

KLAUSUR 1

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Integrale

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$J = \int_3^6 \sqrt{x-2} dx$$

$$K = \int \frac{x}{x+4} dx$$

2 Punkte

Solutie: Pentru I se aplica integrarea prin parti

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 (\ln x)' \ln x dx = \ln x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \ln x \frac{1}{x} dx$$

deci

$$2I = \ln 2^2$$

si in final

$$I = \frac{\ln 2}{2}$$

Pentru J se aplica schimbarea de variabila  $y = x - 2$  si se obtine  $dy = dx$  apoi

$$\int_3^6 \sqrt{x-2} dx = \int_{3-2}^{6-2} \sqrt{y} dy = \int_1^4 y^{1/2} dy = \frac{y^{3/2}}{3/2} \Big|_1^4 = etc$$

Pentru K trebuie observata descompunerea

$$\frac{x}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4}$$

si astfel

$$K = \int 1 - \frac{4}{x+4} dx = x + 4 \ln|x+4| + C$$

facand si o schimbare de variabila  $y = x + 4$ .

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Interale auf Konvergenz

$$I = \int_1^\infty \frac{x^2}{x^4 + \frac{1}{x}} dx$$

$$J = \int_0^\infty e^{-2x} dx$$

Solutie: Pentru I se rescrie integrandul sub forma

$$\frac{x^2}{x^4 + \frac{1}{x}} = \frac{x^3}{x^5 + 1}$$

si se compara cu integrala  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  care este convergenta caci  $p = 2 > 1$ . Se foloseste criteriul limitei.

Pentru  $J$  se aplica definitia integralei generalizate

$$J = \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} e^{-2x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-2x}}{-2} \right|_0^{\beta} = \frac{1}{2}$$

deci integrala este convergenta.

2 Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Integrale

$$I = \int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^4} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

2 Punkte

*Solutie:* Pentru  $I$  se aplica schimbarea de variabila  $y = x^4$  si apoi se incearca exprimarea integralei in functie de functia  $\Gamma$ , vezi cursul si fisa seminarului 3

Pentru  $J$  se poate reduce totul la o expresie care contine functia  $\beta$ , vezi fisa aceluiasi seminar/curs, sau se poate aplica o schimbare de variabila

$$y = \sin x$$

caci

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx$$

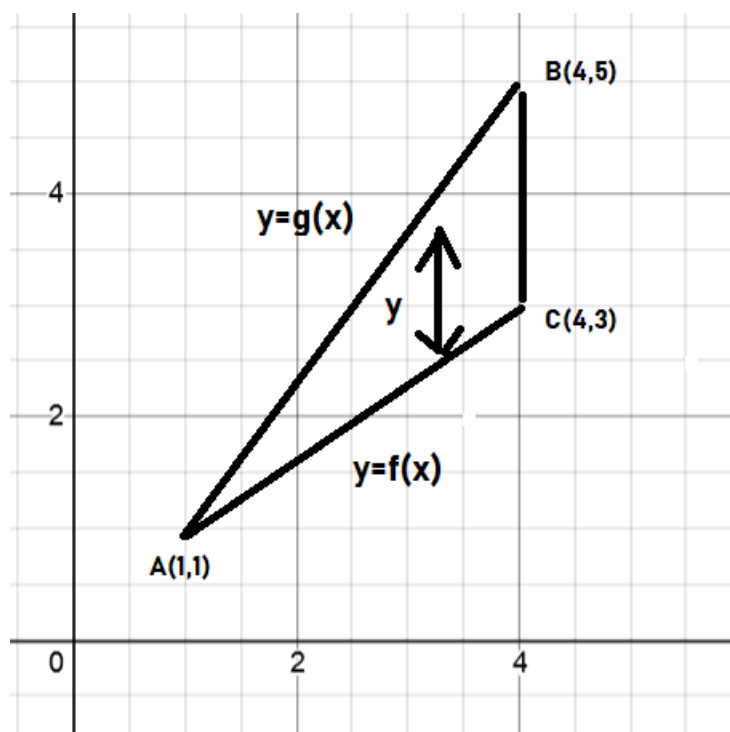
Aufgabe 4. Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

uber dem Dreiecksbereich mit den Eckpunkten  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 5)$ ,  $C(4, 3)$ .

2 Punkte

*Solutie:*



Se poate scrie domeniul D, pe care trebuie integrat, sub forma unuia simplu in raport cu axa Ox

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

unde  $f(x)$  si  $g(x)$  se afla dupa ce obtinem ecuatiile dreptelor AC si respectiv AB pe care le vom rescrie apoi sub forma  $y = f(x)$ , respectiv  $y = g(x)$

De exemplu

$$AB : \frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{5-1}$$

$$AB : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}$$

care din punctul de vedere al lui  $y$  se scrie

$$AB : y = 4 \frac{x-1}{3} + 1$$

deci  $g(x) = 4 \frac{x-1}{3} + 1$ .

Dupa aflarea lui  $f(x)$  se aplica formula

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_1^4 \left( \int_{f(x)}^{g(x)} xy \, dy \right) dx$$

din cursul despre integrale duble.