"In matematica nu intelegi lucrurile. Doar te obisnuiesti cu ele"

John von Neumann

8

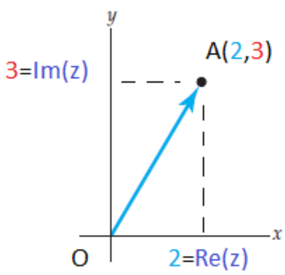
Functii si integrale complexe

Numere complexe

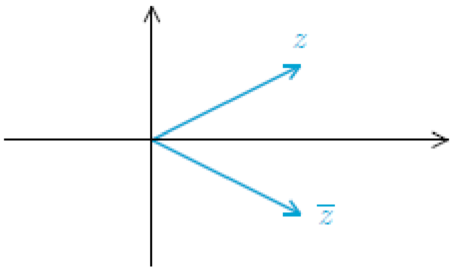
Orice numar complex are o unica reprezentare:

$$z = x + i \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Numerele complexe pot fi reprezentate grafic printr-un vector orientat cu originea in originea reperului si varful in punctul $A(x, y)$. Spunem ca z este afixul punctului $A(x, y)$. Mai jos putem observa cum numarul complex $z = 2+3i$ este reprezentat atat prin intermediul unui vector de pozitie $\overrightarrow{OA}$ cat si prin intermediul punctului $A(2, 3)$:



Numim $x = \mathrm{Re}(z)$ parte reala si $y = \mathrm{Im}(z)$ parte imaginara a numarului complex z. Daca $z = x + iy \in \mathbb{C}$ numim $\bar{z} = x - iy$ conjugatul numarului complex z. Imaginea conjugatului se obtine prin simetrie fata de axa Ox:



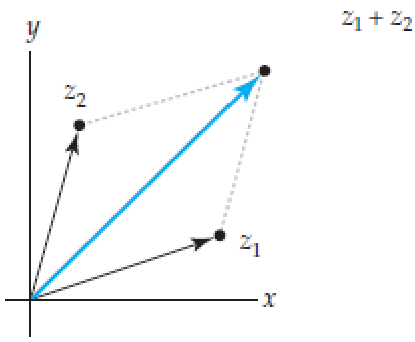
Partea reala si partea imaginara satisfac relatiile:

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Suma a doua numere complexe z_1, z_2 este definita prin:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

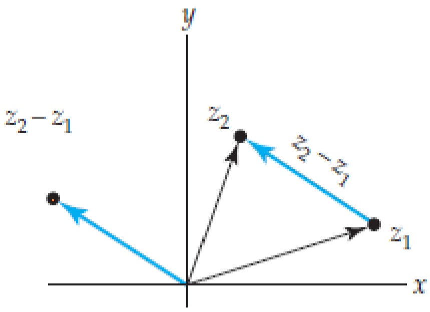
si imaginea sa se obtine prin regula paralelogramului:



Diferenta a doua numere complexe z_1, z_2 este definita prin:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

si imaginea sa se obtine cu regula triunghiului apoi se aplica o translatie pana in originea reperului:



Pentru produsul a doua numere complexe z_1 si z_2 avem regula naturala:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

E de fapt inmultirea obisnuita a doua paranteze tinand cont de noutatea:

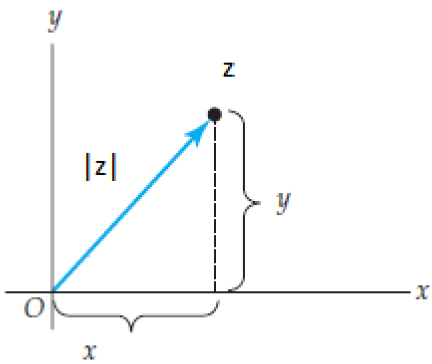
$$i^2 = -1$$

Reprezentarea grafica a produsului o vom prezenta mai tarziu, dupa ce vom intelege mai bine informatiile codificate in scrierea $z = x + iy$.

Lungimea vectorului prin care un numar complex este reprezentat se numeste modulul numarului complex. Modulul numarului complex $z = x + iy$ se noteaza $|z|$ sau folosind litera r.

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

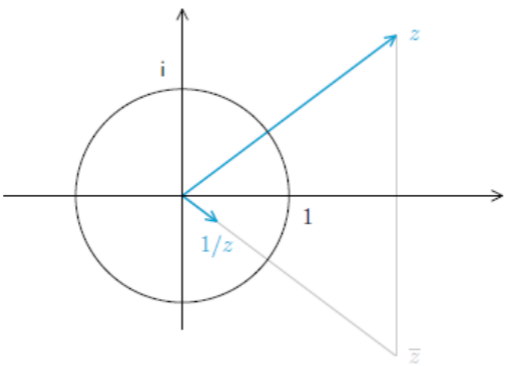
Modulul coincide cu norma euclidiana a vectorului prin care z este reprezentat:



Daca $z \neq 0$, putem forma inversul sau folosind regula:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

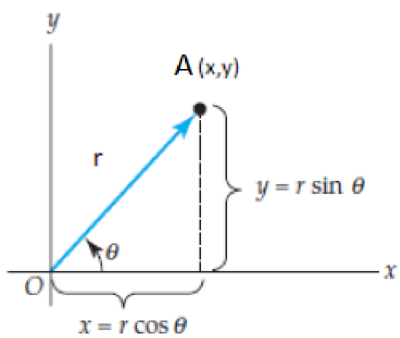
Inversul unui numar complex se reprezinta prin simetrie fata de axa Ox apoi inversiune fata de cercul unitate. Vectorul care reprezinta numarul complex $\frac{1}{z}$ indica in acelasi sens ca si $\bar{z}$ dar are lungimea $\frac{1}{r}$, cand z are lungimea r.



Catul a doua numere complexe z_1, z_2 e de fapt produsul lui z_1 cu inversul lui z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (x_1 + iy_1) \cdot \frac{1}{x_2 + iy_2} = (x_1 + iy_1) \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 - i(y_1 x_2 + x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Unghiul θ format de semiaxa pozitiva Ox si vectorul $\overrightarrow{OA}$, prin care numarul complex e reprezentat, se numeste argumentul numarului complex $z = x + iy$.



Avem urmatoarea formula pentru a obtine acest unghi:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Deoarece cos si sin sunt 2π-periodice, argumentul nu este unic determinat, ci $\theta \pm 2\pi, \theta \pm 4\pi, \ldots$ reprezinta alte argumente posibile ale lui z.

Din aceasta cauza vom nota cu:

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

multimea tuturor argumentelor.

Pentru $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se observa pe baza figurii anterioare ca:

Reprezentarea trigonometrica (polara) a unui numar complex:
Fiecare numar comlex poate fi reprezentat sub forma:

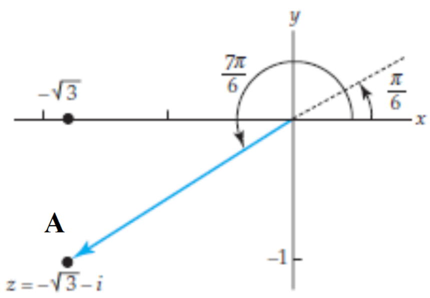
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

unde r si θ se vor numi coordonatele polare ale lui z.

Exemplu:

Cautam sa aflam reprezentarea trigonometrica a lui $z = -\sqrt{3} - i$. Deoarece $x = -\sqrt{3}$ si $y = -1$ obtinem:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$



Punctul $A(-\sqrt{3}, -1)$ (imaginea lui z) se afla in cadranul III din aceasta cauza ar trebui sa avem:

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

O astfel de valoare se obtine pentru $k = 1$, deci $\theta = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \frac{7\pi}{6}$. Modulul sau este $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$. Prin urmare reprezentarea trigonometrica (polara) este:

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

□

Argument principal: Vom nota unghiul θ pentru care are loc:

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

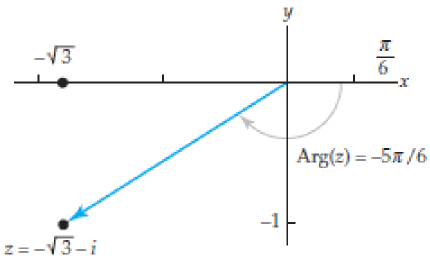
prin $\mathrm{Arg}(z)$ si il vom numi argumentul principal a lui z. Are loc relatia:

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplu:

In exemplul anterior argumentul ales a fost $\theta = \frac{7\pi}{6}$. Cu ajutorul formulei $\mathrm{Arg}(z) = \theta \pm 2k\pi \in (-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{N}$, cautam sa obtinem argumentul principal.

Din aceasta cauza: $\mathrm{Arg}(z) = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.



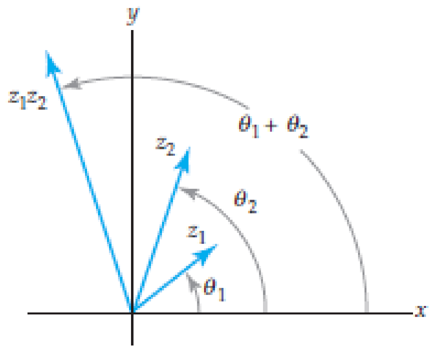
Asadar avem inca o posibila reprezentare trigonometrica:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

□

In acest moment putem sa dam o semnificatie grafica produsului a doua numere complexe cu ajutorul reprezentarilor polare:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$



Putem astfel intelege ce se intampla la inmultirea lui z_2 cu z_1. Numarul complex z_1 transforma vectorul de pozitie a lui z_2 rotindu-l cu un unghi $\theta_1 = Arg(z)$ in jurul originii apoi scalandu-l incat sa aibe lungimea egala cu produsul lungimilor celor doi vectori. Asadar o inmultire cu un numar complex este din punct de vedere geometric o rotatie si apoi o scalare. O situatie asemanatoare are loc pentru catul lor:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Una dintre motivatiile formei trigonometrice este posibilitea de a exprima elegant puterea unui numar complex:

Formula lui Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{Z}.$$

Radacinile ecuatiei $w^n = z$:
Pentru orice numar natural n ecuatia $w^n = z$ are exact n solutii, mai exact:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

unde $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Exemplu:

Ecuatia $w^n = i$, $w \in \mathbb{C}$ va avea trei solutii. Se observa usor, reprezentand grafic numarul i, ca $|i| = 1$ si $\theta = \frac{\pi}{2}$, asadar:

Pentru $k = 0$:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

Pentru $k = 1$:

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} \\
&= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

si pentru $k = 2$:

$$
\begin{aligned}
w_3 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} \\
&= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} \\
&= -i
\end{aligned}
$$

□

Radacinile de ordinul n ale unitatii $\varepsilon^n = 1$:

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ exista exact n radacini de ordinul n ale numarului $z = 1$, mai precis:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \\
\varepsilon_2 &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_k &= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_n &= 1
\end{aligned}
$$

Din punct de vedere grafic imaginile acestora sunt n puncte situate pe cercul de raza 1 si origine O (cercul unitate).

Functii complexe

O functie cu valori complexe este o functie $f : D \to \mathbb{C}$ pentru care domeniul de valori este o submultime a lui $\mathbb{C}$. Atunci cand $D \subset \mathbb{C}$ spunem ca avem o functie complexa.

De obicei scriem:

$$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y),$$

unde $z = x + iy$, pentru o functie complexa f. Astfel u, v vor fi functii reale.

Functii liniare: O functie complexa f se numeste liniara daca exista constantele complexe $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, astfel incat:

$$f(z) = az + b, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Remarca:

• Pentru $a = 1$ se obtine ceea ce in geometrie numim translatie in directia indicata de b:

$$f(z) = z + b, \quad z \in \mathbb{C}.$$

• Cand $a \in \mathbb{R}_+$ si $b = 0$ obtinem o scalare cu factorul de scalare a>0:

$$f(z) = az, \quad z \in \mathbb{C}.$$

adica modulul lui z va fi marit $(a > 1)$ sau micsorat $(0 < a < 1)$.

• Daca $a \in \mathbb{C}$ astfel ca $|a| = 1$ si $b = 0$ atunci obtinem o rotatie in jurul originii, in sens pozitiv trigonometric, de unghi $\theta = \mathrm{Arg}(a)$:

$$f(z) = (\cos\theta + i\sin\theta)z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Structura unei aplicatii liniare:
Orice aplicatie liniara $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se descompune in:

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

unde cele trei functii reprezinta:

1) $f_1(z) == (\cos\theta + i\sin\theta)z$ o rotatie in jurul originii

2) $f_2(z) = |a|z$ o scalare

3) $f_3(z) = z + b$ o translatie de "vector" b

In continuare vom incepe sa studiem varianta complexa a unor functii elementare. Unele astfel de extinderi nu conduc la functii propriu-zise ci la ceea ce vom numi functii multivalente: adica functii care asociaza unui numar z mai multe posibile valori.

Functia exponentiala complexa:
Functia exponentiala $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este definita prin:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} := e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Se observa usor ca de fapt $|e^z| = e^x$ si $\arg(z) = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Proprietatile functiei exponentiale:

i) functia exponentiala este o functie $2\pi i$-periodica:

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ii) $e^z e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C},$

iii) $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

iv) $(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Logaritmul complex:
Functia multivalenta:

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z) = \ln|z| + i \cdot (Arg(z) + 2k\pi)$$

se numeste logaritm complex $\mathrm{Ln} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ si reprezinta solutia ecuatiei:

$$e^w = z.$$

Proprietatile logaritmului complex:
Pentru orice $z, w \neq 0$ au loc:

i) $\mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(w) = \mathrm{Ln}(zw)$

ii) $\mathrm{Ln}z - \mathrm{Ln}(w) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{w}\right)$

iii) $\mathrm{Ln}(z^n) = n \cdot \mathrm{Ln}(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Egalitatile de mai sus trebuie interpretate ca identitati intre multimi si nu intre numere complexe, caci functia multivalenta complexa returneaza ca valoare o multime de numere si nu un numar.

”Functia” putere:
Putem defini ridicarea la putere complexa cu ajutorul logaritmului complex:

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln|z| + i\arg(z))}$$

unde $\alpha \in \mathbb{C}$ este o constanta complexa.

Functia putere definita mai sus este tot multivalenta deci nu e propriu-zis o functie. Insa expresia $e^{\alpha(\ln|z|+i\mathrm{Arg}(z))}$ numita valoare principala a functiei putere $f(z) = z^\alpha$ este o functie complexa de z (atribuie o unica valoare fiecarui numar z).

Remarca:

Proprietatile alegbrice obisnuite ale functiei putere nu se aplica variantei complexe. Regula $z^\alpha \cdot w^\alpha = (zw)^\alpha$, de exemplu, nu e valabila pentru orice $z, w \in \mathbb{C}^*$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Spre exemplu, tinand cont de definitia functiei multivalente putere:

$$(-1)^i \cdot (-1)^i = e^{i(0+i\arg(-1))} e^{i(0+i\arg(-1)))}$$

$$= e^{-(\pi+2k\pi)} e^{-(\pi+2k\pi)} = \frac{1}{e^{2\pi+4k\pi}}$$

dar si:

$$[(-1)\cdot(-1)]^i = 1^i = e^{i(0+i\arg(1))} = e^{-(0+2k\pi)} = \frac{1}{e^{2k\pi}}$$

Functiile trigonometrice si hiperbolice complexe:
Urmatoarele functii sunt extinderi ale functiilor reale corespunzatoare:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Aceste functii sunt continue si derivabile pe $\mathbb{C}$!

Proprietati elementare :
Pentru orice $z \in \mathbb{C}$:

i) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ si $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

ii) $\cosh(iz) = \cos z$ si $\sinh(iz) = i \sin z$

iii) in $\mathbb{C}$ au loc, la fel ca in $\mathbb{R}$, regulile:

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

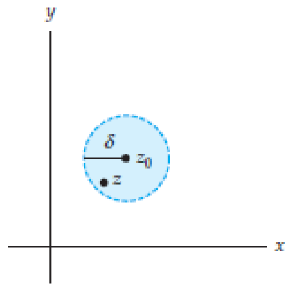
Complex versus real

In planul complex distanta se calculeaza prin:

$$d(z,w) = |z-w| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}, \quad z,w \in \mathbb{C}.$$

Tinand cont de aceasta putem sa vizualizam o vecinatate deschisa in jurul lui z_0 ca fiind un disc centrat in z_0 si de raza δ, adica multimea:

$$D(z_0,\delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}.$$

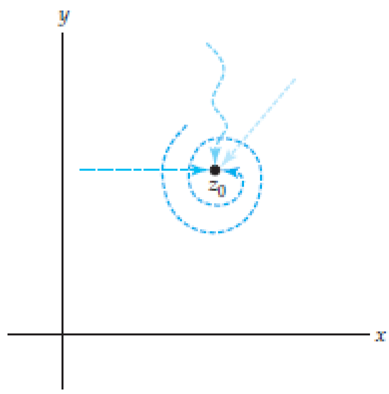


Siruri convergente:
Fie $(z_n)_n$ un sir de numere complexe si $z \in \mathbb{C}$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

$$z_n \to z, \text{ cand } n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re(z_n)} \to \mathrm{Re(z)} \text{ si } \mathrm{Im(z_n)} \to \mathrm{Im(z)}, \text{ cand } n \to \infty$$

In $\mathbb{C}$ o functie $f : D \to \mathbb{C}$ are limita L in punctul z_0 daca si numai daca pentru toate sirurile $(z_n)_n$, care converg la z_0, sirul $f(z_n)$ converge la L.

Diferenta dintre cazul complex si cel real este ca in $\mathbb{C}$ sirurile nu se apropie de limita doar dintr-o directie ci se pot apropia dintr-o infinitate de directii sau traiectorii:



In cazul sirurilor reale apropierea de limita se face doar pe o traiectorie orizontala (axa Ox). In complex convergenta este mai greu de realizat dupa cum arata urmatorul exemplu.

Ilustrare:

Limita $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{2z}$ nu exista !

Consideram un sir $(z_n)_n$, care converge pe directia axei Ox la 0, de exemplu $z_n = \frac{1}{n}$. Atunci vom avea:

$$f(z_n) = \frac{\overline{z_n}}{2z_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Dar pentru un alt sir $(w_n)_n$, care converge pe directia axei Oy la 0, de exemplu $w_n = \frac{1}{n}i$, va rezulta:

$$f(w_n) = \frac{\overline{w_n}}{2w_n} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{2i}{n}} = -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}.$$

Deci o contradictie cu criteriul lui Heine. □

Limita unei functii complexe:
Fie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ si $L = a + ib$, atunci $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ daca si numai daca:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \quad \text{und} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b.$$

Exemplu:

Calculam limita $\lim_{z\to 1+i}(z^2+1)$. Fie $z = x + iy$, ca de obicei. Atunci:

$$f(z) = z^2 + i = (x+iy)^2 + i = x^2 - y^2 + (2xy+1)i$$

Pentru a aplica ultima teorema, consideram $u(x,y) = x^2 - y^2$ si $v(x,y) = 2xy + 1$. Aici $z_0 = 1 + i$, deci $x_0 = 1$ si $y_0 = 1$.

Atunci:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 - y^2) = 0$$

si:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (2xy+1) = 3$$

si limita exista si e $L = \lim_{z\to 1+i}(z^2+1) = 0 + 3i$.

Continuitatea functiilor complexe:
Fie $D \subset \mathbb{C}$ o vecinatate deschisa a lui $z_0 = x_0 + iy_0$. O functie $f : D \to \mathbb{C}$:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

este continua in z_0, daca functiile reale u, v sunt continue in (x_0, y_0).

Functia exponentiala $f(z) = e^z$ este continua pe $\mathbb{C}$, caci $u(x, y) = e^x \cos y$ si $v(x, y) = e^x \sin y$ sunt ambele produse de functii reale continue.

Derivabilitatea functiilor complexe:
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu. O functie $f : D \to \mathbb{C}$ se numeste derivabila complex in $z_0 \in D$, daca exista limita:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Numarul complex $f'(z_0)$ se numeste derivata lui f in z_0.
O functie se numeste olomorfa in $z_0 \in \mathbb{C}$ cand este definita intr-o vecinatate deschisa a acestuia $D(z_0, \delta) \subset \mathbb{C}$ si este derivabila complex in toate punctele vecinatatii.

Exemplu:
Functia $f(z) = x + 4iy$ nu este derivabila complex in niciun punct z_0 !
Sa consideram $z_0 = x_0 + iy_0$ si sa formam limita:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{(x - x_0) + i(4y - 4y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Daca ne apropiem de (x_0, y_0) vertical, adica prin siruri (x_0, y_n) cu $y_n \to y_0$ obtinem:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{(x - x_0) + i(4y - 4y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(x_0 - x_0) + i(4y_n - 4y_0)}{(x_0 - x_0) + i(y_n - y_0)} = 4$$

$\square$

Derivabilitatea complexa este ceva mai pretentioasa decat simpla derivabilitate a componentelor u si v dupa cum arata teorema **Looman-Menchoff**:

Derivabilitate complexa vs. derivabilitate reala:
Fie functia $f : D \to \mathbb{C}$ definita prin $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, atunci cand $z = x + iy$ si sunt indeplinite urmatoarele conditii:

i) f este continua intr-o vecinatate a lui $z_0 \in D$.

ii) derivatele partiale $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ si $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ exista intr-o vecinatate a lui z_0.

iii) functiile u, v satisfac intr-o vecinatate a lui z_0 conditiile Cauchy-Riemann:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Atunci functia f este derivabila complex in z_0 (chiar olomorfa).

Exemplu:

Vom studia olomorfia functiei $f(z) = \cos z$ intr-un punct oarecare notat $z_0 = x_0 + iy_0$ $\square$

Reguli de derivare pentru functii olomorfe (ca si in cazul real):

i) liniaritate: $(\alpha f(z) + \beta g(z))' = \alpha f(z)' + \beta g(z)'$

ii) regula produsului: $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

iii) regula catului: $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

iv) derivarea functiilor compuse: $f(g(z))' = f'(g(z))g'(z)$

Integrarea functiilor complexe

Integrala Riemann a unei functii cu valori complexe se defineste in mod natural prin:

Integrala Riemann:
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ o functie continua. Definim integrala lui f pe $[a, b]$ prin:
$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

Exemplu:

$$\int_0^{\pi} \cos t + i \cdot \sin t dt = \int_0^{\pi} \cos t dt + i \cdot \int_0^{\pi} \sin t dt = \sin t \Big|_0^{\pi} + i \left(- \cos t \Big|_0^{\pi} \right)$$
$$= 0 + i \cdot 2 = 2i.$$

□

Pentru a defini insa integrala unor functii complexe este nevoie de un studiu amanuntit al curbelor si al unor clase de multimi in planul complex.

Curbe in planul complex:
Prin curba in planul complex vom intelege o aplicatie continua:

$$c : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad a < b,$$

intre un interval compact si multimea numerelor complexe. Orice curba va avea o reprezentare:

$$c(t) = x(t) + i \cdot y(t), \quad t \in [a, b]$$

O curba se numeste neteda daca este derivabila cu derivata continua.

Exemplu:

• Fie $z_1 = x_1 + y_1$ si $z_2 = x_2 + y_2$. Segmentul dintre punctele $A(x_1, y_1)$ si $B(x_2, y_2)$ reprezinta de fapt o curba $c : [0, 1] \to \mathbb{C}$:

$$c(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = x(t) + i \cdot y(t), \quad t \in [0, 1],$$

unde $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ si $y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1)$.

• Un cerc de raza R si centru $M(x_0, y_0)$ poate fi interpretat ca fiind o curba $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$:

$$c(t) = (x_0 + R \cos t) + i \cdot (y_0 + R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

□

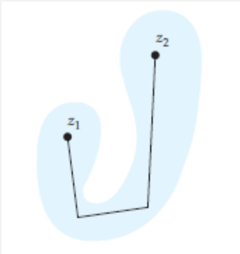
Curbe netede pe portiuni :
O curba se numeste neteda pe portiuni daca exista o partitie:

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

astfel ca c sa fie neteda pe fiecare interval (a_k, a_{k+1}), $0 \leq k < n - 1$.

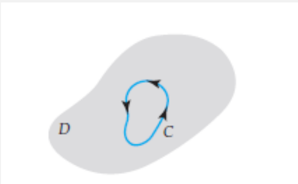
Domeniu:

Multimea $D \subset \mathbb{C}$ se numeste domeniu daca este deschisa si pentru orice $z_1, z_2 \in D$ exista o curba $c \subset D$ care uneste z_1 cu z_2.



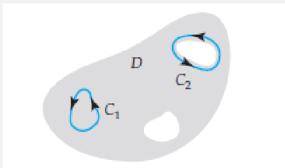
Domeniu simplu conex:

D este un domeniu si curba inchisa γ aflata in D poate fi contractata pana devine un punct al multimii respective. (nu are gauri)



Domeniu multiplu conex:

Un domeniu care nu este simplu conex se numeste multiplu conex.(are gauri)



Integrala in planul complex:
Fie $D \in \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o functie continua si $c : [a, b] \to D$ o curba neteda. Atunci definim integrala curbilinie complexa a lui f pe curba c prin:

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(c(t)) \cdot c'(t)dt$$

Cand c este doar neteda pe portiuni definim:

$$\int_c f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z)dz.$$

pentru partitia corespunzatoare.

Exemplu:

Calculam:

$$\int_c \frac{1}{z} dz,$$

unde c este cercul unitate.

Pentru inceput curba c are reprezentarea parametrica:

$$c(t) = \cos t + i \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Conform definitiei:

$$\begin{aligned}
\int_c \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (\cos t + i \sin t)' dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos t - i \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t + i \cos t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt = \int_0^{2\pi} i \, dt = 2\pi i.
\end{aligned}$$

$\square$

Proprietati elementare ale integralelor complexe:

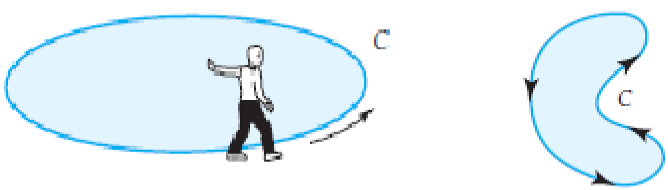
i) $\displaystyle\int_c \alpha f(z) + \beta f(z) dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

ii) $\displaystyle\int_{c_1 \cup c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz,$

Remarca:

- Integrala complexa nu depinde de parametrizarea curbei.
- Integrala complexa curbilinie depinde de orientarea curbei ! Daca notam prin c^- curba c data cu orientarea inversa, atunci:

$$\int_{c^-} f(z) dz = -\int_c f(z) dz.$$



Orientare pozitiva

Recuperarea unui rezultat clasic:
Fie $D \subset \mathbb{C}$ deschisa si $f : D \to \mathbb{C}$ continua. O primitiva a lui f este o functie olomorfa $F : D \to \mathbb{C}$ pentru care $F' = f$. Atunci pentru orice curba neteda pe portiuni c aflata in D are loc:

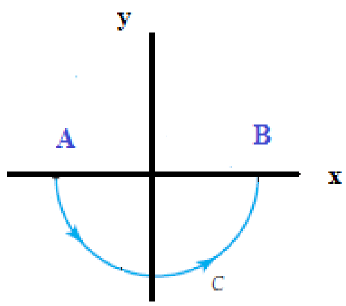
$$\int_c f(z)dz = F(c(b)) - F(c(a)).$$

Exemplu:

Functia $f(z) = z$ are primitiva:

$$F(z) = \frac{z^2}{2}.$$

Fie acum c semicercul cercului unitate (considerat cu orientarea pozitiva) situat intre punctele $A(-1, 0)$ si $B(1, 0)$. Acest semicerc considerat ca fiind o curba admite parametrizarea $c(t) = \cos t + i \sin t$ pentru $t \in [\pi, 2\pi]$, deoarece $z_A = -1 + 0i = \cos \pi + i \sin \pi$ si $z_B = 1 + 0 \cdot i = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$.



$$\int_c zdz = F\left(c\left(2\pi\right)\right) - F(c(\pi)) = (1 + i \cdot 0)^2 - (-1 + i \cdot 0)^2 = 1 - 1 = 0$$

Pe de alta parte:

$$\begin{aligned}
\int_c zdz &= \int_\pi^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(\cos t + i \sin t)' dt \\
&= \int_\pi^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt \\
&= \int_\pi^{2\pi} -\sin(2t) + i \sin(2t) dt = \left.\frac{\cos(2t)}{2}\right|_\pi^{2\pi} - i \left.\frac{\cos(2t)}{2}\right|_\pi^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Dezvoltari in serii de puteri in jurul lui 0

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Serii de puteri in jurul unui z_0 oarecare:
In general pentru functii olomorfe are loc formula de dezvoltare in serie Taylor:

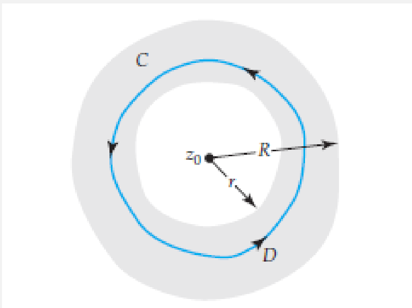
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

in jurul lui $z_0 \in \mathbb{C}$.

Dezvoltarea in serie Laurent:

Fie f o functie olomorfa in coroana circulara $r < |z - z_0| < R$. Atunci ea poate fi dezvoltata in serie Laurent in punctele acestei multimi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n.$$



Coeficientii dezvoltarii sunt dati prin:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

unde c este o curba inchisa simpla, pozitiv orientata, care este situata in totalitate in $r < |z - z_0| < R$ si contine punctul z_0 in interiorul sau.

Exemplu:

Consideram functia $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ pe care dorim sa o dezvoltam in serie Laurent in jurul lui $z_0 = 0$ si putem considera z ca facand parte din coroana circulara $0 < |z| < \infty$.

Cu ajutorul dezvoltarii in serie Taylor:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

obtinem dezvoltarea in serie Laurent in jurul lui $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots$$

deci $a_n = 0$ pentru $n < -1$, $a_{-1} = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3!}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{5!}$ si asa mai departe. □

Singularitati izolate:
Fie $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ si $F : D \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Atunci numim z_0 singularitate izolata a lui f.

In cele ce urmeaza vom dori sa clasificam singularitatile izolate ale unei functii.

Caracterizarea singularitatilor izolate prin intermediul seriilor Laurent:

Functia f poseda in $z_0 \in \mathbb{C}$ o singularitate izolata. Atunci numim z_0:

i) o singularitate aparenta a lui f, daca in dezvoltarea in serie Laurent in jurul lui z_0 toti a_n cu $n < 0$ sunt nuli:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

ii) un pol de ordinul m al lui f, daca in dezvoltarea in serie Laurent $a_n = 0$ pentru $n < -m$:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

iii) o singularitate esentiala, cand dezvoltarea Laurent admite o infinitate de termeni cu exponent negativ:

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Teorema de caracterizare a polilor:
Functia f are in z_0 un pol de ordin m daca si numai daca exista o functie g olomorfa in z_0 astfel ca $g(z_0) \neq 0$ iar intr-o vecinatate a lui z_0 avem:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

Consecinta

Daca functia f are in z_0 un pol, atunci:

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

Exemplu:

$f(z) = \dfrac{\cos z}{(z - i)^2}$ are in $z_0 = i$ un pol de ordin 2, verificam usor ca $\cos(i) \neq 0$ iar $\cos z$ este olomorfa in orice punct din $\mathbb{C}$.

Teorema de caracterizare a singularitatilor aparente:
Singularitatea z_0 este o singularitate aparenta daca si numai daca limita $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ exista in $\mathbb{C}$.

Exemplu:

Functia $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ are o singularitate aparenta in $z_0 = 0$. Daca incercam sa aplicam teorema de caracterizare a polilor observam ca $\sin 0 = 0$ deci nu se poate aplica. In schimb fie dezvoltam in serie Laurent in jurul lui z_0 si folosind deja mentionata dezvoltare:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

vedem ca:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

si prin urmare nu avem termeni cu exponent negativ deci z_0 este singularitate aparenta conform definitiei.

In acelasi timp putem observa ca

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

deci aplicand teorema de caracterizare ajungem la acelasi rezultat. $\square$

Teorema de caracterizare a singularitatilor esentiale:
Singularitatea z_0 este o singularitate esentiala daca si numai daca limita $\lim_{z\to z_0} f(z)$ nu exista iar $\lim_{z\to z_0} |f(z)| \neq \infty$.

Exemplu:

Functia $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ are in $z_0 = 0$ o singularitate esentiala.

Metoda 1: Limita $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ nu exista si $\lim_{z\to 0} |e^{\frac{1}{z}}| \neq \infty$.

Pentru prima limita alegem $z_n = \frac{1}{n} \to 0$ si $w_n = -\frac{1}{n} \to 0$. Atunci $f(z_n) = e^n$ si $f(w_n) = e^{-n}$ dar:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(w_n)$$

Pentru a argumenta relatia $\lim_{z\to 0} |f(z)| \neq \infty$ putem considera aceleasi siruri. Atunci $|e^z| = e^x$, pentru $z = x + iy \in \mathbb{C}$ si prin urmare:

$$\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty \neq 0 = \lim_{n\to\infty} |f(w_n)|.$$

Metoda 2: Pe de alta parte putem sa dezvoltam in serie Laurent functia $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ in jurul punctului $z_0 = 0$. Pornim din nou de la dezvoltarea in serie Taylor, de data aceasta a lui e^z in $z_0 = 0$:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

De unde rezulta:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Aceasta ultima identitate arata ca dezvoltarea Laurent a lui f in jurul lui $z_0 = 0$ are o infinitate de termeni cu exponent negativ.

Reziduul unei functii:

Fie $D \subset \mathbb{C}$ deschisa, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa si $\varepsilon > 0$, astfel ca $D(z_0, \varepsilon) \subset D$. Atunci numim:

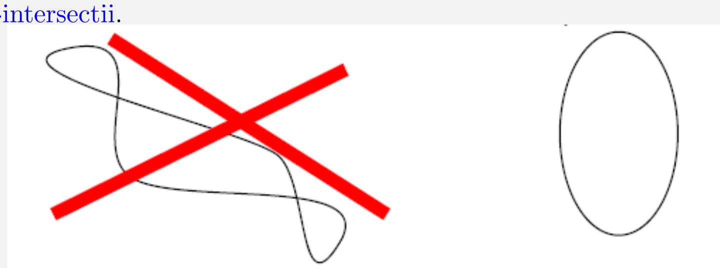
$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z)dz$$

reziduul lui f in z_0.

Remarca:

- Reziduul nu depinde de alegerea razei ε.
- z_0 nu trebuie sa fie in mod obligatoriu o singularitate dar cand nu este singularitate reziduul va fi 0.

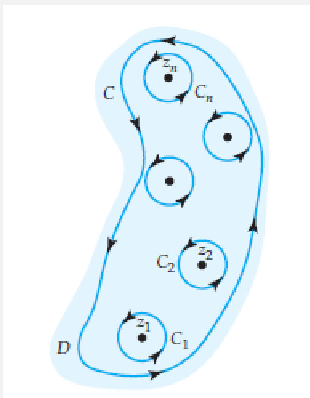
Curba inchisa simpla:
O curba inchisa $c : [a, b] \to \mathbb{C}$ se numeste simpla, atunci cand pe intervalul $[a, b)$ este injectiva. Din punct de vedere geometric asta inseamna ca nu are puncte de auto-intersectii.



Teorema reziduurilor:
Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puncte distincte in D si $f : D \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ olomorfa.

Atunci pentru orice curba neteda pe portiuni, inchisa simpla si pozitiv orientata c, care se afla in totalitate in D si contine in interior punctele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ avem relatia:

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$



Remarca:
Pentru o curba c orientata negativ se obtine:

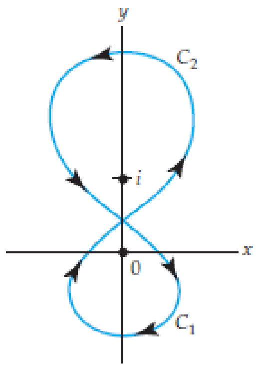
$$\int_c f(z)dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Exemplu:

Vom evalua urmatoarea integrala:

$$\int_c \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz$$

unde c este curba din desenul alaturat:



Se observa usor ca $c = c_1 \cup c_2$ si c_2 este orientata pozitiv iar c_1 este orientata negativ. Functia $f(z) = \dfrac{z^3+3}{z(z-i)^2}$ are o singularitate izolata in c_1 in punctul $z_1 = 0$ si alta in c_2 in punctul $z_2 = i$.

Pentru inceput avem:

$$\int_{c_1 \cup c_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = \int_{c_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz + \int_{c_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz$$

Apoi conform teoremei reziduurilor:

$$(\star) \quad \int_{c_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}, 0\right)$$

si

$$(\star\star) \quad \int_{c_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}, i\right).$$

$\square$

Din moment ce reziduurile devin instrumente importante in calculul integralelor avem nevoie de metode mai rapide de evaluare a acestora.

Calculul reziduurilor:

i) Daca functia olomorfa f are in punctul z_0 un pol de ordin m, $m \geq 1$, atunci:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

Pentru un pol simplu $(m = 1)$ avem:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Calculul reziduurilor:

ii) In general:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1},$$

unde a_{-1} este coeficientul lui $\dfrac{1}{z-z_0}$ dezvoltarea Laurent a lui f in jurul punctului z_0.

Formulele integrale ale lui Cauchy

$\Longrightarrow$ Fie G un domeniu simplu conex si $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Atunci pentru orice curba inchisa neteda pe portiuni c din D are loc:

$$\int_c f(z)dz = 0,$$

deoarece $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0$ pentru o functie olomorfa in z_0.

$\Longrightarrow$ Fie G un domeniu si $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Atunci pentru o multime $D(z_0, \varepsilon) \subset\subset D$:

$$\int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

deoarece z_0 este un pol pentru functia din interiorul integralei si:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, z_0\right) = \frac{1}{n!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^n}{dz^n}\left((z-z_0)^{n+1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

pentru orice functie olomorfa f.

Exemplu:

In ultimul exemplu ambele singularitati sunt poli, deoarece:

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} = \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}$$

si notand $g(z) = \frac{z^3+3}{(z-i)^2}$ avem scrierea $f(z) = \frac{g(z)}{z}$, iar g este olomorfa in $z_1 = 0$ si $g(0) \neq 0$.

Din teorema de carcterizare a polilor rezulta ca f are in $z_1 = 0$ un pol simplu. Din aceasta cauza:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}, 0\right) = \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{z^3+3}{z(z-i)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z^3+3}{(z-i)^2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Prin urmare:

$$(\star) \quad \int_{c_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz = -2\pi i \cdot (-3) = 6\pi i.$$

Pe de alta parte:

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} = \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}$$

si $h(z) = \frac{z^3+3}{z}$ este olomorfa si are proprietatea $h(i) \neq 0$. Asadar f are in $z_2 = i$ un pol de ordinul doi. Deci:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{z^3+3}{z(z-i)^2}, i\right) &= \lim_{z_0 \to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\right) \\
&= \lim_{z_0 \to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^3+3}{z}\right) = \lim_{z_0 \to i} \frac{3z^2 \cdot z - (z^3+3)}{z^2} \\
&= \frac{-2i-3}{-1} = 2i+3.
\end{aligned}$$

$$\implies (\star\star) \quad \int_{c_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz = 2\pi i \cdot (2i+3) = -4\pi + 6\pi i$$

si in concluzie:

$$\int_c \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} dz = 6\pi i + -4\pi + 6\pi i = -4\pi + 12\pi i.$$

□

Teorema semireziduurilor:
Fie $D \subset D$ un domeniu simplu conex si c o curba simpla inchisa, neteda pe portiuni in domeniul D. Consideram o functie f care admite in interiorul curbei c un numar finit de singularitati izolate $z_1, z_2, \ldots, z_n$ si un numar finit de poli simpli $w_1, w_2, \ldots, w_p$ situati pe curba c astfel ca:

$$f : D \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_p\} \to \mathbb{C}$$

este olomorfa. Atunci:

i) daca c admite o tangenta unica in $w_1, w_2, \ldots w_p$ atunci:

$$\int_c f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}(f, z_k) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Rez}(f, w_j)$$

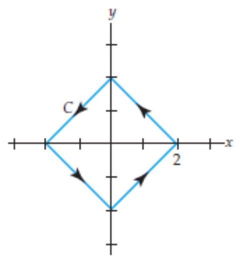
ii) daca α_j este unghiul dintre semitangentele in w_j la c:

$$\int_c f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}(f, z_k) + i \sum_{j=1}^{p} (\pi - \alpha_j) \operatorname{Rez}(f, w_j)$$

Exemplu:

Vom calcula integrala:

$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)}dz,$$



unde c este curba alaturata. Se observa usor ca cele doua singularitati ale integrandului sunt $z_1 = 0$ si $z_2 = 2$ ambele fiind poli simpli iar ultima fiind siituata pe curba.

In punctul z_2 curba nu admite o tangenta unica iar unghiul format de semitangente va fi $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Conform teoremei semireziduurilor avem:

$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)}dz = 2\pi i \text{Rez}(f,0) + i(\pi - \frac{\pi}{2})\text{Rez}(f,2)$$

Pentru poli simpli avem formulele:

$$\text{Rez}(f,0) = \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{e^z}{z(z-2)} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{Rez}(f,2) = \lim_{z\to 0}(z-2)\frac{e^z}{z(z-2)} = \frac{e^2}{2}.$$

In concluzie:

$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)}dz = -\pi i + i\frac{\pi}{2}\frac{e^2}{2}$$

$\square$

Probleme propuse

Problema 1. *Demonstrati ca:* $\sinh z = 0$ *daca si numai daca* $z = n\pi i$ *si* $\cosh z = 0$ *daca si numai daca* $z = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi i$.

Problema 2. *Scrieti urmatoarele numere complexe in forma polara:*

$$z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \quad z_2 = 1 - i.$$

i) *Aflati argumentul principal* $Arg(z_1)$ *si apoi calculati* $(-\sqrt{3} - i)^{50}$.

ii) *Pentru numerele complexe* $z_1 = -1, z_2 = 5i$, *verificati ca au loc:*

$$Arg(z_1 z_2) \neq Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

in schimb:

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$
$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) + arg(z_2).$$

Problema 3. *Aratati ca* $|\text{Re } z| \leq |z|$ *si* $|\text{Im } z| \leq |z|$. *Demonstrati identitatea:*

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}), \qquad z, w \in C$$

si inegalitatea triunghiului $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Problema 4. *Schitati multimea punctelor* z, *in planul complex, care satisfac urmatoarele conditii:*

i) $1 < |z - 1 - i| \leq 2$

ii) $|z - i| = |z - 1|$

iii) $|Arg(z)| < \frac{\pi}{4}$

iv) $\text{Re }((1+i)z - 1) = 0$

v) $0 < \text{Re } z < 1$.

Problema 5. *Rezolvati in* $\mathbb{C}$ *ecuatiile:*

$$\sin z = 2$$
$$\cos z = -3 + i$$

Problema 6. *Rezolvati in* $\mathbb{C}$ *ecuatiile:*

$$z^6 = 1 + i$$
$$z^2 + z + 1 = 0$$
$$z^4 + 1 = 0$$

Calculati apoi $\sqrt{3 + \sqrt{3}i}$.

Problema 7. *Aratati ca urmatoarele functii sunt olomorfe in* $z_0 = 0$*:*

$$f(z) = \cos z, \quad g(z) = \sinh z, \quad h(z) = e^z.$$

Problema 8. *Demonstrati identitatile:*

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$
$$\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$$
$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$.

Problema 9. *Calculati reziduurile functiilor de mai jos in punctele specificate*

i) $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^2}$, $\quad Rez(f,0) = ?$

ii) $f(z) = \frac{\sin(z)+1}{z^3}$, $\quad Rez(f,0) = ?$

iii) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, $\quad Rez(f,0) = ?$

iv) $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^2}$, $\quad Rez(f,1) = ?$

Problema 10. *Calculati integralele:*

i) $I = \displaystyle\int_c \frac{z^2}{(z-1)^3}\,dz, \quad unde \ \ c : x^2 + y^2 = 2x$

ii) $J = \displaystyle\int_c \frac{z-e}{z^2+1}\,dz \quad unde \ \ c: \ |z| = 3$

iii) $K = \displaystyle\int_{|z+2|=5} \frac{3i + z^4}{(z+3)^3} dz$

iv) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^3} dz$

Problema 11. *Calculati integrala:*

$$\int_c \frac{2z-1}{z^2(z-1)^3} dz$$

unde c este dreptunghiul definit de $x = -2$, $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$ *si* $y = 1$.

Problema 12. *Calculati integrala:*

$$\int_c \frac{1}{z^2+1} dz$$

unde c semicercul definit de $y = 0$ *si* $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Problema 13. *Calculati integrala:*

$$\int_c z^2 e^z + \frac{ze^z}{z^4 - \pi^4} dz$$

unde c este curba $4x^2 + y^2 = 16$

Bibliografie

[1] D. G. Zill, P. D. Shanahan. A First Course in Complex Analysis with Applications, *Jones and Bartlett Publishers, Inc.*, 2003.

[2] C. I. Hedrea. Notite de curs: Matematici speciale, 2016.

[3] R. Negrea. Notite curs: Matematici speciale, 2020

[4] K. Fritzsche. Grundkurs Funktionentheorie: Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen, *Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg*, 2009.