KLAUSUR 1

Aufgabe 1. *Berechnen Sie folgende Integrale*

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\ dx$$

$$J = \int_3^6 \sqrt{x-2}\ dx$$

$$K = \int \frac{x}{x+4}\ dx$$

2 *Punkte*

Solutie: Pentru I se aplica integrarea prin parti

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\ dx = \int_1^2 (\ln x)' \ln x\ dx = \ln x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \ln x \frac{1}{x}\ dx$$

deci

$$2I = \ln 2^2$$

si in final

$$I = \frac{\ln 2}{2}$$

Pentru J se aplica schimbarea de variabila $y = x - 2$ si se obtine $dy = dx$ apoi

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\ dx = \int_{3-2}^{6-2} \sqrt{y}\ dy = \int_1^4 y^{1/2}\ dy = \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_1^4 = etc$$

Pentru K trebuie observata descompunerea

$$\frac{x}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4}$$

si astfel

$$K = \int 1 - \frac{4}{x+4}\ dx = x + 4\ln|x+4| + C$$

facand si o schimbare de variabila $y = x + 4$.

Aufgabe 2. *Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Interale auf Konvergenz*

$$I = \int_1^\infty \frac{x^2}{x^4 + \frac{1}{x}}\ dx$$

$$J = \int_0^\infty e^{-2x}\ dx$$

Solutie: Pentru I se rescrie integrandul sub forma

$$\frac{x^2}{x^4 + \frac{1}{x}} = \frac{x^3}{x^5 + 1}$$

si se compara cu integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx$ care este convergenta caci $p = 2 > 1$. Se foloseste criteriul limitei.

Pentru J se aplica definitia integralei generalizate

$$J = \int_0^\infty e^{-2x}\ dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{\beta\to\infty} \left.\frac{e^{-2x}}{-2}\right|_0^\beta = \frac{1}{2}$$

deci integrala este convergenta.

2 *Punkte*

Aufgabe 3. *Berechnen Sie die Integrale*

$$I = \int_0^\infty x^{10} e^{-x^4}\ dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ dx$$

2 *Punkte*

Solutie: Pentru I se aplica schimbarea de variabila $y = x^4$ si apoi se incearca exprimarea integralei in functie de functia Γ, vezi cursul si fisa seminarului 3

Pentru J se poate reduce totul la o expresie care contine functia β, vezi fisa aceluiasi seminar/curs, sau se poate aplica o schimbare de variabila

$$y = \sin x$$

caci

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x)\ dx$$

Aufgabe 4. *Berechnen Sie das Integral der Funktion*

$$f(x, y) = xy$$

uber dem Dreiecksbereich mit den Eckpunkten $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(4,3)$.

2 *Punkte*

Solutie: Se poate scrie domeniul D pe care trebuie integrat sub forma unuia simplu in raport cu axa OX

$$D = \{(x, y) : 1 \le x \le 4, f(x) \le y \le g(x)\}$$

unde $f(x)$ si $g(x)$ se afla dupa ce obtinem ecuatiile dreptelor AC si respectiv AB pe care le vom rescrie apoi sub forma $y = f(x)$, respectiv $y = g(x)$

De exemplu

$$AB: \ \frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{5-1}$$

$$AB: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}$$

care din punctul de vedere al lui y se scrie

$$AB: \ y = 4\frac{x-1}{3} + 1$$

deci $g(x) = 4\frac{x-1}{3} + 1$.

Dupa aflarea lui $f(x)$ se aplica formula

$$\iint_D xy\ dx\ dy = \int_1^4 \left(\int_{f(x)}^{g(x)} xy\ dy \right)\ dx$$

din cursul despre integrale duble.