"Gibt es etwa eine bessere Motivation als den Erfolg?."

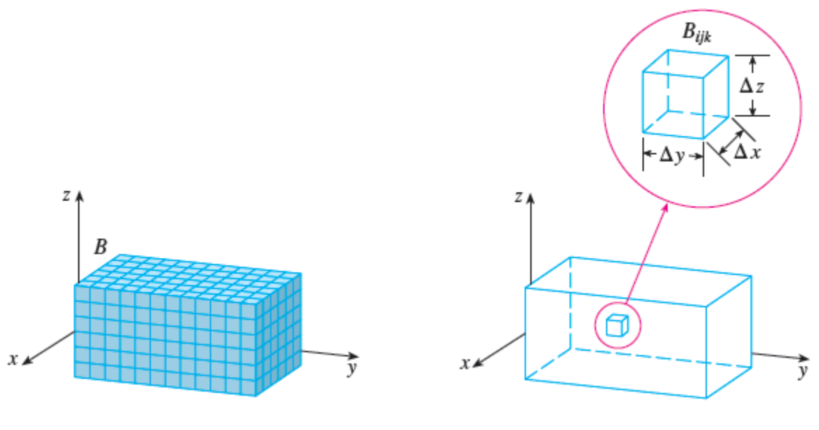
Ion Tiriac

9
Das Dreifachintegral

Ähnlich wie im zweindimensionalen Fall definieren wir das Dreifachintegral für eine Funktion f mit drei Variablen. Sei f definiert auf dem Quader:

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Wir zerlegen B durch achsenparallele Strecken in viele kleine Teilquader. Um eine solche Zerlegung zu schaffen, betrachtet man eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in l Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit Breite Δx, eine Zerlegung des Intervalls $[c,d]$ in m Teilintervalle $[y_{j-1}, y_j]$ mit Breite Δy, und eine Zerlegung des Intervalls $[r,s]$ in n Teilintervalle $[z_{k-1}, z_k]$ mit Breite Δz.



$$\begin{aligned} B_{ijk} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \\ &= \{(x,y,z) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k\}, \end{aligned}$$

jeder mit dem selben Volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Zunächst bilden wir die Riemann-Summe:

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \cdot \Delta V$$

wobei der beliebigen Punkt $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ in B_{ijk} liegt.

Definition: *Das Dreifachintegral*
Wir definieren das Dreifachintegral einer Funktion f über einen Quader B als:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, x_{ijk}^*) \cdot \Delta V$$

ob dieser Grenzwert existiert.

Bemerkungen:

- Das mathematische Objekt dV heisst das Volumenelement.

Satz von Fubini für Dreifachintegrale:
Sei f stetig auf dem Quader $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, dann gilt:

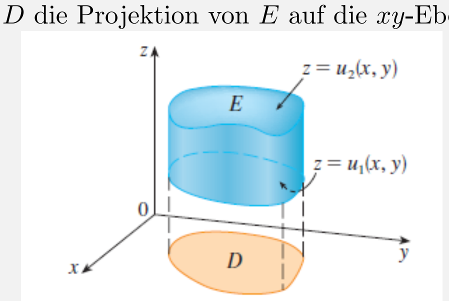
$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[r,s]} f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)dzdydx$$

Wir verallgemeinern den obigen Fall und zunächst integrieren wir über allgemeinere Mengen. Vergleichen Sie mit dem Fall des Doppelintegrals.

Solide Regionen 1. Art:
Eine solide Region E heisst von erster Art wenn:

$$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \quad u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

wobei D die Projektion von E auf die xy-Ebene ist.

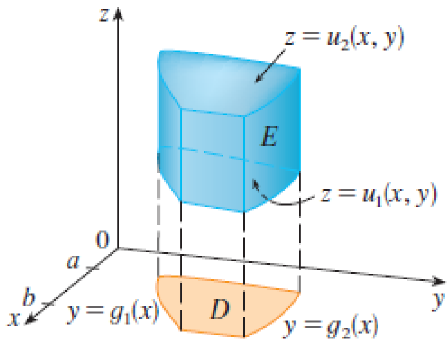


und dann:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

Speziell wenn D ein Normalgebiet bezüglich x ist:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

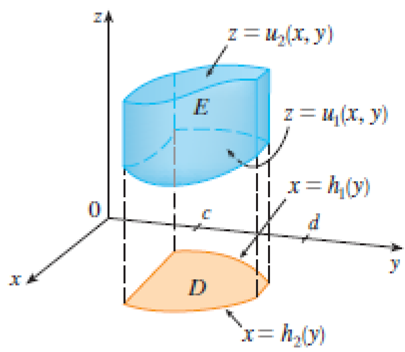


Dann:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Wenn D ein Normalgebiet bezüglich y ist:

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \quad h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\}$$



Dann:

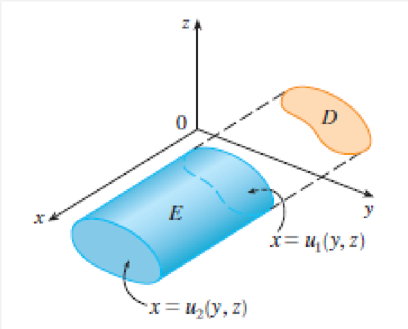
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Die anderen Möglichleiten sind änlich definiert:

Solide Regionen 2. Art:
Eine solide Region E heisst von zweiter Art wenn:

$$E = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, \quad u_1(y, z) \le x \le u_2(y, z)\}$$

wobei D die Projektion von E auf die yz-Ebene ist.



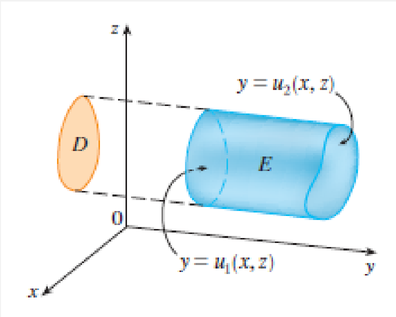
und dann:

$$\iiint\limits_E f(x, y, z) dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

Solide Regionen 3. Art:
Eine solide Region E heisst von dritter Art wenn:

$$E = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, \quad u_1(x, z) \le y \le u_2(x, z)\}$$

wobei D die Projektion von E auf die xz-Ebene ist.



und dann:

$$\iiint\limits_E f(x, y, z) dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

Grundeigenschaften von Dreifachintegralen:

(i) das Dreifachintegral ist eine lineare Abbildung:

$$\iiint_E \alpha f + \beta g \; dV = \alpha \cdot \iiint_E f \; dV + \beta \cdot \iiint_E g \; dV$$

(ii)

$$\iiint_E 1 \; dV = \mathcal{V}(E), \quad E \in \mathbb{R}^3 \text{ beschränkt },$$

wobei $\mathcal{V}(E)$ das Volumen von E ist .

(iii) für $f \leq g$ gilt:

$$\iiint_E f \; dV \leq \iiint_E g \; dV.$$

Additivität des Dreifachintegrals:
Man kann den Integrationsbereich E in kleinere, nicht überlappende bereiche E_1, E_2 aufteilen. Da f auf E stetig ist, ist f auch auf allen E_1, E_2 stetig. Es ist dann:

$$\iiint_{E_1 \cup E_2} f(x,y,z) dV = \iiint_{E_1} f(x,y,z) dV + \iiint_{E_2} f(x,y,z) dV$$

Bemerkungen:

Im Allgemeinen: eine Verallgemeinerung der soliden Regionen sind die regulären Menge $E \subset \mathbb{R}^3$:

- die Menge E ist selbst abgeschlossen und beschränkt
- ihr Inneres $int(E)$ nicht leer ist
- ihr Rand aus endlich vielen stückweise glatten Kurven besteht.

Integration durch Substitution:
Entsteht der reguläre Bereich $E \subset \mathbb{R}^3$ unter der Koordinaten-transformation $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w)$ aus B, dann gilt für jede auf E stetige Funktion f die Transformationsformel:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iiint_B f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

wobei:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Anwendungen der Dreifachintegrale

Gegeben sei ein Körper $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und seine Massendichte $\rho(x,y,z)$. Die Gesamtmasse des Körpers ist:

$$M = \iiint_B \rho(x,y,z)\ dxdydz$$

Der Schwerpunkt $G(x_G, y_G, z_G)$ des Körpers hat die Koordinaten:

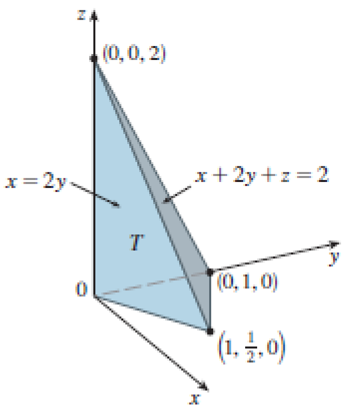
$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_B x \cdot \rho(x,y,z)\ dV,$$
$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_B y \cdot \rho(x,y,z)\ dV,$$
$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_B z \cdot \rho(x,y,z)\ dV$$

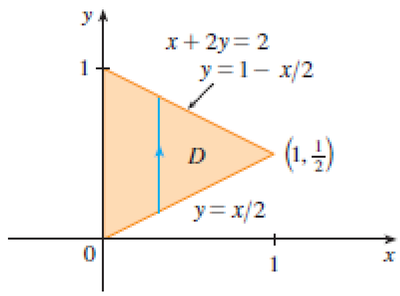
Übungen mit Lösungen

Aufgabe 1. *Mit Hilfe eines Dreifachintegrals berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, das durch die Ebenen $x + 2y + z = 2$, $x = 0$ und $z = 0$ begrenzt ist.*

Lösung: Das Tetraeder T und seine Projektion auf die xy-Ebene sind im folgenden Bild dargestellt. Die untere Grenze von T ist die Ebene $z = 0$ und die obene Grenze ist die Ebene $x + 2y + z = 2$, also $z = 2 - 2y - x$. Das Tetraeder ist eine solide Region erster Art:

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq 2 - 2y - x\}$$





Die Projektion D auf die xy-Ebene ist ein Normalgebiet bezüglich x:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\}$$

Diese zieht nach sich:

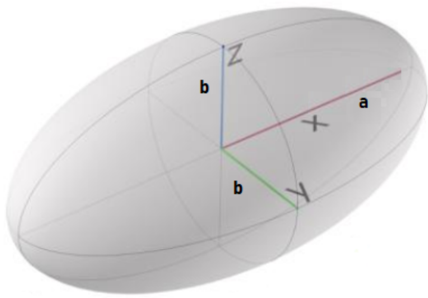
$$\begin{aligned} Vol\,(T) &= \iiint_T 1 dV = \iint_D \left[\int_0^{2-2y-x} 1 dz\right] dA \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} \int_0^{2-2y-x} 1 \; dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} 2 - 2y - x \; dydx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. *Berechnen Sie das Volumen eines Rugbyballs.*

Lösung: Ein Ellipsoid

$$R : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

mit $a > b$ ist die mathematishe Formel eines Rugbyballs



Unter der Koordinaten-transformation

$$\begin{cases} x = a \cdot u \\ y = b \cdot v \\ z = b \cdot w \end{cases}$$

der Rugbyball die EinheitsKugel wird

$$B: \; u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

Das Volumen einer Kugel mit Radius R ist $vol = \frac{4\pi}{3} R^3$, deshalb hat die Einheistkugel das Volumen $\frac{4\pi}{3}$. Die Integration durch Substitution gibt das Volumen des Rugbyballs

$$vol(R) = \iiint\limits_R 1 \; dV = \iiint\limits_B \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

wobei

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = ab^2$$

Schliesslich

$$vol(R) = \iiint\limits_B ab^2 \; dudvdw = ab^2 \iiint\limits_B 1 \; dudvdw = ab^2 vol(B) = ab^2 \frac{4\pi}{3}$$

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. *Werten Sie die iterierten Integrale aus:*

i) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x-y)\ dxdydz$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy\ dzdxdy$

Aufgabe 2. *Sei E der Körper, der durch die Ebenen $x+y+z=1, x=0$, $y=0$ und $z=0$ begrenzt ist. Berechnen Sie das Integral:*

$$\iiint\limits_E xyzdV.$$

Aufgabe 3. *Berechnen Sie das Dreifachintegral:*

$$\iiint\limits_E (x+y+z)dV$$

wobei E der Würfel mit Seite 1 ist.

Aufgabe 4. *Sei E der Körper, der durch die Flächen $x^2+y^2+z^2=1, x=0$, $y=0$ und $z=0$ begrenzt ist. Berechnen Sie das Integral:*

$$\iiint\limits_E xyzdV.$$

Aufgabe 5. *Brechnen Sie das Integral:*

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dV$$

wobei E die Kugel $x^2+y^2+z^2=z$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] J. Stewart. Calculus, *Thompson Brooks/Cole*, 2008.

[2] D. Ferus. Analysis II für Ingenieure, *Technische Universität Berlin*, 2007.

[3] C. I. Hedrea. Curs de Matematici speciale, 2016.

[4] O. Lipovan. Analiza matematica: Calcul Integral, *Editura Politehnica*, 2006.

Literaturverzeichnis