"De cand matematicienii au invadat teoria relativitatii, nu o mai inteleg nici eu."

Albert Einstein

6

Transformari integrale

Vibratiile muzicii

Orice sunet, indiferent de sursa, este cauzat de ceva care vibreaza. Fara vibratie nu exista sunet. Aceasta vibratie determina particulele de aer aflate in apropierea sursei sa vibreze si ele, iar acestea la randul lor le determina pe cele din apropierea lor sa vibreze creand in final ceea ce numim unda sonora.

La fel ca un val al marii, cu cat se misca unda sonora mai departe cu atat devine mai slaba, pana ce in cele din urma dispare. Daca vibratia initiala cauzeaza o unda suficient de puternica va ajunge la urechile noastre si va fi inregistrata ca un sunet. Auzim un sunet pentru ca aerul vibreaza impotriva timpanelor urechii, care la randul lor vor vibra. Aceste vibratii sunt apoi analizate de catre creier si sunt inregistrate ca fiind muzica, zgomot de trafic, pasari care canta, etc. Deoarece undele sonore sunt culese de timpanele fiecaruia si interpretate de catre creier, sunt sanse mari ca nimeni sa nu auda acelasi sunet in acelasi mod in care il aud altii. Orice vibratie completa a undei sonore se numeste ciclu. Numarul de cicluri realizate intr-o secunda se numeste frecventa vibratiei. Una dintre diferentele perceptibile dintre doua sunete consta in inaltimea sunetului. O vibratie de frecventa mare va produce o nota mai inalta iar o vibratie de frecventa mai mica va produce o nota mai joasa.

Frecventa este masurata in hertzi, un hertz insemnand un ciclu pe secunda. Urechea umana poate percepe sunetele cuprinse intre 16 Hz si 16 kHz. Frecventele notelor, care pot fi cantate la un pian, sunt cuprinse intre 27.5 Hz si 4kHz. Nota produsa de un diapazon se numeste ton pur, deoarece consta dintr-un ton care suna la o singura frecventa. Sunetul instrumentelor provine de la tonuri diferite care suna la diverse frecvente. Chiar si o singura nota cantata la un pian e formata, de fapt, din multiple tonuri care suna impreuna la frecvente usor diferite.

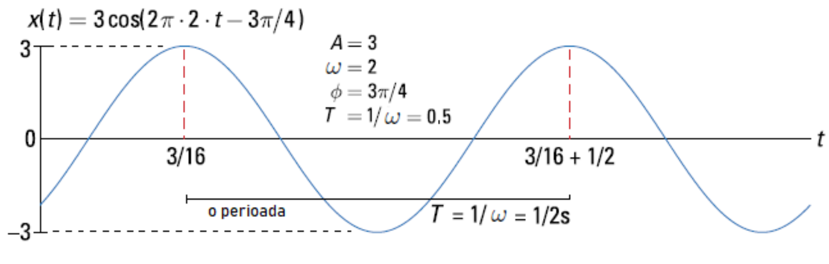
Sa examinam indeaproape unul dintre cele mai elementare semnale, *semnalul sinusoidal (cosinusoidal)* care produce tonurile pure:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos(2\pi\omega t + \phi)$$

unde A reprezinta amplitudinea semnalului (valoarea maxima pe care o poate avea vibratia, masurata din pozitia de echilibru), ω_0 este frecventa angulara sau radiana masurata in radiani/secunda. Apoi ω este frecventa (Hz) si ϕ este faza initiala (rad). Avem relatiile evidente $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\omega$ si $\omega = \frac{1}{T}$, unde T este perioada semnalului (s). Putem la fel de bine folosi functia sinus pentru a reprezenta matematic un semnal sinusoidal.

Daca semnalul de mai sus este considerat ca fiind un semnal audio atunci valoarea $x(t)$ indica schimbarile de presiune in urechile noastre ca functie de timp. O valoare negativa semnifica o presiune situata sub presiunea mediului ambient iar o valoare pozitiva indica o presiune mai mare. Deci $x(t)$ fiind o sinusoida indica faptul ca presiunea aerului in urechile noastre oscileaza intr-o maniera indicata de sinusoida. Sunetul pe care il vom auzi in acest caz va fi un ton pur. Frecventa, dupa cum am spus si mai sus, determina inaltimea tonului iar amplitudinea determina volumul tonului.

Sa consideram spre exemplu $x(t) = 3\cos(2\pi \cdot 2 \cdot t - \frac{3\pi}{4})$. Se poate observa ca valoarea maxima este $A = 3$ si se obtine pentru $3/16$, cand argumentul cosinusului este 0.

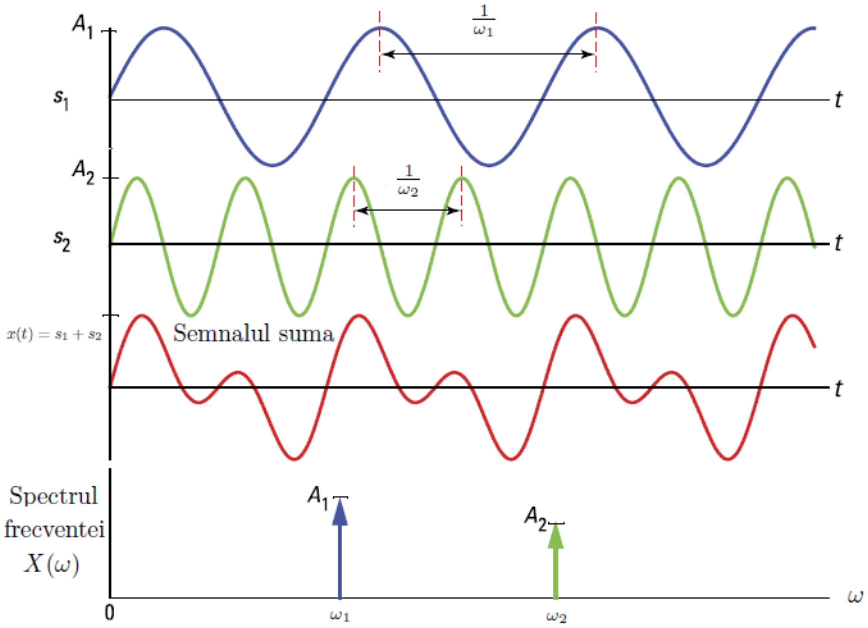


Semnalul de mai sus nu poate fi perceput de urechea umana fiind prea jos, frecventa ω fiind de doar 2 Hz. Semnalele audio elementare nu suna prea grozav, puteti testa aici cam toata gama perceptibila urechii.

Vom studia acum un semnal foarte comun, cel produs de tonul de apel clasic al unui celular. Acesta se compune in general din doua tonuri pure, la frecvente pe care omul le poate percepe. Spre exemplu

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi \cdot 350t) + A_2 \sin(2\pi \cdot 450 \cdot t)$$

contine doua sinusoide la frecvente 350 Hz si 400 Hz. Mai jos avem reprezentata forma de unda a semnalului obtinut din combinarea celor doua semnale.



Suprinzator este faptul ca toate sunetele pot fi construite din tonuri pure si in mod analog toate semnalele continue deterministe (depind de timp) pot fi obtinute prin combinatii de sinusoide. Stim deja, din teoria seriilor Fourier, ca orice semnal periodic poate fi descompus sub forma:

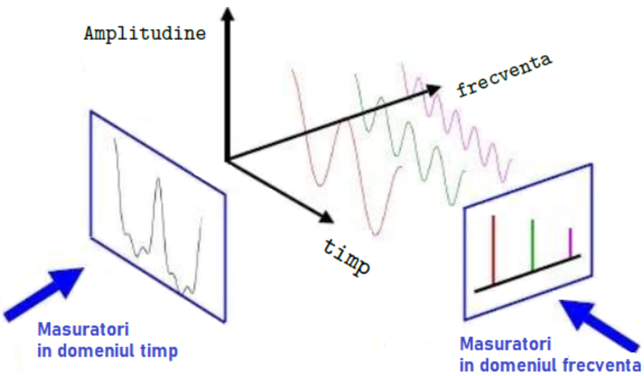
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right]$$

unde T este perioada semnalului iar coeficientii descompunerii se obtin conform regulilor $a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} x(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\, dt$ si $b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} x(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\, dt$.

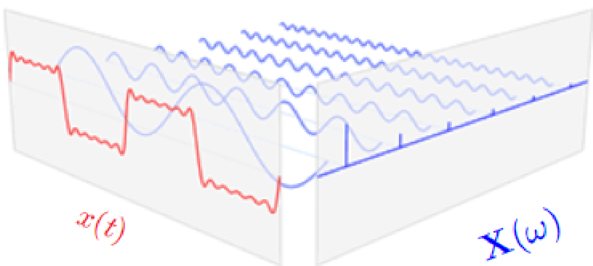
In cele ce urmeaza vom discuta despre posibilitatea de a descompune un semnal neperiodic si depre ”multidimensionalitatea” semnalelor. In lumea reala, semnalele nu se comporta exact dupa cum arata formatul lor matematic predefinit, si asta deoarece prezinta ”impuritati”(noise). Semnalele sunt adesea distorsionate si de multe ori sursa lor este necunoscuta.

Daca am putea descompune semnalul in frecventele care il constituie, am putea usor sa blocam anumite frecvente si sa le anulam contributia. E ceea ce BBC-ul a facut in timpul Cupei Mondiale de Fotbal din 2010. Va mai amintiti cat de iritant era sunetul vuvuzelelor de pe fundalul comentariilor sportive? Din fericire, sunetul produs de vuvuzele avea o inaltime(frecventa) relativ constanta undeva in jurul a 235 Hz si asta a permis celor de la BBC sa puna la dispozitia telespectatorilor optiunea de a filtra semnalul si de a putea urmari partidele fara enervantul zgomot pe fundal.

De retinut ca un semnal este in general reprezentat in domeniul timp: amplitudinea este exprimata in functie de timp. Insa atunci cand noise-ul este prezent o astfel de reprezentare poate fi inutila deoarece face semnalul sa para aproape aleator. Daca insa trecem in domeniul frecventa si reprezentam amplitudinea ca functie de frecventa obtinem informatii suplimentare, deosebit de utile.



Spectrul frecventei unui semnal reprezinta gama de frecvente continute intr-un semnal. Spre exemplu, semnalul tonului de apel contine doua frecvente, dupa cum arata figura de pe pagina anterioara. Spectrul poate fi gandit ca fiind o "biblioteca" completa a semnalului. Wikipedia va prezinta un gif extrem de ilustrativ al descompunerii unui semnal pentru identificarea spectrului sau:



Sunt multe domenii unde analiza frecventelor ofera o mai buna intelegere decat analiza in domeniul timp, muzica fiind cel mai celebru dintre ele. Toata teoria instrumentelor muzicale este construita in jurul descompunerii sunetelor complexe in componentele separate de frecventa diferita (notele muzicale). In astrononie studiul spectrului radiatiei electromagnetice, care provine de la stele sau alte corpuri ceresti, poate oferi informatii despre compozitia chimica, temperatura, densitate, masa, luminozitate sau deplasare (efectul Doppler).

Vestea buna este ca putem sa facem usor trecerea din domeniul timp in domeniul frecventa, si inapoi, printr-un "portal" numit transformata Fourier a semnalului:

$$X(\omega) = F[x(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} \, dt$$

Mai sus, $F[x(t)]$ reprezinta numele unei functii si anume transformata functiei $x(t)$ prin aplicatia F, deci ne asteptam sa o putem evalua intr-un punct ω. Pentru a simplifica notatia se foloseste in general dualitatea: transformata lui $x(t)$ este $X(\omega)$, a lui $f(t)$ este $F(\omega)$, etc.

Transformarea inversa, si implicit recuperarea semnalului daca stim frecventele sale, se face prin

$$x(t) = F^{-1}\left[X(\omega)\right](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot e^{i\omega t}\ d\omega.$$

Ar fi de observat aici ca ω nu reprezinta frecventa in formulele anterioare ci frecventa angulara. Expresia transformatei Fourier relativ la frecventa angulara este la fel de populara ca si varianta care uzeaza de frecventa propriu zisa:

$$X(\omega) = F[x(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-i2\pi\omega t}\ dt$$

$$x(t) = F^{-1}\left[X(\omega)\right](t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot e^{i2\pi\omega t}\ d\omega.$$

schimbarile constand in disparitia constantei din fata integralei si aparitia lui 2π la exponentiala. Pe parcursul acestei fise vom folosi transformata Fourier angulara, propusa de prima varianta. Conexiunea intre ele se face prin formula

$$X_{ang}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} X\left(\frac{\omega}{2\pi}\right).$$

In concluzie, transformata Fourier ofera posibilitatea de a obtine spectrul frecventei unui semnal neperiodic, o tehnica extrem de utila in teoria semnalelor. Inainte de a trece la listarea principalelor proprietati ale acestei transformari, vom prezenta interpretarile practice ale unor expresii matematice care apar frecvent in teoria semnalelor.

Energia unui semnal continuu este definita prin

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ dt$$

iar puterea semnalului prin

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\ dt$$

care pentru un semnal periodic de perioada T_0 devine $P = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{a}^{a+T} |x(t)|^2\ dt$, pentru un a oarecare.

Transformata Fourier este in mod standard definita pentru semnale cu energie finita si atunci cunoscuta teorema a lui Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

spune, de fapt, ca energia totala a semnalului este egala cu energia totala a transformatei, adica transformata conserva energia. Daca semnalul are energie finita, stim in plus ca transformata Fourier inversa exista, fiind cea mai simpla conditie care garanteaza existenta inversei.

Deoarece pentru multe semnale puterea poate fi finita iar energia infinita, se impune uneori o alta restrictie semnalelor si anume ca $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty$ (finite-action signal). O astfel de restrictie este suficienta pentru a ne asigura ca transformata Fourier exista si este marginita, in cazul semnalelor continue, caci

$$|X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Mai mult, orice semnal care satisface $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty$ si care este marginit va avea energia finita. Insa, conditia de absolut integrabilitate nu este suficienta pentru a garanta existenta transformatei inverse.

Transformata Fourier

- vom investiga mai de aproape transformata Fourier angulara

$$X(\omega) = F[x(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} \, dt$$

cu inversa

$$x(t) = F^{-1}\left[X(\omega)\right](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} \, d\omega.$$

- cele doua formule de mai sus au forme particulare daca $x(t)$ este o functie para sau impara

$\Longrightarrow$ daca $x(t)$ para

$$F[x(t)](\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) \, dt$$

$\Longrightarrow$ daca $x(t)$ impara

$$F[x(t)](\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) \, dt$$

uneori notam aceste transformari $X_c(\omega)$, respectiv $X_s(\omega)$ si le numim transformatele prin cosinus, sinus

$\Longrightarrow$ formula de inversare pentru o functie para devine acum

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} X_c(\omega) \cos(\omega t) \, d\omega$$

iar cea pentru o functie impara

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} X_s(\omega) \sin(\omega t) \, d\omega$$

$\triangleright$ principalele proprietati ale transformatei sunt listate in continuare

- **Transformata Fourier este o transformare liniara**

$$F[a \cdot x(t) + b \cdot y(t)](\omega) = a \cdot F[x(t)](\omega) + b \cdot F[y(t)](\omega)$$

- **Proprietatea de dilatare/contractare**

$$F[x(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} F[x(t)] \left(\frac{\omega}{a}\right), \qquad a \neq 0$$

- **Proprietatea de intarziere**

$$F[x(t-a)](\omega) = e^{-iat} F[x(t)](\omega)$$

- **Proprietatea de depasire**

$$F[e^{iat} x(t)](\omega) = F[x(t)](\omega - a)$$

- **Derivarea functiei original**

$$F[x^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n F[x(t)](\omega)$$

- **Derivarea imaginii**

$$\frac{d^n}{d\omega^n} F[x(t)](\omega) = (-i)^n F[t^n x(t)](\omega)$$

unde notatia din stanga inseamna a n-a derivata in raport cu ω

- **Transformata produsului de convolutie**

$$F[(x * y)(t)](\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot F[x(t)](\omega) \cdot F[y(t)](\omega)$$

prin produsul de convolutie a doua semnale intelegem functia (semnalul)

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) y(t-s)\, ds$$

Remarca:

Exista unele limitari in uzul seriilor Fourier si a transformatelor Fourier pentru analizarea semnalelor si a sistemelor. Un semnal trebuie sa fie absolut integrabil pentru a avea o reprezentare bazata pe o serie sau transformare Fourier. Daca luam in considerare semnalul rampa $x(t) = t \cdot u(t)$ acesta nu poate fi analizat cu transformata Fourier nefiind absolut integrabil sau de energie finita. Transformata Laplace ajuta la depasirea acestor obstacole. Poate fi gandita ca o extensie, o generalizare, a transformatei Fourier. Acum argumentul transformatei va fi un numar complex, notat uneori cu p si numit frecventa complexa.

Transformata Laplace

Transformata Laplace a unei functii $f(t)$ (semnal) este definita prin

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \int_0^\infty f(s)e^{-sp}ds$$

si va transforma o functie $f(t)$ in alta care depinde de p, notata de obicei cu $\mathcal{L}[f(t)](p)$ sau $F(p)$. Functia $f(t)$ este numita functie original (semnalul sursa), integrala fiind convergenta atata timp cat $\mathrm{Re}\, p > 0$.

Majoritatea proprietatilor sunt identice cu cele ale transformatei Fourier, diferentele aparand uneori la nivelul constantelor

- $\mathcal{L}$ este o **transformare liniara**

$$\mathcal{L}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)](p) = a \cdot \mathcal{L}[f(t)](p) + b \cdot \mathcal{L}[g(t)](p)$$

- **Transformata Laplace are inversa liniara**

$$\mathcal{L}^{-1}[a \cdot F(p) + b \cdot G(p)](t) = a \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(p)](t) + b \cdot \mathcal{L}^{-1}[G(p)](t)$$

- **Dilatarea/Contractia**

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{|a|}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{a}\right)$$

- **Scalarea exponentiala (depasire)**

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p-a)$$

- **Proprietatea de intarziere**

$$\mathcal{L}[f(t-a)](p) = e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)](p)$$

- **Transformata integralei**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(t)](p)$$

- **Transformata produsului de convolutie (teorema lui Borel)**

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p) \cdot \mathcal{L}[g(t)](p)$$

de remarcat ca dispare coeficientul din fata, comparativ cu transformata Fourier, insa in acest context produsul de convolutie este definit ca fiind

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\ ds$$

- **Transformata derivatei**

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p^n\mathcal{L}[f(t)](p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

- **Derivata transformarii**

$$(\mathcal{L}[f(t)](p))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](p)$$

• transformata Laplace poate fi folosita pentru a calcula integrale improprii conform formulei:

$$\int_p^{\infty} F(s)ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p)$$

daca recunoastem integrandul ca fiind o transformata Laplace a unei functii $f(t)$.

• adaugam alte trei proprietati extrem de utile in practica

Teorema valorii initiale

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t) = \lim_{p\to\infty} p\cdot\mathcal{L}[f(t)](p)$$

Teorema valorii finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot\mathcal{L}[f(t)](p)$$

• in general vom folosi de tabelul de transformate pentru a calcula transformata inversa $\mathcal{L}^{-1}$ insa este mult mai simplu sa folosim teoria reziduurilor

O formula pentru transformata inversa $\mathcal{L}^{-1}$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)](t) = \sum_{\text{toti polii lui } F(p)} \text{Rez}\left(F(p)e^{pt}\right)$$

Exemplu:

Aflam transformarea inversa a lui

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)^2(p-1)}$$

In acest caz $F(p)$ are un pol de ordin 2 in $p=-3$ si un pol de ordin 1 in $p=1$. Au loc urmatoarele formule, conform fisei despre integrale complexe:

$$\text{Res}(F(p)e^{pt}, 1) = \lim_{p\to 1}(p-1)\frac{e^{pt}}{(p+3)^2(p-1)} = \frac{e^t}{(1+3)^2}$$

(in reziduul de mai sus t este un parametru)

$$\mathrm{Res}(F(p)e^{pt}, -3) = \lim_{p\to -3}\left((p+3)^2\frac{e^{pt}}{(p+3)^2(p-1)}\right)' = -\frac{te^{-3t}}{4} - \frac{e^{-3t}}{4^2}$$

(derivarea e relativ la p)

astfel

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)^2(p-1)}\right](t) = \frac{e^t}{16} - \frac{te^{-3t}}{4} - \frac{e^{-3t}}{16}, \quad t \geq 0.$$

$\square$

• mai jos avem un tabel uzual de transformate Laplace

Domeniul timp $f(t)$	**Domeniul frecventa** $F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-ap}
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha \cdot u(t)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{\omega t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p-\omega}$
$a^{\omega t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p-\ln\omega}$
$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\cosh(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sinh(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2-\omega^2}$
$e^{-at}\cosh(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-\omega^2}$

• uneori functia treapta $u(t)$ este omisa in astfel de tabele, puteti face abstractie de ea, rolul ei este sa anuleze partea din functie pentru care $t < 0$ caci integrala transformatei Laplace se refera la intervalul $[0, \infty)$

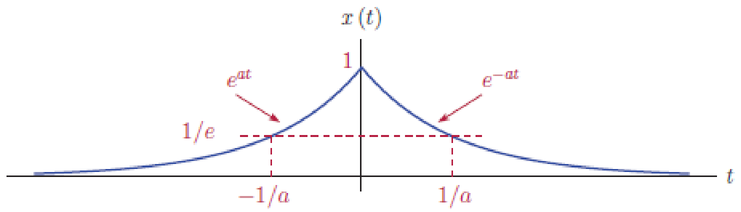
Probleme rezolvate

Problema 1. *Calculati transformata Fourier pentru urmatoarele semnale elementare:*

a) $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$

b) $x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A, & t \in [\frac{-\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases}$

Solutie: a) O reprezentare in domeniul timp al lui $x(t)$ arata in felul urmator



Prin aplicarea formulei transformatei Fourier ajungem la

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-i\omega t}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t}\, dt$$

din cauza felului in care functia modul se comporta, apoi putem scrie

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(a-i\omega)t}}{a - i\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\bigg|_{0}^{\infty} \end{aligned}$$

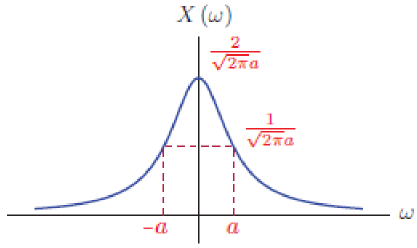
Valorile in $\pm\infty$ trebuie vazute ca o trecere la limita, prin definitia integralelor generalizate. Ambele valori vor fi 0, in mare din cauza prezentei lui e^{at} respectiv alui e^{-at}

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{e^{(a-i\omega)t}}{a - i\omega} = \lim_{t \to -\infty} e^{at} \frac{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)}{a - i\omega} = 0$$

caci al doilea factor este un numar complex marginit. Analog se trateaza cealalta limita implicata in formulele de mai sus. In final doar valorile in 0 conteaza

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

O reprezentare a acesteia in domeniul frecventa (angulara) este disponibila pe pagina urmatoare



b) Semnalul $x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ poarta numele de puls dreptunghiular si vom arata ca transformata sa are legatura cu functia $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Prin definitie:

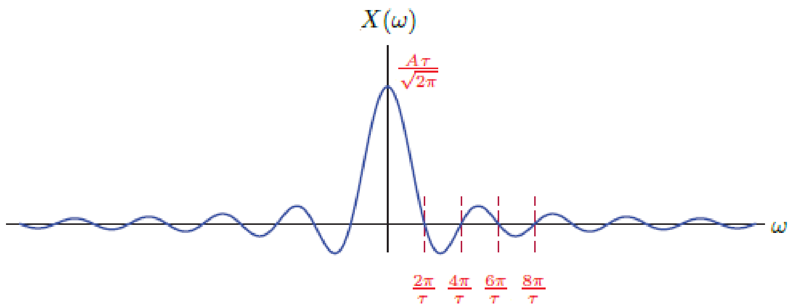
$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \left(\frac{e^{-i\omega \frac{\tau}{2}}}{-i\omega} - \frac{e^{+i\omega\frac{\tau}{2}}}{-i\omega} \right)$$

$$= -\frac{A}{\sqrt{2\pi} i\omega} \left(\cos\left(-\omega\frac{\tau}{2}\right) + i\sin\left(-\omega\frac{\tau}{2}\right) - \cos\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) - i\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{2\pi}\omega} \sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\omega\frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)$$

imaginea in domeniul frecventa fiind



Problema 2. *Sa se rezolve ecuatia integrala*

$$\int_0^{\infty} g(u)\cos(ut)\, du = f(t)$$

unde $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 1] \\ 0, & t > 1. \end{cases}$

Solutie: Ecuatia poate fi scrisa sub forma echivalenta

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(u)\cos(ut)\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(t)$$

in care membrul stang seamana cu transformata prin cosinus a unei functii g, deci putem interpreta egalitatea ca fiind de forma:

$$G_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(\omega)$$

Aceasta strategie are sens doar daca la final functia g gasita se dovedeste a fi para. Interpretand ecuatia in acest mod, functia g poate fi aflata prin aplicarea transformatei inverse prin cosinus functiei din dreapta, adica

$$\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G_c(\omega) \cos(\omega u)\ d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(\omega) \cos(\omega u)\ d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\omega) \cos(\omega u)\ d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-\omega)\cos(u\omega)\omega = \frac{2}{\pi} \frac{1-\cos u}{u^2} \end{aligned}$$

care este evident o functie para.

Problema 3. *Găsiţi funcţiile original pentru următoarele tranformate Laplace:*

a) $X(p) = \dfrac{1}{p^2 - 3p + 2}$

b) $Y(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

Solutie: **a)** Ideea este sa reducem functiile date la expresii care se afla in tabelul de transformate, folosind teoria functiilor rationale. Descompunem transformata Laplace $X(p)$ data astfel

$$X(p) = \frac{1}{p^2 - 3p + 2} = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$$

şi folosim formula

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](p) = \frac{1}{p-a}$$

din tabelul de transfromate Laplace. Vom obtine funcţia original

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-1}\right](t) = e^{2t} - e^t.$$

b) *Metoda 1*: Din nou descompunem funcţia dată astfel

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1},$$

iar după identificarea coeficientilor obţinem

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 0,\ D = -1,$$

ceea ce conduce la

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Folosind din nou formulele

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad \text{si} \quad \mathcal{L}\left[\sin at\right](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

din tabelul de transfromate Laplace, rezultă funcţia original

$$y\,(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right](t) = t - \sin t.$$

Metoda 2: Putem sa folosim formula de inversare care uzeaza de teoria reziduurilor

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)](t) = \sum_{\text{toti polii lui } Y(p)} \operatorname{Rez}\left(Y(p)e^{pt}\right)$$

Se observa usor ca $Y(p)$ are un pol dublu in $p_1 = 0$ si doi poli simpli in $p_2 = i$, respectiv $p_3 = -i$.

$$\operatorname{Rez}(Y(p)e^{pt}, 0) = \lim_{p\to 0}\left(p^2\frac{e^{pt}}{p^2(p^2+1)}\right)' = \lim_{p\to 0}\frac{te^{pt}(p^2+1) - 2pe^{pt}}{(p^2+1)^2} = t$$

Atentie la faptul ca derivarea se face intotdeauna relativ la variabila p, atunci cand avem de a face cu poli de ordin superior in aplicarea formulei de inversare.

$$\begin{aligned}\operatorname{Rez}(Y(p)e^{pt}, i) &= \lim_{p\to i}(p-i)\frac{e^{pt}}{p^2(p^2+1)} = \frac{e^{it}}{-2i} = \frac{ie^{it}}{2}\\ &= \frac{-\sin t + i\cos t}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Rez}(Y(p)e^{pt}, -i) &= \lim_{p\to -i}(p-(-i))\frac{e^{pt}}{p^2(p^2+1)} = \frac{e^{-it}}{2i} = \frac{-ie^{-it}}{2}\\ &= \frac{-\sin t - i\cos t}{2}\end{aligned}$$

In final adunand aceste valori

$$y(t) = t - \sin t$$

Problema 4. *Rezolvaţi problema Cauchy*

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0 \\ x\,(0) = 1 \\ x'\,(0) = 0 \end{cases},$$

folosind transformata Laplace.

Solutie: Vom trece din domeniul timp in domeniul frecventelor. Fenomenul suprinzator este urmatorul: in domeniul frecventelor ecuatia diferentiala devine una algebrica usor de rezolvat.

Folosind asadar transformata Laplace vom transforma intreaga ecuatie diferentiala tinand cont de proprietatile transformatei

$$\mathcal{L}[x](p) \overset{notatie}{=} X(p)$$
$$\mathcal{L}[x'](p) = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$
$$\mathcal{L}[x''](p) = p^2X(p) - p\cdot x(0) - x'(0) = p^2X(p) - p,$$

ceea ce implică, datorita proprietatii de liniaritate a transformatei

$$p^2X(p) - p + 2[pX(p) - 1] + 5X(p) = 0,$$

de unde obtinem apoi

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p+2}{p^2+2p+5} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{1}{(p+1)^2+2^2} \\ &= \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

In acest moment avem expresia transformatei Laplace a unei solutii $x(t)$ corespunzatoare problemei Cauchy. Pentru a obtine aceasta solutie va trebui sa folosim transformata inversa si tabelul de transformate

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(p)](t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \\ &= e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right). \end{aligned}$$

Problema 5. *Integraţi ecuaţia* $x''' + x'' - 2x = t$, *unde* $x(0) = x'(0) = 0$ *şi* $x''(0) = -1$.

Solutie: Vom aplica din nou tehnica transformarii Laplace pentru a obtine initial o imagine a ecuatiei in domeniul frecventelor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x](p) &\overset{not}{=} X(p), \\ \mathcal{L}[x''](p) &= p^2X(p) - p\cdot x(0) - x'(0) = p^2X(p) \\ \mathcal{L}[x'''](p) &= p^3X(p) - p^2\cdot x(0) - p\cdot x'(0) - x''(0) = p^3X(p) + 1, \\ \mathcal{L}[t](p) &= \frac{1}{p^2}, \end{aligned}$$

conform formulei de transformare a derivatelor si respectiv tabelului de transformate pentru ultima relatie.

Prin urmare imaginea ecuatiei in domeniul frecventelor este

$$p^3X(p) + 1 + p^2X(p) - 2X(p) = \frac{1}{p^2}$$

cu observatia ca deja am folosit conditiile initiale ale ecuatiei in aflarea transformarilor de mai sus.

Aceasta ecuatie se rezolva usor si se obtine:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1-p^2}{p^2(p^3+p^2-2)} = \frac{(1-p)(1+p)}{p^2(p-1)(p^2+2p+2)} \\ &= -\frac{p+1}{p^2(p^2+2p+2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1} \end{aligned}$$

In final pentru a obtine solutia ecuatiei diferentiale date trebuie sa aflam imaginea inversa a solutiei obtinute in domeniul frecventelor

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(p)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1}\right](t) \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right](t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^2+1}\right](t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t \end{aligned}$$

conform tabelului de transformate si a liniaritatii transformarii inverse.

Problema 6. *Rezolvaţi următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:*

$$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \ x(0) = 2 \\ -2x + y' - y = t, \ y(0) = 4 \end{cases}.$$

Solutie: Intai notam cu $X(p)$ si $Y(p)$ transformatele Laplace ale necunoscutelor $x(t)$, respectiv $y(t)$.

$$\mathcal{L}[x](p) = X(p), \qquad \mathcal{L}[y](p) = Y(p)$$

Apoi transformam ceilalti termeni ai sistemului, tinand cont de proprietatile transformate Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x'](p) &= pX(p) - x(0) = pX(p) - 2 \\ \mathcal{L}[y'](p) &= pY(p) - y(0) = pY(p) - 4, \\ \mathcal{L}[t](p) &= \frac{1}{p^2}, \end{aligned}$$

Imaginea sistemului in domeniul frecventa este

$$\begin{cases} pX(p) - 2 - X(p) - 2Y(p) = \frac{1}{p^2} \\ -2X(p) + pY(p) - 4 - Y(p) = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

şi obţinem că

$$\begin{aligned} X(p) + Y(p) &= \frac{1}{p-3}\left(6 + \frac{2}{p^2}\right) \\ X(p) - Y(p) &= -\frac{2}{p+1}, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{3}{p-3}+\frac{1}{p^2(p-3)}-\frac{1}{p+1} \\ &= \frac{3}{p-3}-\frac{1}{9}\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p+1} \\ &= \frac{28}{9}\frac{1}{p-3}-\frac{1}{9}\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

şi obţinem funcţia original prin inversare, ca la exercitiile anterioare

$$x(t)=\frac{28}{9}e^{3t}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t-e^{-t}.$$

Pentru a găsi funcţia original $y(t)$ putem sa nu mai recurgem la $Y(p)$ ci sa inlocuim in sistemul de ecuatii diferentiale. Vom folosi prima ecuaţie din sistem, unde avem nevoie de derivata lui $x(t)$ care este

$$x'(t)=\frac{28}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}+e^{-t}$$

şi obţinem

$$y(t)=\frac{x'(t)-x(t)-t}{2}=\frac{28}{9}e^{3t}-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}t+\frac{1}{2}e^{-t}.$$

În concluzie soluţia sistemului este

$$\begin{cases} x(t)=\frac{28}{9}e^{3t}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t-e^{-t} \\ y(t)=\frac{28}{9}e^{3t}-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}t+\frac{1}{2}e^{-t} \end{cases}.$$

Problema 7. *Determinaţi soluţia ecuaţiei* $x''+x=\frac{1}{\cos t}$ *cu datele initiale* $x(0)=0$ *şi* $x'(0)=2$.

Solutie: Aplicăm transformata Laplace atat membrului drept cât şi a membrului stâng. Constatăm un prim obstacol: nu putem înlocui direct transformata Laplace a funcţiei $\frac{1}{\cos t}$ caci nu e in tabel si nici nu e clar cum sa o deducem din proprietatile $\mathcal{L}$.

Pentru moment vom continua cu notaţia $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\cos t}\right](p)$ (suntem in faza de negare a problemei :))). In partea stângă avem

$$\mathcal{L}[x](p)=X(p),\ \mathcal{L}[x''](p)=p^2X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)=p^2X(p)-2.$$

Transformata ecuatiei devine

$$p^2X(p)-2+X(p)=\mathcal{L}\left[\frac{1}{\cos t}\right](p),$$

de unde rezultă

$$X(p)=\frac{2}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}\cdot\mathcal{L}\left[\frac{1}{\cos t}\right](p)$$

Din cauza ca ultimul termen are un coeficient care depinde de p (deci nu e constant relativ la p) nu putem sa aplicam transformata inversa in acest moment. Houston we have a problem !

Vom depasi acest obstacol daca reusim sa vizualizam factorul $\frac{1}{p^2+1}$ ca pe o transformata Laplace. Cu ajutorul tabelului se gaseste rapid $\frac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}[\sin t](p)$

Acum modul in care $\mathcal{L}$ se comporta cu produsul de convolutie salveaza ziua:

$$\begin{aligned} X(p) &= 2\mathcal{L}[\sin t](p) + \mathcal{L}[\sin t](p) \cdot \mathcal{L}\left[\frac{1}{\cos t}\right](p) \\ &= \mathcal{L}[2\sin t](p) + \mathcal{L}\left[\sin t * \frac{1}{\cos t}\right](p) \\ &= \mathcal{L}\left[2\sin t + \sin t * \frac{1}{\cos t}\right](p) \end{aligned}$$

In final

$$x(t) = \mathcal{L}[X(p)](t) = 2\sin t + \sin t * \frac{1}{\cos t}$$

care se scrie desfasurat sub forma

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\sin t + \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{\cos\tau} d\tau = \\ &= 2\sin t + \int_0^t \frac{\sin t\cos\tau - \sin\tau\cos t}{\cos\tau} d\tau \\ &= 2\sin t + t\sin t + \cos t \cdot \ln(\cos t). \end{aligned}$$

Problema 8. *Rezolvaţi ecuaţia* $x(t) = 2\sin 4t + \int_0^t \sin 4(t-u)\, x(u)\, du.$

Solutie: Ecuaţia dată se poate pune în forma echivalentă

$$x(t) - \int_0^t x(u)\sin 4(t-u)\, du = 2\sin 4t.$$

Transformata Laplace a membrului drept este

$$\mathcal{L}[2\sin 4t] = \frac{8}{p^2+16},$$

iar în partea stângă din teorema lui Borel rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t x(u)\sin 4(t-u)\, du\right](p) &= \mathcal{L}[x(t) * \sin 4t](p) \\ &= X(p) \cdot \frac{4}{p^2+16}. \end{aligned}$$

Atunci avem

$$X(p) - X(p) \cdot \frac{4}{p^2+16} = \frac{8}{p^2+16},$$

de unde obţinem

$$X(p) = \frac{8}{p^2+12} = \frac{8}{p^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \frac{8}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{p^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

Prin urmare soluţia ecuaţiei date este

$$x(t) = \frac{8}{2\sqrt{3}} \cdot \sin\left(2\sqrt{3}t\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sin\left(2\sqrt{3}t\right).$$

Problema 9. *Rezolvaţi problema Cauchy:*

$$\begin{cases} x'' + tx' - x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases},$$

folosind transformata Laplace.

Solutie: Aplicăm transformata Laplace şi obţinem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x](p) &= X(p), \\ \mathcal{L}[tx'](p) &= -[pX(p)]' + x(0) = \\ &= -X(p) - pX'(p) \\ \mathcal{L}[x''](p) &= p^2X(p) - px(0) - x'(0) \\ &= p^2X(p) - 1, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$X'(p) + \frac{2-p^2}{p} \cdot X(p) = -\frac{1}{p}.$$

De remarcat faptul ca atunci cand ecuatia diferentiala are coeficienti care depind de t, imaginea ecuatiei in domeniul frecventa va fi tot o ecuatia diferentiala. Ecuatia din domeniul frecventa nu este intotdeauna mai usor de rezolvat decat cea initiala ! In cazul nostru insa, avem o ecuatie neomogena liniara de ordinul intai, de forma generală

$$X'(p) + a(p) \cdot X(p) = b(p)$$

care are soluţia generală

$$X(p) = e^{-\displaystyle\int a(p)\,dp} \left[k + \int b(p) \cdot e^{\displaystyle\int a(p)\,dp} dp \right].$$

În cazul nostru avem $a\,(p) = \dfrac{2-p^2}{p}$ şi $b\,(p) = -\dfrac{1}{p}$, de unde după înlocuirea în soluţia generală rezultă

$$X\,(p) = k \cdot \frac{e^{\frac{p^2}{2}}}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

Intrusul este constanta k si trebuie eliminat. Pentru aceasta avem nevoie de informatii suplimentare. Avem in maneca cativa asi: conditiile initiale si teoremele valorii initiale/ finale. Dacă ţinem cont de conditia $x\,(0) = 0$, atunci conform teoremei valorii initiale

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} x(t) = \lim_{p\to\infty} p \cdot \mathcal{L}[x(t)](p)$$

prin urmare $\lim\limits_{p\to\infty} p \cdot X(p) = 0$ si fenomenul are loc doar daca impunem condiţia $k = 0$, ceea ce conduce in final la $X\,(p) = \dfrac{1}{p^2}$.

In concluzie, soluţia ecuaţiei este funcţia original

$$x\,(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[X(p)\right](t) = t$$

Probleme propuse

Problema 1. *Aflati transformata Laplace a urmatoarelor functii*

i) $f(t) = e^{-3t}\cos(2t)$

ii) $f(t) = \cos(2t-3)$

iii) $f(t) = \sin t \cos(3t)$

iv) $f(t) = t^3 \sinh(2t)$

Problema 2. *Gasiti functia original pentru urmatoarele transformari:*

i) $F\,(p) = \dfrac{1}{p^3 - 5p^2 + 6p}$

ii) $F(p) = \dfrac{7p^2 - 2p}{(p^2+4)(p^2-9)}$

Problema 3. *Rezolvati problema Cauchy*

$$\begin{cases} x'' - x' - 6x = 0 \\ x\,(0) = 0 \\ x'\,(0) = -1 \end{cases},$$

folosind tehnica transformarii Laplace.

Problema 4. *Rezolvati ecuatia* $x''' + 2x'' + 2x' + x = 1$, *cu datele initiale* $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Problema 5. *Rezolvati sistemul de ecuatii diferentiale*

$$\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \ x(0) = 3 \\ y' + 2x + 6y = 0, \ y(0) = 15 \end{cases}.$$

Problema 6. *Rezolvati ecuatia integrala*

$$x'(t) = \int_0^t x(u) \cos(t-u) \, du, \ cu \ x(0) = 1.$$

Problema 7. *Rezolvati problema Cauchy*

$$\begin{cases} tx'' + x' + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -1 \end{cases},$$

folosind transformata Laplace.

Bibliografie

[1] M. Wickert. *Signals and Systems for Dummies*, Wiley&Sons, 2013.

[2] P. Cuff. *ELE 201: Information Signals*, Princeton University, Spring Semester, 2016-2017.

[3] Signal Processing stackexchange https://dsp.stackexchange.com/

[4] R. Negrea. *Note de curs MS*, 2020.

[5] C. Hedrea. *Fise de seminar MS*, 2015.

[6] O. Lipovan. *Analiza Matematica: Calcul integral,* Ed. Politehnica, 2007.