 0, 1, 2, 3\}$$

este o baza a lui $\mathbb{R}_3[X]$ *(baza Bernstein). Gasiti matricea de tranzitie de la baza* B *la baza canonica* B_c *a lui* $\mathbb{R}_3[X]$. *Gasiti coordonatele* $[p]_B$ *ale polinomului* $p = -5 + 2t - 3t^2 - t^3$ *relativ la baza Bernstein.*

Problema B.11. *Un spatiu vectorial* V *se numeste suma directa a subspatiilor* U *si* W, *si notam* $V = U \oplus W$, *daca fiecare vector* v *din* V *poate fi exprimat in mod unic* $v = u + w$ *unde* u *este vector din* U *si* w *este un vector din* W.

(a) *Aratati ca* $V = U \oplus W$ *daca si numai daca orice vector din* V *este suma unui vector din* U *si a unuia din* W *si* $U \cap W = \{\bar{0}\}$

(b) *Fie* U *planul* Oxy *si* W *axa* Oz *din* $\mathbb{R}^3$. *Este adevarat ca* $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$*? Argumentati.*

(c) *Fie* U *planul* Oxy *si* W *planul* Oyz. *Putem exprima orice vector din* $\mathbb{R}^3$ *ca un vector din* U *si unul din* W *? E adevarat ca* $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ *? Explicati.*

Problema B.12. *Aratati ca intr-un spatiu patru dimensional doua plane pot avea intersectia formata dintr-un singur punct.*

Hint: Alegeti $\mathbb{R}^4$ cu imaginea $Oxyzt$ si planele Oxy (subspatiul U), respectiv planul Ozt (subspatiul W) si argumentati ca $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Problema B.13. *In spatiul vectorial infinit dimensional* $V = C^\infty(\mathbb{R})$, *al functiilor infinit derivabile, construiti* 2020 *de functii care sunt liniar independente. Oferiti cel putin doua solutii diferite. Aratati ca functiile* $f_1(x) = \sin x$ *si* $f_2(x) = \cos x$ *sunt liniar independente in* $C^\infty(\mathbb{R})$.

Problema B.14. *Determinati care dintre urmatoarele multimi sunt subspatii ale lui* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*:*

i) Multimea matricelor $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *pentru care* $det(A) = 0$

ii) Multimea matricelor $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *cu proprietatea* $AB = BA$ *pentru o matrice fixata* $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

iii) Multimea matricelor $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *cu prorietatea* $tr(A) = 0$

iv) Multimea matricelor $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *cu proprietatea* $A^t = -A$

Problema B.15. *Daca* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *are proprietatea* $det(A) = 0$. *Folosind liniar independenta aratati ca exista o matrice* $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $X \neq O_n$ *astfel ca* $AX = XA = O_n$.

Problema B.16. *Fie matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aratati ca:

i) *multimea*

$$col(A) = span\{c_1, c_2, c_2\}$$

unde c_1, c_2, c_2 *sunt coloanele lui* A*, este un spatiu vectorial de dimensiune* $rang(A)$*.*

ii) *sistemul* $A\bar{x} = \bar{b}$*, unde* $\bar{x}, \bar{b} \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$ *este compatibil daca si numai daca* $\bar{b} \in col(A)$*.*

C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

Problema C.1. *Spatiul vectorial* $H = span\{1, cos^2 t, \cos^4 t, \cos^6 t\}$ *contine functiile:*

i) $f(t) = 1 - 8\cos^2 t + 8\cos^4 t$

ii) $g(t) = -1 + 18\cos^2 t - 48\cos^4 t + 32\cos^6 t.$

Studiati graficele lui f *si* g *pe* $0 \le t \le 2\pi$ *si incercati sa gasiti o formula simpla pentru aceste doua functii.*

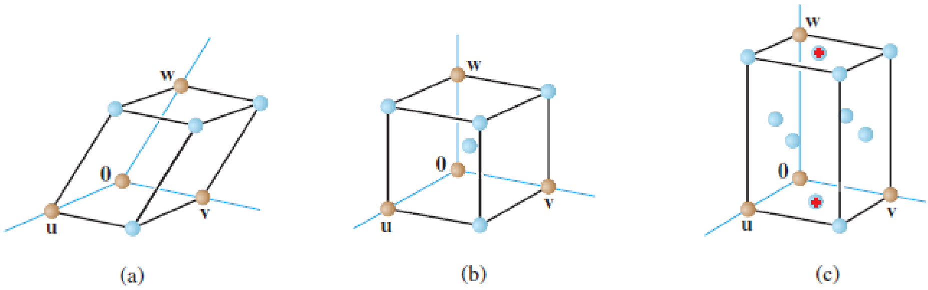
Indicatie: puteti folosi site-ul acesta pentru a trasa grafice.

Problema C.2. *Vom numi matrice tabla de sah matricea* $A = (a_{ij})$ *cu elementele*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & daca\ i+j\ par \\ 0, & daca\ i+j\ impar \end{cases}$$

Aflati rangul unei matrice 3×3 *tabla de sah. Aflati rangul unei matrice* $n \times n$ *tabla de sah.*

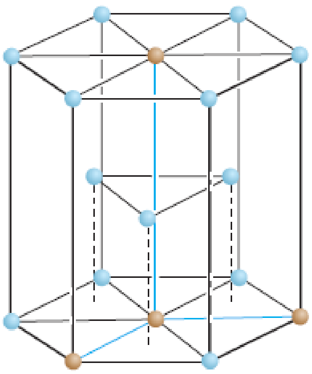
Cristalografie: O structura cristalina este o aranjare (dispunere) generala unica a atomilor sau moleculelor unei substanțe solide sau lichide cristaline. O structura cristalina este compusa din blocuri sau grupuri model de atomi (sau molecule), dispusi (dispuse) intr-un mod particular si o rețea tridimensional extinsa incluzand respectivele blocuri tipice, retea ce prezintă in general, ordonare și simetrie. Blocurile model (cristalele) sunt astfel structurate in nodurile rețelei incat se formează un sistem ordonat matricial tridimensional.

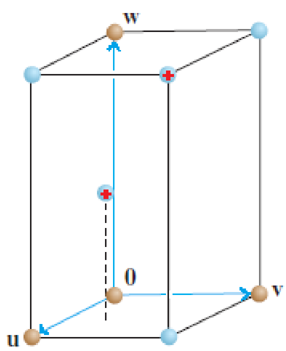


In cristalografie, descrierea unei latice cristaline se face prin alegerea unei baze $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ din $\mathbb{R}^3$, care corespunde unor muchii adiacente ale unei "celule unitate" a cristalului. O latice completa se obtine prin lipirea a mai multor astfel de celule unitate. Sunt 14 posibile celule unitate si trei dintre ele sunt prezentate mai sus. Un atom este localizat dupa coordonatele sale relativ la baza laticei. Spre exemplu, atomul aflat in centrul fetei de sus a celulei **(c)** are coordonatele $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ iar cel din centrul fetei de jos este localizat la $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Problema C.3. *In figura de mai jos este prezentata laticea cristalina pentru titaniu, care are forma hexagonala prezentata in stanga. Vectorii reprezentati in dreapta* $\boldsymbol{u} = (2.6, -1.5, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 3, 0)$ *si* $\boldsymbol{w} = (0, 0, 4.8)$ *formeaza o baza pentru celula prezentata in stanga. Unitatea de masura prezentata aici este Angstrom-ul (1 A= 10^{-8} cm). In aliaje de titaniu pot aparea diversi atomi in celula unitate, formand retele octaedrale sau tetraedrale, dupa cum apare in imaginea din stanga.*

Un atom aflat in reteaua octaedrala are coordonatele $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ *relativ la baza* $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ *a laticei cristaline. Aflati coordonatele sale relativ la baza canonica din* $\mathbb{R}^3$*. Aceeasi problema pentru un atom din reteaua tetraedrala care este localizat la* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ *relativ la baza laticei.*





Bibliografie

[1] H. Anton, C. Rorres. *Elementary Linear Algebra. Applications Version* Wiley, 2014.

[2] O. Bundau, A. Juratoni *Exercitii si probleme de algebra liniara*, Ed. Politehnica, 2012.

[3] D. Lay. *Linear Algebra and its Applications*, Addison-Wesley, 2012.