"Phantasie ist wichtiger als Wissen, denn Wissen ist begrenzt."
Albert Einstein

6
Flächenintegrale

Flächen

Reguläre Flächen:
Sei $D \in \mathbb{R}^2$ regulär. Unter einer Fläche S versteht man das Bild eine Abbildung $\boldsymbol{r} : D \to \mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in D$$

mit folgenden Eigenschaften:

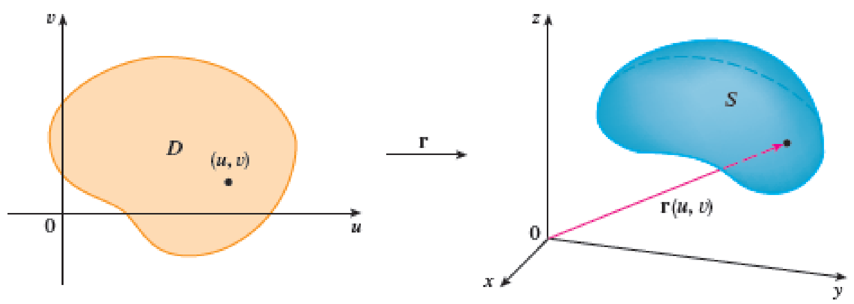
i) $\boldsymbol{r}$ ist injektiv auf $Int(D)$.

ii) Jede componente $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ ist stetig differenzierbar

iii) In jedem Punkt von D:

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq (0,0,0)$$

Die Abbildung $\boldsymbol{r}$ selbst heisst eine reguläre Parametrisierung von S.



Funktionsgraph

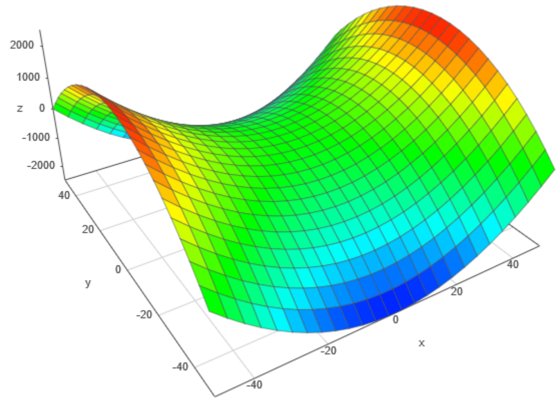
Ist $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, so ist:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u \cdot \boldsymbol{i} + v \cdot \boldsymbol{j} + f(u,v) \cdot \boldsymbol{k}$$

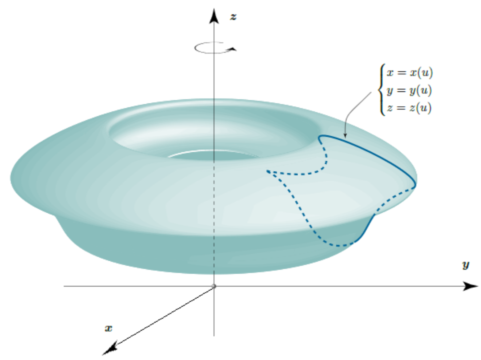
eine reguläre Parametrisierung des Graphes von f, denn:

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \neq (0,0,0).$$

Als Beispiel nehmen wir die Funktion $f(u,v) = u^2 - v^2$:



Rotationsfläche



Die Kurve $c(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix}$, $u \in [a,b]$, rotiert um die z-Achse erzeugt die Fläche mit der Parametrisierung

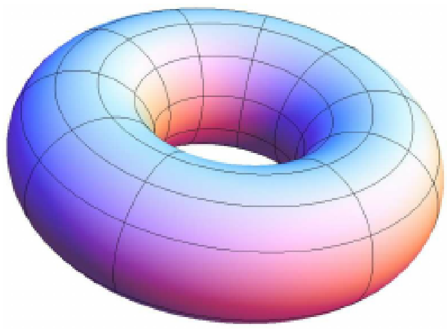
$$\boldsymbol{r}(u,v)=\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(u)\\ y(u)\\ z(u)\end{pmatrix},\quad u\in[a,b], v\in[0,2\pi].$$

Die Matrix $\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ heisst Rotationsmatrix um die z-Achse.

Torus

Ein Torus entsteht bei der Rotation einer Kreislinie in der xz- Ebene mit Mittelpunkt $(a,0,0)$ und Radius $0<R<a$ um die z-Achse. Er wird regulär parametrisiert durch $\boldsymbol{r}:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+R\cos u\\ 0\\ a+R\sin u\end{pmatrix}$$
$$=(a+R\cos u)\cos v\cdot\boldsymbol{i}+(a+R\cos u)\sin v\cdot\boldsymbol{j}+(a+R\sin u)\cdot\boldsymbol{k}$$



Kugeloberfläche:

Fixieren wir eine Kreislinie in der xz- Ebene mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius R

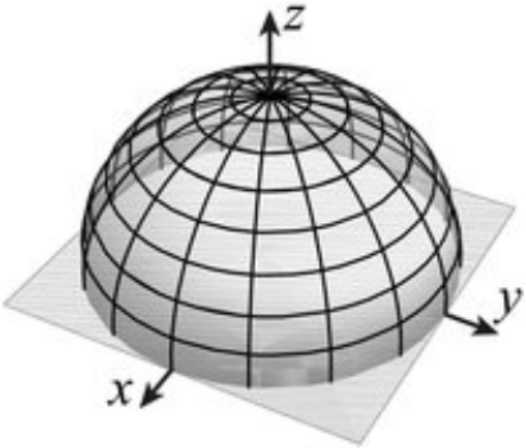
$$c:\begin{cases}x=R\cos u\\ y=0\\ z=R\sin u\end{cases},\qquad u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Wir erhalten eine Parametrisierung der Kugeloberfläche

$$\boldsymbol{r}:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$$

als Rotationsfläche (wir rotieren um die z-Achse)

$$\boldsymbol{r}(u, v) = R\cos u \cdot \cos v \cdot \boldsymbol{i} + R\cos u \cdot \sin v \cdot \boldsymbol{j} + R\sin u \cdot \boldsymbol{k}.$$

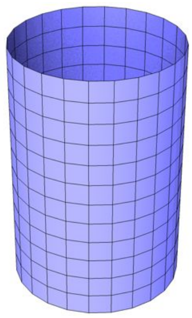


Zylinder:

Eine Parametrisierung des Zylinders mit dem Radius R ist:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = R \cdot \cos v \cdot \boldsymbol{i} + R \cdot \sin v \cdot \boldsymbol{j} + u \cdot \boldsymbol{k}$$

wobei $0 \leq v \leq 2\pi, \quad a \leq u \leq b$



Hierbei, rotieren wir die Strecke

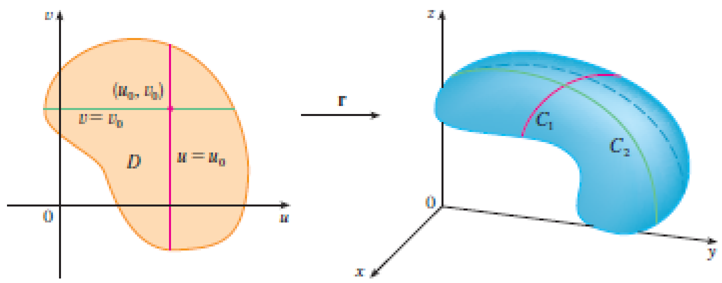
$$c : \begin{cases} x = R \\ y = 0 \\ z = u \end{cases} , \quad u \in [a, b]$$

um die z-Achse.

Parameterliniern: Ist $\boldsymbol{r}$ eine reguläre Parametrisierung einer Fläche S, so bilden:

$$u \to \boldsymbol{r}(u, v_0), \quad v \to \boldsymbol{r}(u_0, v)$$

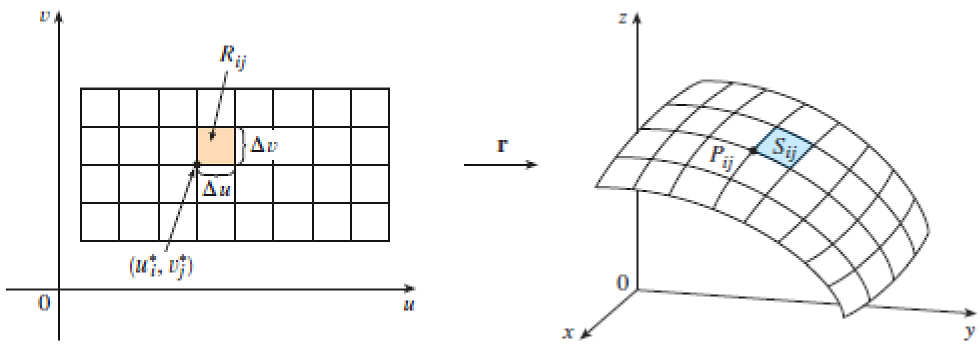
für jedes feste u_0, v_0 reguläre Kurven auf S, die sogenannten Parameterlinien



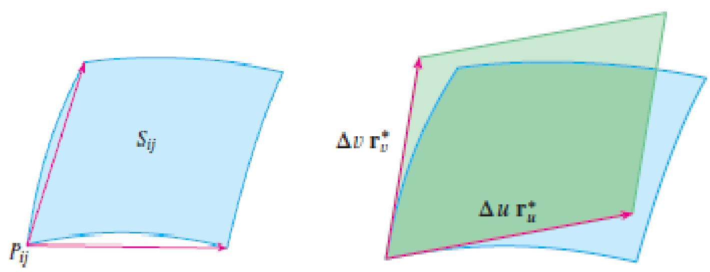
Sei S eine Fläche mit der vektoriellen Gleichung (Parametrisierung):

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in D.$$

Nehmen wir an, dass D ein achsenparalleles Rechteck in der uv- Ebene ist. Das Rechteck D sei in Teilrechtecke R_{ij} mit der Grösse Δu und Δv zerlegt. An der Fläche entsprechen dieser Teilrechtecken die Maschen S_{ij}.



Um der Flächeninhalt der Masche S_{ij} zu abschätzen, überdecken wir die Masche mit einem Parallelogramm. Betrachten wir die linke untere Ecke (u_i^*, v_j^*) des Rechtecks R_{ij}. Der Punkt P_{ij} entspricht diesem Punkt an der Fläche. Sei $\boldsymbol{r}_u^*, \boldsymbol{r}_v^*$ die Tangentialvektoren am P_{ij}. "Die Seiten" von S_{ij} haben die Längen ungefähr $\Delta u \cdot \boldsymbol{r}_u^*$ und $\Delta v \cdot \boldsymbol{r}_v^*$ (es folgt aus dem Mittelwertsatz).



Der Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten $\Delta u \cdot \boldsymbol{r}_u^*$ und $\Delta u \cdot \boldsymbol{r}_v^*$ ist:

$$\|(\Delta u \cdot \boldsymbol{r}_u^*) \times (\Delta u \cdot \boldsymbol{r}_v^*)\| = \|\boldsymbol{r}_u^* \times \boldsymbol{r}_v^*\| \Delta u \Delta v.$$

Also eine Näherung des Flächeninhalts der Masche S_{ij} ist:

$$\Delta S_{ij} \approx \|\boldsymbol{r}_u^* \times \boldsymbol{r}_v^*\| \Delta u \Delta v.$$

Das skalare Flächenintegral
Sei $S : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit regulärer Parametrisierung $r : D \to \mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in D.$$

Dann ist das Flächenintegral einer stetigen Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ auf S ist definiert als:

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v)) \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| \; dA$$

Bemerkungen:

• Hierbei heisst dS das Flächenelement von S un gilt es die formale Beziehung

$$dS = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| dudv$$

• Für eine Fläche in der explizite Form $z = h(x,y)$ gegeben, die Parametrisierung ist

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}$$

und es gilt

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2} \; dudv$$

Beispiel:

Wir bestimmen das Integral von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = z^2$$

über die obere Halbkugelfläche S mit Radius R. Die Parametrisierung ist

$$\boldsymbol{r}(u,v) = R\cos u \cdot \cos v \cdot \boldsymbol{i} + R\cos u \cdot \sin v \cdot \boldsymbol{j} + R\sin u \cdot \boldsymbol{k} \quad (u,v) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi].$$

Nun ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -R\sin u\cos v & R - \sin u \sin v & R\cos u \\ -R\cos u \sin v & R\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= -R^2\cos^2 u\cos v \cdot \boldsymbol{i} - R^2\cos^2 u \sin v \cdot \boldsymbol{j} - R^2 \sin u \cos u \cdot \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

Danach

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| &= \sqrt{R^4\cos^2 u\cos^2 v + R^4\cos^4 u \sin^2 v + R^4 \sin^2 u \cos^2 u} \\
&= \sqrt{R^4\sin^2 u\cos^2 u + R^4\cos^4 u(\cos^2 v + \sin^2 v)} \\
&= \sqrt{R^4\sin^2 u\cos^2 u + R^4\cos^4 u \cdot 1} = \sqrt{R^4\cos^2 u(\cos^2 u + \sin^2 u)} \\
&= R^2\cos u
\end{aligned}
$$

Damit erhält man das skalare Flächenelement

$$dS = R^2 \cos u \; dudv$$

und das skalare Flächenintegral

$$\iint_S z^2 \, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (R\sin u)^2 \, R^2\cos u \; dvdu = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^2 u \cos^2 u \; du \right) dv$$

Zuerst berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^2 u \cos^2 u \; du &= \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u \; du = \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4u)}{2} \; du \\
&= \frac{R^4}{4} \cdot \left. \frac{u - \frac{\sin(4u)}{4}}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4\pi}{16}
\end{aligned}
$$

und schliesslich

$$\iint_S z^2 \; dS = \int_0^{2\pi} \frac{R^4\pi}{16} \; dv = \frac{R^4\pi^2}{8}$$

□

Wird nun die Fläche S von einem Vektorfeld (z.B. einer Strömung mit bekannter Geschwindigkeitsverteilung) durchsetzt, lässt sich an jedem Punkt der Oberfläche das Skalarprodukt aus Geschwindigkeitsvektor und Normalenvektor bestimmen:

$$\boldsymbol{F} \cdot n = \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot n(x,y,z)$$

Damit erhält man eine auf der gesamten Fläche S definierte skalare Funktion. Das Flächenintegral dieser Funktion:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot n \; dS$$

wird als Fluss oder Vektorfluss von $\boldsymbol{F}$ durch S bezeichnet.

Das vektorielle Flächenintegral
Sei S eine orientierbare Fläche mit reguläre Parametrisierung $\boldsymbol{r} : D \to S$, sodass $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ in die äussere Normalenrichtung weist. Dann ist das Flächenintegral eines stetigen Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ auf S defniniert als:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, dA$$

Bemerkungen:

Die Beziehung zwischen der beiden Flächenintegralen ist:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

wobei $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|}$ der Normaleneinheitsvektor ist.

Für einen Graph $z = h(x,y)$ einer Funktion h gibt es den Sonderfall:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_D \left(-f_1(u,v,h(u,v)) \cdot \frac{\partial h}{\partial u} - f_2(u,v,h(u,v)) \cdot \frac{\partial h}{\partial v} + f_3(u,v,h(u,v)) \right) dudv$$

wobei $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

Beispiel:

Der Fluss des Feldes $\boldsymbol{F} = (3y, 2x, 0)$ durch das ebene Rechteck:

$$z = 6 - \frac{2}{3}y - \frac{3}{20}x = h(x,y)$$

im Bereich $D = \{(x,y) : 2 \le x \le 5, 1 \le y \le 4\}$ beträgt in Richtung der positiven z-Achse:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS = \int_1^4 \int_2^5 \left(-3v \cdot \frac{3}{20} - 2u \left(-\frac{2}{3} \right) + 0 \right) dudv = \frac{417}{8}$$

weil $F(u,v,h(u,v)) = (3v, 2u, 0)$ und $\frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{2}{3}$, $\frac{\partial h}{\partial u} = -\frac{3}{20}$.

Satz von Gauss
Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ ein regulärer Körper und seine Oberfläche S sei eine reguläre Fläche. $\boldsymbol{F} : E \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf E. Dann gilt bei nach Aussen gerichtetem Normalfeld $\boldsymbol{n}$:

$$\iint_{\partial E} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iiint_E \operatorname{div}\boldsymbol{F}\, dV.$$

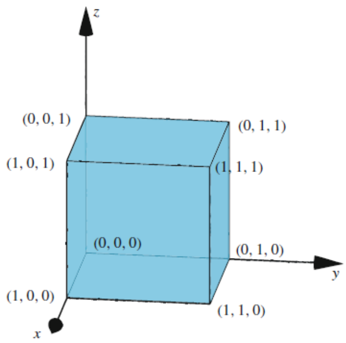
Beispiel:

Als erstes Beispiel wollen wir das Integral

$$\iint_{\partial E} \boldsymbol{F} \cdot dS$$

wobei E der Einheitswürfel ist und

$$F(x, y, z) = (x^2 + e^{y^2+z^2}, y^2 + x^2z^2, z - e^y)$$



Auf herkömmlichem Wege müssten wir uns jetzt mit sechs Flächenintegralen herumschlagen, je eines für jede Würfelseite. Auch wenn es nicht schwer wäre, die Flächen zu parametrisieren und die Normalenvektoren zu ermitteln, wäre das Berechnen von sechs Doppelintegralen doch ein beachtlicher Aufwand. Versuchen wir es stattdessen lieber mit dem Satz von Gauss. Die Divergenz unser Vektorfeldes ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + e^{y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + x^2z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z - e^y\right)\\ &= 2x + 2y + 2z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\partial E} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_E \operatorname{div}\boldsymbol{F}\ dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x + 2y + 2z\ dxdydz\\ &= \int_0^1 \int_0^1 2x + 2y + 1\ dxdy = \int_0^1 2x + 2\ dx = 3\end{aligned}$$

$\square$

Korollar

Das Volumen eines Körpers, der durch eine geschlossene Fläche begrenzt wird

Sei $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, x)$, dann $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3$ und aus dem Satz von Gauss folgt

$$\iint\limits_{\partial E} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iiint\limits_E \operatorname{div}\boldsymbol{F} dV = 3 \iiint\limits_E 1\ dV = 3\mathrm{vol(E)}$$

daraus

$$\mathrm{vol(E)} = \frac{\iint\limits_{\partial E} \boldsymbol{F} \cdot dS}{3}$$

Übungen mit Lösungen

Aufgabe 1. *Finde die Masse einer zylindrischen Oberfläche parametrisiert durch:*

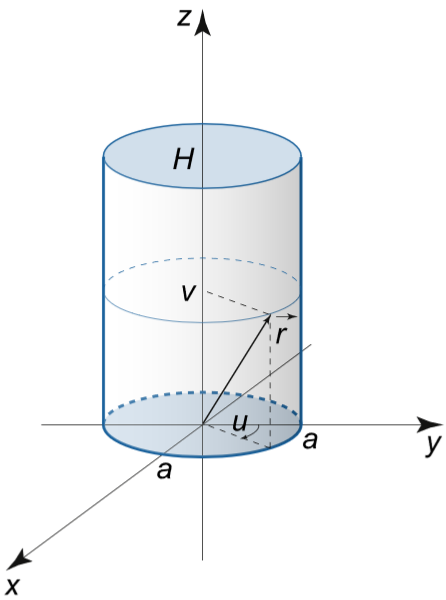
$$\boldsymbol{r}(u,v) = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k},$$

wobei $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq H$.
Die Dichte der Oberfläche im Pumkt (x,y,z) *ist* $\mu(x,y,z) = z^2(x^2+y^2)$.

Lösung: Die Masse der Oberfäche ist:

$$m = \iint_S \mu(x,y,z)dS$$

wobei S ist die zylindrische Oberfläche.



Wir berechnen zuerst das Flächenelement $dS = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| dudv$. Also:

$$\boldsymbol{r}_u = -a\sin u\boldsymbol{i} + a\cos u\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{K}.$$

und:

$$\boldsymbol{r}_v = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$$

Dann gilt:

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin u & a\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| = \sqrt{(a\cos u)^2 + (a\sin u)^2} = a.$$

Daraus folgt $dS = a\ dudv$ und nach der Definition ergibt sich:

$$\begin{aligned}
m &= \iint\limits_S \mu(x,y,z)dS = \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,H]} \mu(\boldsymbol{r}(u,v))a\ dudv \\
&\overset{\text{Formel von } \mathbf{r}}{=} \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,H]} v^2((a\cos u)^2 + (a\sin u)^2)adudv \\
&\overset{Fubini}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^H v^2((a\cos u)^2 + (a\sin u)^2)advdu \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^H v^2a^2a\ dvdu = \int_0^{2\pi} a^3\frac{H^3}{3}du = 2\pi a^3\frac{H^3}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. *Berechnen Sie das Flächenintegral von* $f(x,y,z) = x$*:*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$$

wobei S *die Fläche* $z = x^2 + y$ *mit* $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ *ist.*

Lösung: Die Fläche S ist hier gegeben als Graph der Funktion:

$$h(x,y) = x^2 + y.$$

Eine Parametrisierung der Fläche S ist:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\cdot\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (u^2+v)\boldsymbol{k}$$

wobei $(u,v) \in D = \{0 \le u \le 1,\ -1 \le v \le 1\}$. Das skalare Flächenintegral einer stetigen Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ ist definiert als:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|\ dA$$

Es gibt die formale Beziehung:

$$dS = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|dudv$$

Für eine Fläche in der expliziten Form $z = h(x,y)$ gilt es:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}\ dudv$$

Wir erhalten für $h(u,v) = u^2 + v$ die Beziehungen $\frac{\partial h}{\partial u} = 2u$ und $\frac{\partial h}{\partial v} = 1$ dann:

$$dS = \sqrt{1 + (2u)^2 + 1^2}\ dudv.$$

Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S f(x,y,z)dS &= \iint\limits_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\sqrt{1+(2u)^2+1^2}\ dudv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_0^1 u\sqrt{2+4u^2}\ dudv\end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = 4u^2 + 2$ erhalten wir weiter $dt = 8udu$, danach:

$$\begin{aligned}\int_0^1 u\sqrt{2+4u^2}\ du = \frac{1}{8}\int_2^6 t^{\frac{1}{2}}dt &= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_2^6 \\ &= \frac{1}{12}(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

Schliesslich:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \int_{-1}^{1}\frac{1}{12}(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})dv = \frac{1}{6}(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) \approx 1.97$$

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. *Sei* $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi\}$ *und:*

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

eine Parameterdarstellung der Einheitssphäre. Für das Vektorfeld:

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

berechenen Sie das Flächenintegral $\iint\limits_S F \cdot dS$

Aufgabe 2. *Berechnen Sie den Fluss von* $\boldsymbol{F} = (x, y, x)$ *durch die Fläche:*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \frac{x^2}{2}, (x, y) \in D\}$$

wobei:

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Aufgabe 3. *(Satz von Gauss am Einheitswürfel)*
Berechnen Sie für den Einheitswürfel $W = [0, 1]^3$ *und das Vektorfeld:*

$$\boldsymbol{F} = (x^2, yz, y)$$

beide im Gauss'schen Integralsatz auftretenden Integrale.

Aufgabe 4. *(Satz von Gauss am Zylinder)*
Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes:

$$\boldsymbol{F} = (xz, yz, z^2)$$

durch die Oberfläche des Zylinderausschnitts:

$$Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

von innen nach aussen. Verwenden Sie den Satz von Gauss.

Aufgabe 5. *Berechnen Sie das Integral:*

$$\iint\limits_S x^2 dS$$

wobei S die Sphäre:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16\}$$

ist.

Hinweis: Die Sphäre besitzt die Parameterdarstellung:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 4\cos u \sin v \\ 4\sin u \sin v \\ 4\cos v \end{pmatrix}$$

mit $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

Aufgabe 6. *Berechne den Inhalt der Mantelfläche des Zylinders:*

$$Z = \{(R, u, v) : 0 \leq R \leq 2, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}$$

Hinweis: eine Parametrisierung ist:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis

[1] T. Arens, F. Hettlich, C, Karpfinger. Mathematik, 3. Auflage, Springer 2015.

[2] https://www.math24.net/physical-applications-surface-integrals/

[3] C. I. Hedrea. Curs de Matematici speciale, 2016.