Übungsblatt 9

Aufgabe 1. *Werten Sie die iterierten Integrale aus:*

i) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x-y)\ dxdydz$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy\ dzdxdy$

Lösung: Ambele integrale sunt exemple de integrale interate careapar atunci cand trebuie sa evaluam o integrala tripla. Daca va amintiti in cazul integralelor duble prima variabila varia intre capete fixe iar a doua intre capete variabile care depindeau de prima variabila. Sa luam exemplul

$$I = \int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x-y)\ dxdydz$$

se observa ca variabila z variaza intre 0 si 2 apoi variabila y intre 0 si z^2 si in final x variaza intre 0 si $y-z$. Asadar noutatea este ca in cazul integralelor triple ultima variabila va varia intre limite care depind de primele doua. Calculul unei astfel de integrale se face la fel ca si in cazul integralelor iterate rezultate din integrale duble si anume de la interior spre exterior.

Incepem cu $\displaystyle\int_0^{y-z} 2x-y\ dx$, unde x este variabila si celelalte valori trebuie vizualizate ca fiind constante

$$\int_0^{y-z} 2x-y\ dx = 2\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{y-2} - yx\Big|_0^{y-z} = (y-z)^2 - y(y-z)$$

Apoi inocuind in integrala I, se impune sa calculam

$$\begin{aligned}\int_0^{z^2} (y-z)^2 - y(y-z)\ dy &= \int_0^{z^2} y^2 - 2yz + z^2 - y^2 + yz\ dy \\ &= \int_0^{z^2} -yz + z^2\ dy = -\frac{y^2}{2}z\Big|_0^{z^2} + z^2 y\Big|_0^{z^2} \\ &= \frac{z^4}{2}\end{aligned}$$

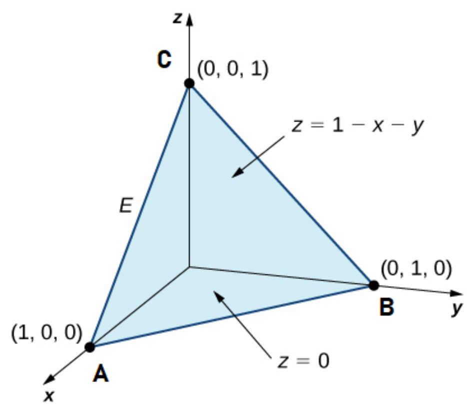
In final

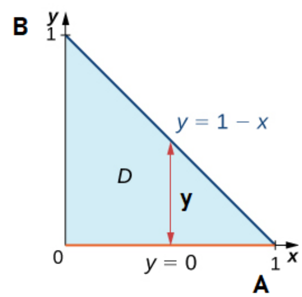
$$I = \int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x-y)\ dxdydz = \int_0^2 \frac{z^4}{2}\ dz = \frac{z^5}{10}\Big|_0^2 = \frac{32}{10}$$

Aufgabe 2. *Sei E der Körper, der durch die Ebenen $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ begrenzt ist. Berechnen Sie das Integral*

$$\iiint_E xyz \, dV.$$

Lösung: Trebuie sa il reprezentam pe E ca o regiune solida de tip 1,2 sau 3. Inainte de toate o reprezentare grafica a lui E este foarte utila.





Se obtine la un colt al unui cub, un triedru cu muchii de 1 unitate. Pentru a-l exprima ca pe o regiune solida nu trebuie decat sa il proiectam pe unul dintre planele de coordonate si sa fim atenti le proectia D obtinuta.

De exemplu daca il proiectam pe E pe planul Oxy de la baza este evident ca proiectia ca fi un triunghi marginit de axe si avand varfurile in punctele $(1, 0, 0)$ si $(0, 1, 0)$. Deoarece atunci cand proiectam pe planul Oxy se anuleaza coordonata z, putem face abstractie de ea in acel plan. Asadar D va fi triunghiul format de origine si punctele $\mathbf{A}(1, 0)$, respectiv $\mathbf{B}(0, 1)$ in planul Oxy.

Incercam acum sa il scriem pe D ca pe un domeniu simplu in raport cu axele. Se observa ca daca alegem $0 \le x \le 1$, vom avea $0 \le y \le f(x)$ unde $y = f(x)$ este ecuatia frontierei de sus, si anume dreapta AB.

Se obtine usor

$$AB: \ \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{1-0}$$

$$AB: \ y = 1 - x = f(x)$$

deci D poate fi exprimat ca un domeniu simplu in raport cu Ox prin

$$D = \{(x, y): \ 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 1 - x\}$$

Apoi nu trebuie decat sa ne concentram atentia asupra frontierelor care marginesc pe z. Se observa ca z este marginit jos de catre planul $z = 0$ (care este ecuati planului Oxy) iar sus se afla planul $x + y + z = 1$ care din punctul de vedere al lui z este $z = 1 - x - y$. Prin urmare E poate fi exprimat ca o regiune solida prin

$$E = \{(x,y,z):\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1-x,\ \ 0 \le z \le 1-x-y\}$$

In acest moment teoria integralelor triple ne trimite la integrale iterate de tipul celor calculate la problema anterioara

$$\iiint_E xyz\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz\ dzdydx$$

care se evalueaza urmand aceiasi pasi.

Aufgabe 3. *Berechnen Sie das Dreifachintegral*

$$\iiint\limits_E (x+y+z)\ dV$$

wobei E der Würfel mit Seite 1 ist.

Lösung: Din punct de vedere al integrarii, integrarea pe un cub nu este problematica deoarece cubul unitate, spre exemplu, este descris matematic prin multimea

$$E = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$$

Asadar

$$\iiint\limits_E (x+y+z)\ dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x+y+z\ dxdydz$$

Din nou incepem sa evaluam integralele pornind dinspre interior

$$\int_0^1 x+y+z\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + yx\Big|_0^1 + zx\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + y + z$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2} + y + z\ dy = \frac{1}{2}y\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 + zx\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + z = 1 + z$$

In final obtinem

$$\iiint\limits_E (x+y+z)\ dV = \int_0^1 1+z\ dz = z\Big|_0^1 + \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

Se poate testa, folosind integrala tripla, faptul cunoscut ca volumul unui zar cu latura de 1 unitate este 1 unitate^3

$$vol(E) = \iiint_E 1\ dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1\ dxdydz = 1$$