"In der Mathematik versteht man die Dinge nicht. Man gewöhnt sich nur an sie."

John von Neumann

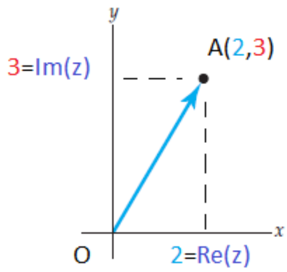
7 Funktionentheorie

Komplexe Zahlen

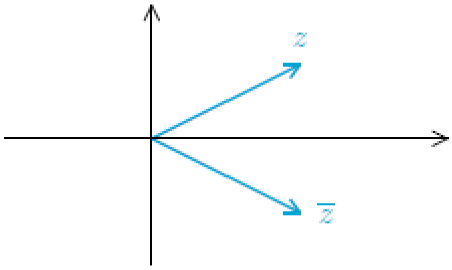
Jede komplexe Zahl besitzt eine eindeutige Darstellung:

$$z = x + i \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Komplexe Zahlen kann man auch durch gerichtete Strecken (Vektoren) darstellen, die im Koordinatenursprung beginnen und im entsprechenden Punkt der Zahlebene enden. Die komplexe Zahl $z = 2+3i$ kann man daher nicht nur durch den Punkt $A(2, 3)$ darstellen, sondern auch durch den Vektor $\overrightarrow{OA}$



Man nennt $x = \mathrm{Re}(z)$ den Realteil und $y = \mathrm{Im}(z)$ den Imaginärteil der komplexen Zahl z. Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ so nennt man $\bar{z} = x - iy$ die zu z konjugierte komplexe Zahl. Man erhält diese Zahl durch Spiegelung an der x-Achse:

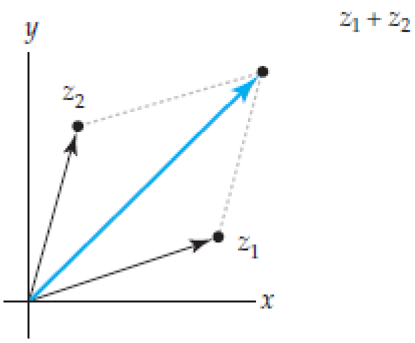


Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind gegeben durch:

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

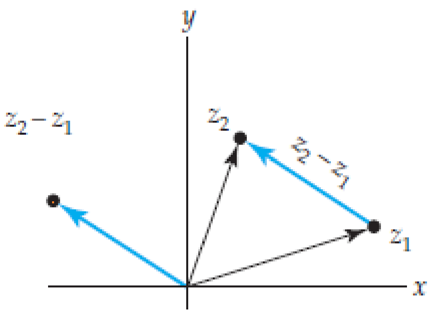
Die Addition zweier komplexen Zahlen z_1, z_2 ist definiert durch:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$



Die Substraktion zweier komplexen Zahlen z_1, z_2 ist definiert durch:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$



Für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

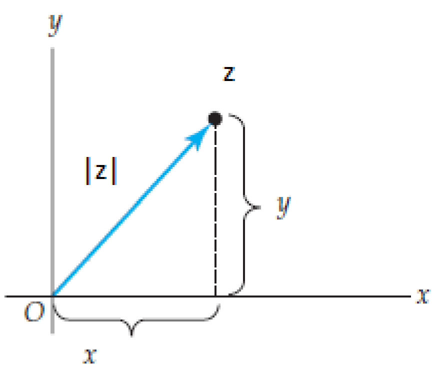
Eigentlich ist das die Klammerregel der Multiplikation zweier reellen Zahlen mit der neuen Information:

$$i^2 = -1$$

Die Länge des Vektors, der eine komplexe Zahl darstellt, bezeichnet man als den Betrag dieser komplexen Zahl. Den Betrag der komplezen Zahl $z = x + iy$ bezeichnet man durch $|z|$ oder durch den Buchstaben r.

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

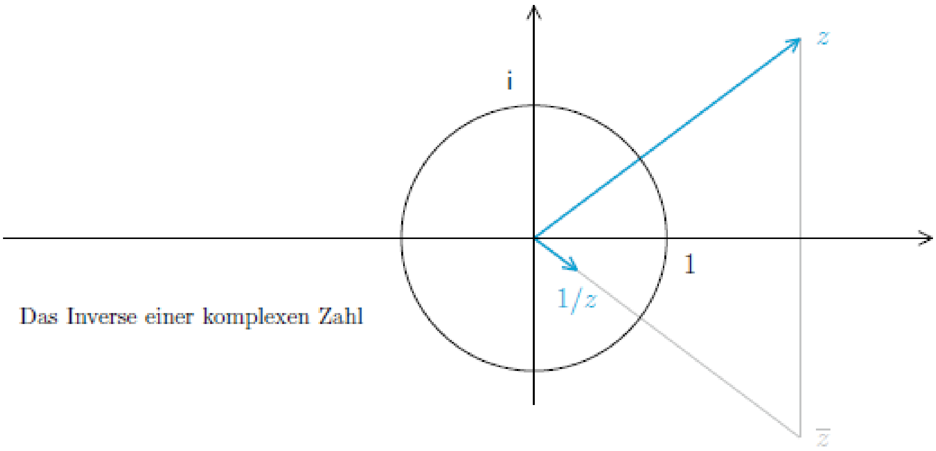
Der Betrag stimmt mit der euklidischen Norm des Vektors z überein:



Ist $z \neq 0$, gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Das Inverse der komplexen Zahl gewinnt man demnach, indem man z zunächst an der x-Achse spiegelt, und dann am Einheitskreis. Denn $\frac{1}{z}$ zeigt in die gleiche Richtung $\bar{z}$, hat aber die Länge $\frac{1}{r}$, wenn z die Länge r hat.

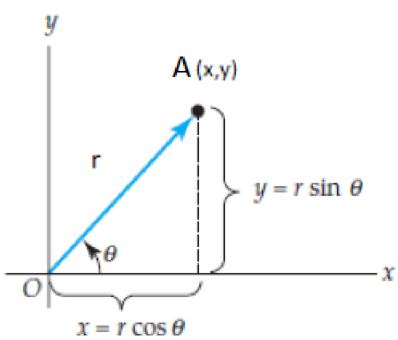


Das Inverse einer komplexen Zahl

Die Division zweier komplexen Zahlen z_1, z_2 ist die Multiplikation mit dem Inverse von z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (x_1 + iy_1) \cdot \frac{1}{x_2 + iy_2} = (x_1 + iy_1) \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 - i(y_1 x_2 + x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Der Winkel zwischen der Abszissenachse Ox und dem Vektor $\overrightarrow{OA}$, der die komplexe Zahl darstellt, heisst Argument der komplexen Zahl $z = x + iy$.



Gibt es die Formel:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Denn cos und sin sind 2π-periodisch, ist das Argument nicht eindeutig, sondern $\theta \pm 2\pi, \theta \pm 4\pi, \ldots$ sind andere Argumente.

Mit:

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

bezeichenen wir die Menge aller Argumente.

Für $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sieht man leicht ein:

Polardarstellung: Jede komplexe Zahl lässt sich in der Gestalt:

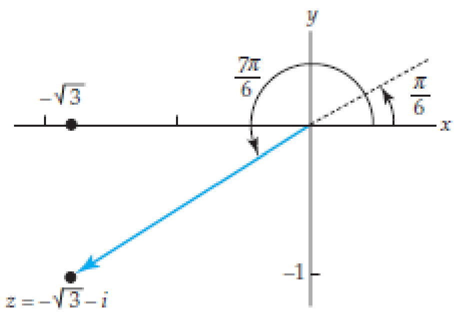
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

darstellen, wobei r und θ Polarkoordinaten von z sind.

Beispiel:

Wir suchen die Polarkoordinaten-Darstellung von $z = -\sqrt{3} - i$. Denn $x = -\sqrt{3}$ und $y = -1$ erhalten wir:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$



Der Punkt $A(-\sqrt{3}, -1)$ liegt im dritten Quadrant deshalb:

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Einen solchen Wert bekommen wir für $k = 1$, somit $\theta = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \frac{7\pi}{6}$.

Der Betrag ist $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$.

Schliesslich die Polardarstellung lautet:

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

□

Hauptargument: Man bezeichnet den Winkel θ von z, der:

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

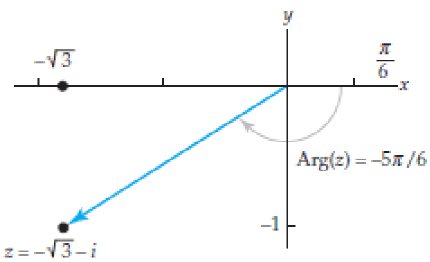
erfüllt, als Hauptargument von z, in Formeln $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. Deshalb gibt es die Beziehung:

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel:

In dem letzten Beispiel ein Argument war $\theta = \frac{7\pi}{6}$. Mit Hilfe der Formel $\mathrm{Arg}(z) = \theta \pm 2k\pi \in (-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{N}$, suchen wir das Hauptargument.

Deshalb $\mathrm{Arg}(z) = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.



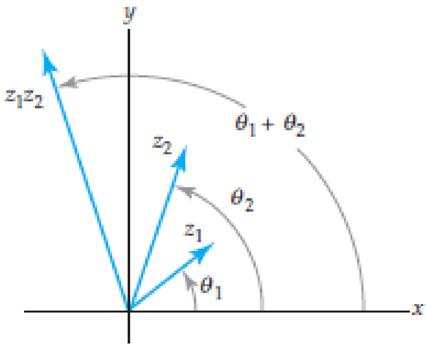
Haben wir auch die alternative Polardarstellung:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

□

Eine geometrische Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen erhält man mit Hilfe der Polarkoordinaten:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$



Eine änliche Situation für Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Formel von Moivre:

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Die Lösungen der Gleichung $w^n = z$:
Für jede natürliche Zahl n hat dei Gleichung $w^n = z$ genau n Lösungen, nämlich:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

wobei $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Beispiel:

Die Gleichung $w^n = i$, $w \in \mathbb{C}$ hat drei Lösungen. Man sieht leicht ein, dass $|i| = 1$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$, somit:

Für $k = 0$:

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Für $k = 1:$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Für $k = 2:$

$$w_3 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}$$
$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= -i$$

$\square$

Die n-ten Einheitswurzeln $\varepsilon^n = 1$:

Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln, nämlich:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\\
\varepsilon_2 &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_k &= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_n &= 1
\end{aligned}$$

Komplexwertige Funktionen einer Variablen

Eine komplexwertige Funktion ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ bei der die Zielmenge die Menge der komplexen Zahlen ist. Die komplexwertigen Funktionen mit $D \subset \mathbb{C}$ heissen komplexe Funktionen.

Manchmal schreiben wir:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

wobei $z = x + iy$, für eine komplexe Funktion f. Also u, v sind reellwertige Funktionen.

Lineare Funktionen: Eine komplexe Funktion f heisst linear falls f für feste komplexe Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$f(z) = az + b, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Bemerkung:

• Die Wahl $a = 1$ führt zu eine Translation oder Parallelverschiebung um b:

$$f(z) = z + b, \quad z \in \mathbb{C}.$$

• Die Wahl $a \in \mathbb{R}_+$ und $b = 0$ führt zu einer Streckung (bzw. Stauchung):

$$f(z) = az, \quad z \in \mathbb{C}.$$

d.h. der Betrag von z wird gestreckt ($a > 1$) oder gestaucht ($0 < a < 1$) Allgemein spricht man von einer Skalierung mit Skalierungsfaktor $a > 0$.
• Die Wahl $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ und $b = 0$ führt zu einer Rotation um den Ursprung mit dem Winkel $\theta = \mathrm{Arg}(a)$:

$$f(z) = (\cos\theta + i\sin\theta)z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Charakterierung einer linearen Abbildung:
Jede lineare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lässt sich als Komposition:

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben:
1) $f_1(z) == (\cos\theta + i\sin\theta)z$ eine Rotation um den Ursprung
2) $f_2(z) = |a|z$ eine Skalierung
3) $f_3(z) = z + b$ eine Translation um den Vektor b

Exponentialfunktion:
Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} := e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Man sieht leicht ein, dass $|e^z| = e^x$ und $\arg(z) = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Eigenschaften der Exponentialfunktion:

i) Die Exponentialfunktion ist eine $2\pi i$-periodische Funktion:

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ii) $e^z e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C},$

iii) $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

iv) $(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Der komplexe Logarithmus:
Die mengenwertige Abbildung:

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$$

ist der komplexe Logarithmus $\mathrm{Ln} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ und die Lösung der Gleichung:

$$e^w = z.$$

Eigenschaften des komplexen Logarithmus:
Für $z, w \neq 0$ gelten:

i) $\mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(w) = \mathrm{Ln}(zw)$

ii) $\mathrm{Ln} z - \mathrm{Ln}(w) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z}{w}\right)$

iii) $\mathrm{Ln}(z^n) = n \cdot \mathrm{Ln}(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Die allgemeine Potenzfunktionen:
Die komplexen Potenzfuntkionen werden mit Hilfe des Logarithmus definiert:

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln|z| + i \arg(z))}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ ist eine beliebige komplexe Konstante.

Die komplexen Potenzfunktionen sind auch mengenwertige Funktionen. Der Ausdruck $e^{\alpha(\ln|z| + i\mathrm{Arg}(z))}$ heisst Hauptwert der Potenzfunktion $f(z) = z^\alpha$ und ist eine Funktion von z.

Eigenschaften des Hauptwertes der komplexen Potenzfunktionen:
Für $z \in \mathbb{C}^*$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gelten:

i) $z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta}$

ii) $\frac{z^\alpha}{z^\beta} = z^{\alpha-\beta}$

ii) $(z^\alpha)^n = z^{n\alpha}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Bemerkung:

Die Regel $z^\alpha \cdot w^\alpha = (zw)^\alpha$ gilt nicht für alle $z, w \in \mathbb{C}^*$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Beispielsweise finden wir für den Hauptwert der Potenzfunktion:

$$(-1)^i \cdot (-1)^i = e^{i^2\pi} e^{i^2\pi} = e^{-2\pi}$$

aber:

$$[(-1) \cdot (-1)]^i = 1^i = e^{i \cdot 0} = 1$$

Komplexe hyperbolische und trigonometrische Funktionen:
Die folgende komplexe Funktionen sind Fortsetzungen der entsprechenden elementaren reellen Funktionen:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Diese Funktionen sind stetig und differenzierbar auf $\mathbb{C}$!

Elementare Eigenschaften :
Für alle $z \in \mathbb{C}$:

i) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad$ und $\quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

ii) $\cosh(iz) = \cos z \quad$ und $\quad \sinh(iz) = i \sin z$

iii) In $\mathbb{C}$ gelten, wie in $\mathbb{R}$, die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen:

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

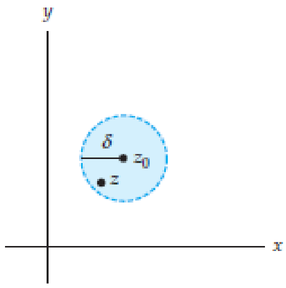
Komplex versus reell

Der Abstand in der komplexen Ebene ist gegeben durch:

$$d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Normalerweise betrachten wir als offene Umgebung des Punktes z_0 eine offene Kreisscheibe um z_0 vom Radius δ, d.h. die Menge:

$$D(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}.$$

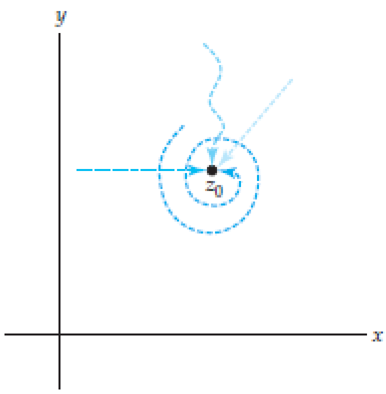


Konvergente Folgen:
Sei $(z_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen und z eine weiter komplexe Zahl. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$z_n \to z, \text{ für } n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re(z_n)} \to \mathrm{Re(z)} \text{ und } \mathrm{Im(z_n)} \to \mathrm{Im(z)}, \text{ für } n \to \infty$$

In $\mathbb{C}$ eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat einen Grenzwert L im Punkt z_0 genau dann, wenn für alle Folgen $(z_n)_n$, die gegen z_0 konvergieren, die Folge $f(z_n)$ gegen L konvergiert.

Der Unterschied zwischen dem reellen Fall und dem komplexen Fall ist, dass in $\mathbb{C}$ die Folgen nicht nur von einer Richtung konvergieren, sondern von unendlichen Richtungen:



Beispiel:

Der Grenzwert $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{2z}$ existiert nicht !

Betrachten wir eine Folge $(z_n)_n$, die in der Richtung der x-Achse gegen 0 konvergiert, zum Beispiel $z_n = \frac{1}{n}$. Dann:

$$f(z_n) = \frac{\overline{z_n}}{2z_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Aber für eine Folge $(w_n)_n$, die in der Richtung der y-Achse gegen 0 konvergiert, zum Beispiel $w_n = \frac{1}{n}i$, es gilt:

$$f(w_n) = \frac{\overline{w_n}}{2w_n} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{2i}{n}} = -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}.$$

□

Grenzwert einer komplexen Funktion:
Sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ und $L = a + ib$, dann $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ genau dann, wenn:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a \quad \text{und} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b.$$

Beispiel:

Wir berechen den Grenzwert $\lim_{z \to 1+i} (z^2 + 1)$. Sei $z = x + iy$, wie üblich. Dann:

$$f(z) = z^2 + i = (x + iy)^2 + i = x^2 - y^2 + (2xy + 1)i$$

Um den letzen Satz zu verwenden, betrachten wir $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy + 1$. Hier $z_0 = 1 + i$, deshalb $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$.

Denn:

$$\lim_{(x,y) \to (1,1)} (x^2 - y^2) = 0$$

und:

$$\lim_{(x,y) \to (1,1)} (2xy + 1) = 3$$

existiert der Grenzwert und ist $L = \lim_{z \to 1+i} (z^2 + 1) = 0 + 3i$.

Stetigkeit der komplexen Funktionen:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 = x_0 + iy_0$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ist stetig im z_0, wenn die reellwertigen Funktionen u, v stetig im (x_0, y_0) sind.

Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ ist stetig auf $\mathbb{C}$, denn $u(x, y) = e^x \cos y$ und $v(x, y) = e^x \sin y$.

Differenzierbarkeit der komplexen Funktionen:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heisst komplex differenzierbar in $z_0 \in D$, falls der Grenzwert:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Die komplexe Zahl $f'(z_0)$ nennt man die Ableitung von f in z_0.
Eine Funktion heisst in $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, wenn sie in einer offenen Umgebung $D(z_0, \delta) \subset \mathbb{C}$ definiert und komplex differenziebar ist.

Beispiel:

$f(z) = x+4iy$ ist nicht komplex differenzierbar

Zunächst presentieren wir den Satz von **Looman-Menchoff**:

Komplex differenzierbar vs. reell differenzierbar:
Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ definiert als $f(z) = u(x, y)+i \cdot v(x, y)$, wenn $z = x+iy$, erfüllt die Bedingungen:

i) f ist stetig in einer Umgebung von $z_0 \in D$.

ii) Die partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ existieren in einer Umgebung von z_0.

iii) Die Funktionen u, v erfüllen in einer Umgebung von z_0 die Cauchy-Riemann Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Dann ist die Funktion f in z_0 komplex differenzierbar (sogar holomorph).

Beispiel:

Studieren Sie die komplexe Differenzierbarkeit der Funktion $f(z) = \cos z$

□

Ableitungsregeln für holomorphe Funktionen (wie im Reellen):

i) Linearität: $(\alpha f(z) + \beta g(z))' = \alpha f(z)' + \beta g(z)'$

ii) Produktregel: $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

iii) Quotientenregel: $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

iv) Kettenregel: $f(g(z))' = f'(g(z))g'(z)$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. *Beweise:* $\sinh z = 0$ *genau dann, wenn* $z = n\pi i$ *und* $\cosh z = 0$ *genau dann, wenn* $z = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi i$.

Aufgabe 2. *Schreibe folgende komplexe Zahlen in Polarform* $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$.

i) *Finden Sie das Hauptargument* $Arg(z_1)$ *und berechnen Sie* $(-\sqrt{3} - i)^{50}$.

ii) *Für die komplexen Zahlen* $z_1 = -1, z_2 = 5i$, *überprüfen Sie dass:*

$$Arg(z_1 z_2) \neq Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

und

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

$$arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) + arg(z_2).$$

Aufgabe 3. *Zeigen Sie dass* $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$. *Zeigen Sie die Identität:*

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}), \qquad z, w \in C$$

und die Dreiecksungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Aufgabe 4. *Skizzieren Sie die Mengen der Punkte* z, *in der komplexen Ebene, die die folgenden Bedingungen erfüllen:*

i) $1 < |z - 1 - i| \leq 2$

ii) $|z - i| = |z - 1|$

iii) $|arg(z)| < \frac{\pi}{4}$

iv) $\mathrm{Re}\,((1 + i)z - 1) = 0$

v) $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$.

Aufgabe 5. *Lösen Sie in* $\mathbb{C}$ *die Gleichung:*

$$\cos z = 2$$

Aufgabe 6. *i) Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichungen:*

$$z^6 = 1 + i$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$z^4 + 1 = 0$$

ii) Berechnen Sie $\sqrt{3 + \sqrt{3}i}$

Aufgabe 7. *Beweisen Sie dass:*

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

$$\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Literaturverzeichnis

[1] K. Fritzsche. Grundkurs Funktionentheorie: Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen, *Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg*, 2009.

[2] D. G. Zill, P. D. Shanahan. A First Course in Complex Analysis with Applications, *Jones and Bartlett Publishers, Inc.*, 2003.

[3] C. I. Hedrea. Curs de Matematici speciale, 2016.

Literaturverzeichnis