" *Expose yourself to as much randomness as possible.* "

Ben Casnocha

9

Variabile aleatoare discrete

Texas Holdem Poker

In Texas Hold'em Poker jucatorii incearca sa gaseasca cea mai buna combinatie de 5 carti folosind celelalte doua carti din mana si cele cinci care se vor afisa pe masa. Pachetul are 52 de carti si sunt cate 13 de patru feluri diferite: ♣ ♦ ♥ ♠

All-in = inseamna ca jucatorul si-a pus toate chips-urile in pariu

Fold = e actul prin care renunti la a juca mana; jucatorii pot da fold atunci cand e randul lor si nu doresc sa mai continue.

Raise = maresti miza pariului

Call = dupa ce jucatorii primesc cartile fiecare pe rand are optiunea sa decida daca aleg fold, call sau raise; spunand call accepti sa pariezi suma care se cere deja in tura respectiva

Joci masa = daca cea mai buna combinatie de 5 carti este cea afisata pe masa si jucatorul termina mana fara sa dea fold, spunem ca a jucat masa; sa joci masa nu e considerat un lucru bun in poker pentru ca nu ai reusit sa imbunatatesti combinatia de 5 carti deja existenta pe masa cu niciuna din cele doua carti ale tale; cand joci masa tot ce poti spera este sa-i egalezi pe oponentii tai; daca acestia reusesc sa foloseasca o carte din mana pentru a imbunatati combinatia ai peirdut.

Problema deschisa 1: Pana cand a castigat un turneu WSOP in 2008, Erick Lindgren era deseori supranumit ca fiind cel mai mare jucator care nu a castigat vreodata un turneu WSOP. Inaintea victoriei sale el a participat la multe turnee WSOP si a terminat in top 10 de opt ori. Sa presupunem ca joci intr-un turneu pe saptamana. Sa presupunem ca rezultatele inregistrate la un turneu sunt independente de cele de la oricare altul si ca ai aceeasi probabilitate p de a castiga oricare dintre aceste turnee.

Daca $p = 0.01$, cat este cel mai probabil sa trebuiasca sa astepti inainte de castiga primul turneu ?

Problema deschisa 2: In timpul episodului 2 din sezonul 5 al High Stakes Poker, Doyle Brunson a primit $K - K$ de doua ori si $J - J$ o data, in aceeasi jumatate de ora. Presupunem ca pereche mare inseamna 10-10, J-J, Q-Q, K-K, sau A-A.

Fie X numarul de maini pe care le joci pana cand primesti o pereche mare, pentru a treia oara. Care este acest numar preconizat de maini ?

Problema deschisa 3: Multe cazinouri ofera premii pentru evenimente rare numite jackpot hands. Aceste jackpot hands sunt definite diferit de fiecare dintre cazinouri in parte. Sa presupunem ca intr-un astfel de cazinou sunt definite in asa fel incat ele apar o data la $50,000$ de maini, in medie.

Daca in cazinou se joaca aproximativ $10,000$ de maini pe zi, care este valoarea asteptata si deviatia standard a numarului de jackpot hands-uri care apar intr-o perioada de 7 zile ?

Problema deschisa 4: La ultima mana din turneul 1998 WSOP Main Event, cu o masa de 8 ♣ , 9 ♦, 9 ♥, 8 ♥, 8 ♠, Scotty Nguyen a mers all-in. In timp ce oponentul sau, Kevin McBride, gandea, Scotty a spus

"Daca dai call, s-a terminat, baby !"

McBride a spus

" Dau call. joc masa !"

S-a intamplat ca Scotty sa aiba J ♦, 9 ♣ si a castigat mana.

Presupunand ca nu dai niciodata fold in urmatoarele 100 de maini, care este valoarea asteptata a X = numarul de ori, in aceste 100 de maini, in care ai jucat masa, dupa ce toate cele cinci carti sunt afisate ?

Variabile aleatoare discrete

• incercam sa modelam matematic diferite experimente statistice (aleatoare), din fisa de seminar anterioara

Variabile aleatoare= modele matematice pentru experimente aleatoare

• rezultatele posibile ale unui astfel de experiment vor fi notate cu x_i, $i \in I$, si le vom numi valori ale variabilei aleatoare X
• probabilitatea corespunzatoare fiecarei valori va forma functia numita functie de probabilitate $P_X(x)$
• in general, o variabila aleatoare discreta va fi data prin tabloul de repartitie

$$X : \quad \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$$

unde $P_X(x_i) = P(X = x_i) = p_i$ inseamna

probabilitatea valorii (rezultatului) x_i este p_i

• deoarece toate rezultatele posibile sunt afisate in tabloul de repartitie al variabilei $X \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \in I} p_i = 1 \quad$ (caci 1 inseamna 100%)

Variabile aleatoare Bernoulli $X \sim Ber(p)$

• e printre cele mai simple variabile aleatoare discrete
• modeleaza un experiment in care doar doua rezultate sunt posbile, de obicei numite succes si esec.

Exemplu:

Poate fi folosita pentru a reprezenta aruncarea unei monede. Aparitia banului poate fi desemnata ca fiind succesul. Atribuim succesului valoarea 1 cu o probabilitate $p \in (0, 1)$ si esecului valoarea 0, cu probabilitatea $q = 1 - p$. In acest fel obtinem o variabila aleatoare Bernoulli $X \sim Ber(p)$ de parametru p, probabilitatea succesului

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

In cazul aruncarii unei monede avem $p = \frac{1}{2}$. Oricum, in general functia de probabilitate este data prin

$$P_X(k) = \begin{cases} 1-p, & \text{daca } k = 0 \\ p, & \text{daca } k = 1 \end{cases}$$

$\square$

Variabile aleatoare uniforme $X \sim \mathcal{U}(n)$

• reprezinta modelul matematic al experimentului care generalizeaza aruncarea unui zar (cand $n = 6$)

• daca un experiment are n rezultate egal posibile notate $\{1, 2, \ldots, n\}$, atunci experimentul poate fi modelat printr-o variabila aleatoare uniforma de forma

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

• forma generala a uni astfel de variabile incepe cu valoarea k si se termina cu valoarea ℓ, deci va avea $\ell - k + 1$ valori posibile, notam $X \sim \mathcal{U}(k, \ell)$

$$X : \begin{pmatrix} k & k+1 & \ldots & \ell \\ \frac{1}{\ell-k+1} & \frac{1}{\ell-k+1} & \ldots & \frac{1}{\ell-k+1} \end{pmatrix}$$

cu functia de probabilitate

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell-k+1}, & \text{daca } x = k, k+1, \ldots, l \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Variabile aleatoare binomiale $X \sim Bin(n, p)$

• o variabila aleatoare cu o distributie binomiala este modelul corect cand au loc urmatoarele ipoteze (avem un experiment binomial):

• fenomenul modelat consta din n repetari independente ale aceluiasi experiment

• la fiecare repetare doar doua posibile rezultate sunt posibile (succes - esec)

• probabilitatea p a unui succes este aceeasi la fiecare repetare

• variabila aleatoare care numara succesele inregistrate in cele n repetari ale unui experiment binomial se numeste variabila aleatoare binomiala, notam $X \sim Bin(n, p)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ q^n & C_n^1 p q^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & \ldots & p^n \end{pmatrix}$$

unde p si $q = 1 - p$ sunt probabilitatile unui succes, respectiv esec la fiecare repetare.

• functia de probabilitate va fi

$$P_X(k) = \begin{cases} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{pentru } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Variabile aleatoare geometrice $X \sim Geo(p)$

• e modelul adecvat cand, intr-un experiment binomial, contorizam numarul de esecuri pana la inregistrarea primului succes.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ p & p(1-p) & \dots & p(1-p)^k & \dots \end{pmatrix}$$

• se poate observa usor ca

$$P_X(k) = \begin{cases} p(1-p)^k, & \text{pentru } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Variabile aleatoare hipergeometrice $X \sim Hip(N, K, n)$

• consideram problema extragerii unor obiecte dintr-o cutie care contine N obiecte, si K dintre ele sunt defecte.

• daca extragerile sunt cu inlocuire (obiectul extras este repus in cutie inainte de urmatoarea extragere), atunci numarul de obiecte defecte extrase in cele n extrageri formeaza o variabila aleatoare binomiala cu parametrii n si $p = \frac{K}{N}$ (probabilitatea de extragere a unui obiect defect)

• daca extragerile sunt fara inlocuire, atunci probabilitatea de a extrage un obiect defect nu mai este aceeasi fiecare dintre n extrageri, iar numarul de obiecte defecte extrase va forma o variabila aleatoare hipergometrica de parametrii N, K si n

• functia de probabilitate va fi

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, & \text{daca } \ k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Variabile aleatoare Poisson $X \sim Po(\lambda)$

• conform legii lui Poisson:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \text{unde } \lambda = np$$

putem aproxima functia de probabilitate a unei variabile binomiale X cand probabilitatea p a succesului este mica si numarul n de repetari este mare. In general, in practica, aplicam legea pentru $p < 0,05$ si $n \geq 100$

• aceasta lege va genera o distributie de probabilitate care exprima probabilitatea unui numar dat de evenimente care apar intr-un interval fixat de timp sau spatiu daca acestea apar cu o rata medie constanta λ si independente de timp

• distributia Poisson poate fi evident folosita si pentru intervale care implica distante, arii sau volume

• distributia Poisson este folosita de obicei pentru evenimente rare si este numita si legea evenimentelor rare.

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}$$

• functia de probabilitate a unei variabile aleatoare Poisson este

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, & \text{pentru } k \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Variabile aleatoare negativ binomiale $X \sim NB(r, p)$

• variabila care contorizeaza numarul de repetari necesare producerii celui de al r-lea succes

$$X: \begin{pmatrix} r & r+1 & \dots & k & \dots \\ p^r & C_r^{r-1}p^r(1-p) & \dots & C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r} & \dots \end{pmatrix}$$

• functia de probabilitate este

$$P_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}, & k = r, r+1, r+2, \dots \\ 0, & \text{atlfel} \end{cases}$$

Interpretam identitatea de mai sus prin

"probabilitatea de a obtine in a k-a incercare al r-lea succes este..."

Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

• vrem sa raspundem la cateva intrebari practice:

Care este cea mai asteptata valoare a unui experiment aleator?

(pe care o variabila aleatoare il modeleaza matematic).
Raspuns: $M(X)$

Cat de imprastiate (dispersate) sunt valorile variabilei aleatoare ?

Raspuns: $D^2(X)$ si $\sigma(X)$, imprastierea va deveni interesanta cand vom privi variabilele aleatoare dintr-o perspectiva statistica

Cum studiem similaritatea a doua variabile aleatoare ?

Raspuns: $cov(X, Y)$

Care este gradul de similaritate ?

Raspuns: $\rho(X, Y)$ si ne intereseaza in special cazul in care X, Y sunt dependente

• pentru o variabila aleatoare discreta:

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$$

valoarea asteptata sau valoarea medie, $E(X)$ sau $M(X)$ e definita ca:

$$\bar{x} = E(X) = M(X) = \sum_{i \in I} p_i x_i$$

• varianţa sau dispersia e definita ca fiind:

$$var(X) = D^2(X) = \sum_{i \in I} p_i (x_i - \bar{x})^2$$

iar deviatia standard este:

$$\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

• pentru variabilele aleatoare deja prezentate se pot verifica prin calcul urmatoarele formule

$$\begin{aligned}
X \sim Bin(n,p) \quad &\Longrightarrow \quad M(X) = np \quad \text{si} \quad D^2(X) = np(1-p) \\
X \sim Ber(p) \quad &\Longrightarrow \quad M(X) = p \quad \text{si} \quad D^2(X) = p(1-p) \\
X \sim Geo(p) \quad &\Longrightarrow \quad M(X) = \frac{1}{p} \quad \text{si} \quad D^2(X) = \frac{1-p}{p^2} \\
X \sim Po(\lambda) \quad &\Longrightarrow \quad M(X) = \lambda \quad \text{si} \quad D^2(X) = \lambda \\
X \sim NB(r,p) \quad &\Longrightarrow \quad M(X) = \frac{r}{p} \quad \text{si} \quad D^2(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} \\
X \sim Hip(N,K,n) \quad &\Longrightarrow \quad M(X) = n\frac{K}{N} \quad \text{si} \quad D^2(X) = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}
\end{aligned}$$

• au loc proprietatile generale

$$M(X + aY) = M(X) + aM(Y)$$

$$D^2(aX + C) = a^2 D^2(X)$$

unde C este o variabila aleatoare constanta definita prin

$$C : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

adica are o singura valoare c cu probabilitatea 100%.

• daca X si Y sunt independente:

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

$$D^2(X + aY) = D^2(X) + a^2 D^2(Y).$$

prin urmare dispersia interactioneaza bine doar cu sumele variabilelor independente

Functii de variabile aleatoare

- functia de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = g(X)$ este

$$P_Y(y) = \sum_{x:g(x)=y} P_X(x)$$

- valoarea medie devine

$$M(Y) = \sum_{x \in S_X} g(x) P_X(x)$$

unde S_X este multimea valorilor (starilor) variabilei aleatoare X.

Covarianţa si corelaţia

- covarianta masoara variatia a doua variabile aleatoare

$$cov(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$$

• daca valorile mari ale unei variabile corespund, in general, valorilor mari ale celeilalte variabile, și daca același lucru este valabil în cazul valorilor mici (adica cele două variabile au comportamente similare), covarianța este pozitivă, $cov(X, Y) > 0$

• pe de alta parte, daca valorile mari ale unei variabile corespund, în general, valorilor mici ale celeilalte variabile (daca cele două variabile au comportamente opuse), covarianța este negativă, $cov(X, Y) < 0$

• privita din alta perspectiva, covarianta repara defectele dispersiei recuperand formula generala

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$$

- coeficientul de corelatie

$$\rho_{X,Y} = corr(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

• un coeficient de corelatie mare (valori apropiate de ± 1) indica o legatura puternica intre cele doua variabile

$$X, Y \text{ independente} \implies \rho_{X,Y} = 0$$

dar

$$\rho_{X,Y} = 0 \ \text{(variabile necorelate)} \quad \not\Longrightarrow \quad X, Y \text{ independente}$$

• coeficientul de corelatie are valori intre -1 si 1, din cauza lupului care isi schimba părul dar năravul ba

$$cov^2(X, Y) \leq D^2(X) D^2(Y)$$

reprezinta inca o forma a inegalitatii Cauchy-Schwarz

Probleme rezolvate

Rezolvarea problemelor deschise propuse in prima parte a fisei

Problema deschisa 1: Putem modela totul cu o variabila aleatoare X care contorizeaza numarul de saptamani scurse pana la primul succes intr-un turneu (deoarece o saptamana=un turneu jucat). Trebuie sa identificam tipul de variabila aleatoare care se potriveste cel mai bine situatiei descrise. Cu putina atentie se poate observa ca o variabila aleatoare cu distributie geometrica este cea adecvata. Succes va insemna castigarea unui turneu.

Remarca

Alegerea evenimentului etichetat succes este subiectiva. Poti sa definesti succesul ca fiind pierderea turneului si atunci esecul va fi reprezentat de castigarea turneului. Nu e important cum etichetezi cele doua evenimente care apar la un experiment binomial, ci doar dualitatea lor. Probabilitatile celor doua evenimente vor fi in continuare in relatia $p + q = 1$.

O astfel de variabila aleatoare este un exemplu de variabila discreta cu un infinit de valori posibile, caci nu stim de cate turnee jucate va fi nevoie pentru a inregistra primul succes. Jucatorii foarte slabi vor avea nevoie de un numar foarte mare de incercari iar in matematica ”foarte mare” se traduce prin ”∞”. Deoarece $p = 0,01$, tabloul de repartitie este urmatorul

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{100}\left(1-\frac{1}{100}\right) & \dots & \frac{1}{100}\left(1-\frac{1}{100}\right)^k & \dots \end{pmatrix}$$

Valoarea medie $M(X)$ a variabilei reprezinta numarul preconizat de saptamani pe care trebuie sa-l astepti pana la castigarea unui turneu. Prin calcul, sau preluand formula data in fisa seminarului, avem $M(X) = \frac{1}{p} = 100$ pentru o variabila aleatoare geometrica. Deci se preconizeaza ca va trebui sa astepti 100 de saptamani pana la castigarea primului turneu, la o sansa de castig de $p = 0,01$.

Ar fi de reamintit aici eroarea de tip Monte Carlo. Daca nu ai castigat un turneu in primele 90 de incercari, spre exemplu, sansa ta de castig nu se imbunatateste.

Problema deschisa 2: Toate problemele au legatura cu valoarea medie a unei variabile aleatoare. Motivul ? Valoarea medie $M(X)$, sau valoarea cea mai asteptata, este probabil cea mai cunoscuta caracteristica numerica a unei variabile aleatoare. Pana in momentul in care vom invata putina statistica $M(X)$ va fura scena lui $D^2(X), \sigma(X)$ sau momentelor centrale.

X este variabila care contorizeaza numarul de maini pe care le joci pana cand primesti o pereche mare a 3-a oara. Se observa ca X va fi negativ binomial distribuita, $X \sim NB(r, p)$, cu $r = 3$ si p care trebuie aflat. Probabilitatea p de a avea o pereche mare este $\frac{5 \cdot C_4^2}{C_{52}^2} = \frac{5}{221}$, prin urmare conform celor din fisa $M(X) = \frac{r}{p} = \frac{3}{\frac{5}{221}} \approx 132.6$. Destul de mult ;)

Problema deschisa 3: Din nou vom presupune independenta diferitelor jackpot hands-uri. In sapte zile se joaca aproximativ 70,000 de maini. X, variabila care numara jackpot hands-urile, va fi binomiala

$$X \sim Bin\left(n = 70000, p = \frac{1}{50,000}\right).$$

Se obtine $\sigma(X) = \sqrt{npq} \approx 1.183204$. Daca am folosi legea lui Poisson pentru a aproxima rezultatul am avea $\lambda = np = 1.4$ si $\sigma(X) = \sqrt{\lambda} \approx 1.83216$, prin urmare o aproximare destul de buna! Avantajul creat va fi mare cand va trebui sa calculam o probabilitate concreta. Probabilitatea de a avea 5 jackpot-uri intr-o saptamana $P(X = 5)$ duce la calcule neplacute daca folosim modelarea printr-o variabila binomiala. Folosind aproximarea Poisson a unei variabile binomiale obtinem

$$P(X = 5) = \frac{1.4^5}{5!}e^{-1.4} \approx 0,011$$

Problema deschisa 4: Se presupune ca ceea ce se intampla la fiecare mana este independent de ce se intampla la oricare alte maini. Dupa cum e specificat si in enuntul problemei, X este variabila aleatoare care contorizeaza numarul de ori in care ai jucat masa, dupa ce toate cele cinci carti au fost afisate. Identificam X ca fiind binomiala de parametrii $n = 100$ si p probabilitatea de a juca masa la o mana. Orice combinatie de 7 carti care consta din cele 2 din mana si cele 5 de pe masa va avea aceasi probabilitate de aparitie. Sunt C_7^2 modalitati de a alege cartile din mana din cele 7 date. Intr-o singura astfel de situatie cartile tale nu sunt folosite pentru perechea de 5 finala. Prin urmare $p = \frac{1}{C_7^2} = \frac{1}{21}$. Conform celor prezentate in fisa $M(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{21} \approx 4.76$. Deci estimarea este ca de 5 ori vei putea sa joci masa.

Ar fi de observat aici ca modelul matematic folosit nu descrie perfect realitatea. Probabilitatea reala necesita tehnici mai riguroase.

Problema 1. *Trei tragatori trag la o tinta. Variabila aleatoare X care numara de cate ori este atinsa tinta are tabloul de distributie:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{p^2}{4} & \frac{11p}{24} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}.$$

a) Dupa ce aflati valoare lui p, calculati probabilitatea ca X sa ia o valoare mai mica sau egala cu 2.
b) Aflati probabilitatea cu care fiecare tragator loveste tinta.

Solutie: a) Suma tuturor probabilitatilor din tabloul de distributie trebuie sa fie 1, deci:

$$\frac{p^2}{4} + \frac{11p}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = 1 \Leftrightarrow 6p^2 + 11p - 17 = 0 \Rightarrow p = 1$$

si apoi avem de calculat probabilitatea:

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$$

b) Fie p_1, p_2, p_3 probabilitatea cu care fiecare atinge tinta. Astfel, pentru $p = 1$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

Dar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} = & \quad P(X=0) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \\ & \text{(deoarece } X = 0 \text{ inseamna: toti tragatorii au ratat tinta)} \\ = & \quad 1 - (p_1+p_2+p_3) + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{24} = & \quad P(X=1) = p_1(1-p_2)(1-p_3) + p_2(1-p_1)(1-p_3) + p_3(1-p_1)(1-p_2) \\ & \text{(deoarece } X = 1 \text{ inseamna: un tragator a atins tinta si ceilalti au ratat)} \\ = & \quad p_1+p_2+p_3 - 2(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3) + 3p_1p_2p_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= P(X=2) = p_1p_2(1-p_3) + p_1p_3(1-p_2) + p_2p_3(1-p_1) \\ &= p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 3p_1p_2p_3 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{24} = P(X=3) = p_1p_2p_3.$$

Se obtine astfel sistemul liniar

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3 = \frac{13}{12} \\ p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3 = \frac{3}{8} \\ p_1p_2p_3 = \frac{1}{24} \end{cases}$$

care duce la ecuatia:

$$24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$$

cu radacinile

$$p_1 = \frac{1}{2};\ p_2 = \frac{1}{3};\ p_3 = \frac{1}{4}.$$

Problema 2. *Variabilele aleatoare independente X si Y au tabloul de distributie:*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Calculati:
a) Tabloul de distributie al variabilei $X+Y$,
b) Tabloul de distributie al variabilei $X \cdot Y$,
c) Tabloul de distributie al variabilei X^2.

Solutie: a) Tabloul de repartitie al lui $X+Y$ este:

$$X+Y:\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0,04 & 0,13 & 0,39 & 0,37 & 0,07 \end{pmatrix},$$

Spre exemplu, cand $X+Y=6$ gandim in felul urmator:

$$\begin{aligned} P(X+Y=6) &= P(X=1 \text{ si } Y=5)+P(X=2 \text{ si } Y=4) \\ &= P(X=1)\cdot P(Y=5)+P(X=2)\cdot P(Y=4) \\ &\text{(caci variabilele aleatoare sunt independente)} \\ &= 0,1\cdot 0,5+0,2\cdot 0,4=0,05+0,08=0,13 \end{aligned}$$

b) Tabloul de repartitie a lui $X\cdot Y$ este:

$$X\cdot Y:\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 12 & 15 & 18 \\ 0,04 & 0,05 & 0,01 & 0,08 & 0,1 & 0,3 & 0,35 & 0,07 \end{pmatrix},$$

Spre exemplu cand $X\cdot Y=4$:

$$\begin{aligned} P(X\cdot Y=4) &= P(X=1 \text{ si } Y=4) \\ &= P(X=1)\cdot P(Y=4) \\ &= 0,1\cdot 0,4=0,04 \end{aligned}$$

din nou folosind independenta X si Y am putut calcula direct

$$P(X=1 \text{ si } Y=4)=P(X=1)\cdot P(Y=4).$$

c) Pentru variabila aleatoare X^2 tabloul de repartitie este:

$$X^2=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

In general pentru o functie g tabloul de repartitie a lui $Y=g(X)$ poate fi alcatuit folosind formula:

$$P(Y=y)=\sum_{x:\ g(x)=y} P(X=x)$$

adunand asadar toate probabilitatile $P(X=x)$ pentru acele valori x cu proprietatea $g(x)=y$. In exemplul de mai sus functia $g(x)=x^2$ este injectiva pentru argumente pozitive si astfel suma din formula va contine exact un termen de fiecare data. De exemplu:

$$P(Y=4)=\sum_{x:\ x^2=4} P(X=x)=P(X=2)=0,2$$

Problema 3. *Patru premii diferite pot fi castigate cumparand cutii de cereale pentru micul dejun. Fiecare cutie contine un premiu. Unul dintre premii este un bilet la gradina zoologica a orasului. Notam cu X variabila aleatoare care contorizeaza numarul de cutii de cereale cumparate pana la castigarea a patru bilete la gradina zoologica. Aflati valoarea medie si dispersia acestei variabile aleatoare.*

Solutie: In fisa seminarului anterior am argumentat forma probabilitatilor incluse in tabloul de repartitie al variabilei X negativ binomial distribuita

$$X : \begin{pmatrix} 4 & 4+1 & \dots & k & \dots \\ p^4 & C_4^{4-1}p^4(1-p) & \dots & C_{k-1}^{4-1}p^4(1-p)^{k-4} & \dots \end{pmatrix}$$

iar $p = \frac{1}{4}$ reprezinta sansa de a castiga biletul la zoo (in fiecare cutie se afla unul dintre cele patru premii oferite de compania respectiva).

Avem de-a face cu o variabila discreta cu o infinitate de valori, la fel ca si variabila Poisson. Vom incerca sa argumentam formulele prezentate in fisa seminarului

$$M(X) = \frac{r}{p} \qquad \text{si} \qquad D^2(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Vom lucra luand un p oarecare si $r = 4$ (paradoxul cercetatorului) altfel pierdem informatii structurale

$$M(X) = \sum_{k=4}^{\infty} k \cdot C_{k-1}^{3} p^4 (1-p)^{k-4}$$

Pentru a reduce problema la una cunoscuta trebuie sa facem cateva modificari

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{p^4}{3!} \cdot \sum_{k=4}^{\infty} k \cdot C_{k-1}^{3}(1-p)^{k-4} = \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)(1-p)^{k-4} \\ &= \frac{p^4}{3!} \sum_{i=0}^{\infty} (i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(1-p)^i \end{aligned}$$

Termenul ultimei serii trimite la formula

$$\left((1-p)^{i+4}\right)^{(iv)} = (i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(1-p)^i$$

si atunci aplicand regula de derivare la serii

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(1-p)^i = \left(\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i\right)^{(iv)} = \left(\frac{1}{1-(1-p)}\right)^{(iv)} = \frac{4!}{p^5}$$

In final

$$M(X) = \frac{4}{p}$$

Pentru formula dispersiei se folosesc tehnici similare, have fun !

Problema 4. ***Variabile aleatoare dependente.***
In majoritatea problemelor utilizam ipoteza ca doua variabile aleatoare X, Y sa fie independente. In practica deseori intervin situatii in care variabilele aleatoare, folosite pentru modelarea matematica, sunt dependente. Mai jos aveti un exemplu care presupune manevrarea a doua variabile aleatoare depdendente si aflarea sumei $X + Y$ in acest context.

Adrian si Laura sunt doi agenti imobiliari. Fie X si respectiv Y numarul caselor vandute de catre cei doi, in decursul unei luni. Pe baza vanzarilor realizate in lunile precedente putem estima distributia de probabilitate comuna pentru X si Y

		X = 0	1	2
Y	0	0.12	0.42	0.06
	1	0.21	0.06	0.03
	2	0.07	0.02	0.01

Astfel, spre exemplu $P(0, 1) = 0.21$, insemnand ca probabilitatea ca Adrian sa vanda 0 case iar Laura 1 casa este de 0.21. Celelalte intrari se interpreteaza in mod similar. De observat ca suma tuturor elementelor tabloului este egala cu 1. Probabilitatile marginale corespunzatoare lui X si Y se calculeaza insumand valorile pe linii sau coloane

		X = 0	1	2	
Y	0	0.12	0.42	0.06	0.6
	1	0.21	0.06	0.03	0.3
	2	0.07	0.02	0.01	0.1
		0.4	0.5	0.1	1.0

In acest mod se obtin tablourile de repartitie corespunzatoare variabilei X, respectiv Y

X	
x	$P(x)$
0	0.4
1	0.5
2	0.1

Y	
y	$P(y)$
0	0.6
1	0.3
2	0.1

De exemplu, acum putem afla probabilitatea ca Laura sa vanda 2 case: 0.1.
Pe de alta parte, citind tabloul de repartitie comun avem

$$P(X = 0 \text{ and } Y = 2) = 0.07,$$

dar $P(X = 0) = 0.4$ si $P(Y = 2) = 0.1$, prin urmare X si Y nu sunt independente caci

$$0.07 = P(X = 0 \text{ and } Y = 2) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 2) = 0.4 \cdot 0.1$$

Se poate observa, in acest exemplu, ca $X+Y$ este variabila care numara cate case reusesc sa vanda cei doi agenti impreuna, in decursul unei luni. Valorile posibile ale lui $X + Y$ vor fi: 0,1,2,3,4. Probabilitatile atasate se afla folosind distributia de probabilitate comuna in felul urmator

$$P(X + Y = 0) = P(X = 0 \text{ si } Y = 0) = 0.12$$

De remarcat ca nu putem folosi formula inmultirii $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$ deoarece variabilele nu sunt independente.

$$P(X + Y = 1) = P(X = 0 \text{ si } Y = 1) + P(X = 1 \text{ si } Y = 0) = 0.21 + 0.42 = 0.63$$

Daca ne intereseaza probabilitatea ca Adrian si Laura sa vanda impreuna doua case, intr-o anumita luna

$$\begin{aligned} P(X + Y = 2) &= P(X = 0 \text{ si } Y = 2) + P(X = 1 \text{ si } Y = 1) + P(X = 2 \text{ si } Y = 0) \\ &= P(0, 2) + P(1, 1) + P(2, 0) = 0.19 \end{aligned}$$

Continuam in acelasi mod si completam tabloul de repartitie al lui $X + Y$

$x + y$	$P(x + y)$
0	0.12
1	0.63
2	0.19
3	0.05
4	0.01

Problema 5. *Sa notam cu X numarul de cani cu ciocolata calda vandute zilnic la o cafenea si cu Y numarul de briose cu scortisoara vandute in aceeasi zi. Managerul cafenelei poate exploata cunoasterea gradului de corelare intre X si Y. Daca variabilele aleatoare X si Y sunt puternic corelate, atunci managerul va incerca sa se asigure ca ambele produse sunt disponibile in fiecare zi. Daca aceste variabile nu sunt corelate, nu va fi o problema daca doar unul dintre produse este disponibil. Pe baza istoricului vanzarilor managerul a putut realiza urmatorul tablou de repartitie a celor doua variabile aleatoare*

X/Y	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=0$	3/16	1/16	0
$x=1$	1/6	1/6	1/6
$x=2$	0	1/8	1/8

Care este coeficientul de corelare al variabilelor X, Y ?

Solutie: Tabloul de repartitie este in realitate mult mai voluminos. Am ales sa introducem cat mai putine informatii in el, pentru a reduce numarul calculelor. Ca si in cazul problemei anterioare putem sa determinam tablourile de repartitie ale lui X si Y pornind de la acesta

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{16} & \frac{3}{6} & \frac{2}{8} \end{pmatrix} \quad \text{si apoi} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{17}{48} & \frac{17}{48} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

In acest fel obtinem

$$M(X) = 0 \cdot \frac{4}{16} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 2\frac{2}{8} = 1$$

$$\sigma(X) \approx 0.707$$

$$M(Y) = 0 \cdot \frac{17}{48} + 1 \cdot \frac{17}{48} + 2\frac{7}{24} = \frac{45}{48} = \frac{15}{16}$$

$$\sigma(Y) \approx 0.801$$

Putem folosi o scurtatura pentru a calcula $\rho_{X,Y}$ si anume formula

$$\rho_{X,Y} = \frac{1}{\sigma(X)\sigma(Y)} \sum_{x_i, y_j} (x_i - M(X))\,(y_j - M(Y)) \cdot P(X = x_i \text{ si } Y = y_j)$$

unde x_i, y_j sunt valorile celor doua variabile iar probabilitatile sunt preluate din tabloul comun de repartitie.

A doua metoda de calcul ar presupune utilizarea formulei

$$\rho_{X,Y} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

pentru care avem nevoie de distributia de probabilitate a variabilei XY, construita tot pe baza tabloului comun de repartitie.

Inlocuind, in oricare dintre cele doua formule, se obtine

$$\rho_{X,Y} = -0.927$$

care indica o corelatie puternica intre cele doua variabile dar covarianta este negativa, deci valorilor mari ale primei variabile ii corespund valorile mici ale celei de-a doua si invers. Managerul poate trage o concluzie deocamdata: cei care cumpara ciocolata calda se pare ca nu prefera combinatia cu o briosa, deci ar putea gandi o oferta care sa includa doar ciocolata si una doar cu briose, dar nu cu ambele.

Problema 6. *Sunt 3 bariere de trafic de-a lungul unei sosele. Probabilitatea ca o masina care circula pe acea sosea sa gaseasca deschisa oricare dintre aceste trei bariere este $p = 0,8$. Presupunem ca oricare dintre aceste bariere functioneaza independent. Aflati:*
a) Tabloul de repartitie al variabilei aleatoare care numara barierele depasite pana in momentul in care masina intalneste prima bariera inchisa.
b) Aflati functia de distributie cumulativa.
c) Care este numarul asteptat de bariere deschise pana cand masina se va opri in fata unei bariere inchise ?

Solution: a) Notam cu X variabila aleatoare cautata, care va avea tabloul de repartitie:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix},$$

unde $p_k = P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Prin modul in care am definit variabila aleatoare se obtine:

$$p_0 = P(X = 0) = 0,2$$

$$p_1 = P(X = 1) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$$

$$p_2 = P(X = 2) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128$$

$$p_3 = P(X = 3) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512$$

Prin urmare:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,16 & 0,128 & 0,512 \end{pmatrix}.$$

b) Pentru $x < 0$ obtinem $F(x) := P(X \le x) = 0$ pentru ca in intervalul $(-\infty, 0)$ nu exista valori ale lui X.

Cand $0 \le x < 1$ se obtine:

$$F(x) = P(X \le x) = P(X = 0) = 0,2.$$

Cand $1 < x \le 2$ se obtine:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \le x) = P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 0,2 + 0,16 = 0,36. \end{aligned}$$

Cand $2 < x \leq 3$ se obtine:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,2 + 0,16 + 0,128 = 0,488.$$

In final, pentru $x > 3$ avem $F(x) = 1$.
Functia de distributie a lui X este:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ 0,2 & , \ 0 \leq x < 1 \\ 0,36 & , \ 1 \leq x < 2 \\ 0,488 & , \ 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \ 3 \leq x \end{cases}.$$

Remarca

Uneori functia de distributie este definita ca

$$F(x) = P(X < x)$$

atunci rezultatul de mai sus arata putin diferit pentru ca va trebui sa analizam cazurile: $k \ < x \leq k+1$.

c) Soferul se asteapta sa gaseasca 2 bariere deschise deoarece valoarea asteptata (media) lui X este $M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,16 + 2 \cdot 0,128 + 3 \cdot 0,512 \approx 1.95$

Problema 7. *Numarul de cipuri de memorie M necesare unui computer personal depinde de cate aplicatii A vrea utilizatorul sa ruleze simultan. Numarul cipurilor M si numarul de aplicatii A sunt descrise prin:*

$$M = \begin{cases} 4 \text{ cipuri,} & \text{pentru o aplicatie deschisa,} \\ 4 \text{ cipuri,} & \text{pentru } 2 \text{ aplicatii,} \\ 6 \text{ cipuri,} & \text{pentru } 3 \text{ aplicatii,} \\ 8 \text{ cipuri,} & \text{pentru } 4 \text{ aplicatii,} \end{cases}$$

si

$$P_A(a) = \begin{cases} 0.1(5-a) & a = 1, 2, 3, 4, \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

i) Care este numarul asteptat de aplicatii $M(A)$?

ii) Exprimati $M = g(A)$ ca o functie a numarului de aplicatii.

iii) Gasiti valoarea media a variabilei $g(A)$.

Solutie: i) Variabila aleatoare A este

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

conform informatiilor din ipoteza problemei.

$$M(A) = 0.4 + 0.6 + 0.6 + 0.4 = 2$$

ii) Pentru a gasi o legatura intre numarul de aplicatii deschise si numarul de cipuri alocate avem nevoie de o functie g care asocieze $1 \to 4$, $2 \to 4$, $3 \to 6$ si $4 \to 8$. Cel mai simplu ar fi sa cautam o functie polinomiala de forma $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si atunci pe baza datelor avute identificam a, b, c, d. Problema este gresit formulata, din acest punct de vedere, deoarece putem gasi relatii de corespondenta nepolinomiale care sa satisfaca aceleasi restrictii. In principiu, trebuiau oferite mai multe informatii referitoare la functia g cautata. Oricum, rezolvand sistemul liniar care se obtine, gasim

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{20}{3}x + 8$$

Putem folosi aceasta functie pentru a calcula valoarea medie, conform formulei

$$M(g(A)) = \sum_{a \in S_A} g(a) P_A(a)$$

unde S_A este multimea valorilor variabilei aleatoare A. In concluzie

$$M(g(A)) = \sum_{a=1}^{4} g(a) P_A(a)$$

Probleme propuse

Problema 1. *Dintr-un lot de* 100 *de piese, dintre care o* 10 *sunt defecte, se alege la intamplare un esantion de* 5 *piese pentru un control de calitate. Construiti tabloul de repartitie a variabilei aleatoare* X *care contorizeaza piesele defecte continute in esantion.*

Problema 2. *O masina intalneste* 4 *semafoare inteligente in calea sa. Fiecare va avea culoarea rosie sau verde cu probabilitatea* 0.5*. Afisati tabloul de repartitie a variabilei aleatoare care numara semafoarele depasite de aceasta masina inainte de prima sa oprire. Aflati functia de repartitie a acestei variabile aleatoare.*

Problema 3. *Intr-un spital nasterile apar aleator cu o rata medie de* 1.8 *nasteri pe ora. Care este probabilitatea de a observa* 4 *nasteri intr-o anumita ora la acel spital ? Care este probabilitatea de a observa intre* 4 *si* 7 *nasteri intr-o anumita ora? Care este probabilitatea de a observa cel putin o nastere intr-un interval de o ora fixat ?*

Problema 4. *U-BT Cluj si BC Timisoara joaca un meci de baschet eliminatoriu in sistemul cel mai bun din 5 meciuri. Seria de meciuri se incheia cand una dintre echipe castiga 3 meciuri. Presupunem ca sansa la victorie in fiecare meci este de* 50% *pentru oricare dintre cele doua echipe. Aflati*

(a) Distributia de probabilitate $P_N(n)$ *pentru variabila care contorizeaza numarul total de meciuri jucate.*

(b) Distributia de probabilitate $P_U(u)$ *pentru numarul de victorii ale echipei U-BT Cluj.*

(c) Distributia de probabilitate $P_B(b)$ *pentru numarul de infrangeri ale echipei BC Timisoara. in the series.*

Problema 5. *Pentru doua variabile independente:*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix} \quad si \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

calculati $X + Y$, $2X$, $M(X)$ *si apoi aratati ca* $M(XY) = M(X)M(Y)$.
Calculati $D^2(X + 2Y)$ *si* $P(2 < X + 2Y \leq 5)$.

Problema 6. *Un student trebuie sa completeze un test grila consistand din doua probleme, cu raspunsuri unice. Prima problema are* 3 *raspunsuri posibile si a doua are* 5. *Studentul alege la intamplare cate un raspuns pentru fiecare problema. Gasiti numarul asteptat* $M(X)$ *de raspunsuri corecte* X *ale studentului. Evaluati dispersia* $D^2(X)$. *Generalizati problema.*

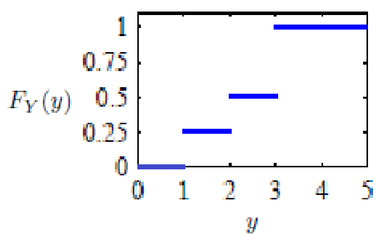
Problema 7. *Numarul de apeluri care sosesc intr-un interval de un minut la receptia unui hotel este o variabila Poisson de parametru* $\lambda = 3$.

(a) Aflati probabilitatea ca niciun apel sa soseasca intr-o anumita perioada de 1 *minut.*

(b) Gasiti probabilitatea ca receptia sa primeasca cel putin 3 *apeluri intr-un interval anume de doua minute.*

(c) Care este numarul asteptat de apeluri intr-o perioada de 1 *minut ?*

Problema 8. *O variabila aleatoare discreta* Y *are urmatoarea functie de repartitie*



Aflati functia de repartitie pentru a afla probabilitatile:

a) $P[Y < 1]$

b) $P[Y \leq 1]$

b) $P[Y \geq 2]$

b) $P[Y = 3]$

Problema 9. *In urma testarii a doua dispozitive, A si B, se estimeaza probabilitatea ca acestea sa emita un zgomot nedorit, a carui intensitate este evaluata pe trei nivele:*

Nivel zgomot	1	2	3
Dispozitiv A	0.20	0.06	0.04
Dispozitiv B	0.06	0.04	0.10

Folosind acest tabel selectati dispozitivul mai bun. Justificati!

Indicatie: Cum si-ar dori clientul sa fie media si dispersia nivelului de zgomot?

Problema 10. *Variabila aleatoare X reprezinta numarul de pagini transmise prin fax. Din experienta avem un model de probabilitate $P_X(x)$ pentru numarul de pagini transmise in fiecare fax. Compania de telefonie mobila iti ofera un nou plan tarifar pentru faxuri:* 0.10 \$ *pentru prima pagina,* 0.09 \$ *pentru a doua, etc., pana la* 0.06 \$ *pentru a cincea. Pentru faxuri cu lungime cuprinsa intre* 6 *si* 10 *pagini, compania taxeaza cu* 0.50 \$ *per fax. (Nu accepta faxuri mai lungi de zece pagini.) Gasiti o functie $Y = g(X)$ pentru tariful, exprimat in centi, perceput pentru transmiterea unui fax.*

Problema 11. *In problema anterioara adaugam un model de probabilitate $P_Y(y)$ pentru factura telefonica corespunzatoare noului plan de tarifare. Sa presupunem ca modelul de probabilitate pentru numarul de pagini X a faxului este*

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.15 & , \textit{pentru } x = 1, 2, 3, 4 \\ 0.10 & , \textit{pentru } x = 5, 6, 7, 8 \\ 0 & , \textit{altfel} \end{cases}$$

Pentru planul de tarifare dat in problema anterioara, aflati $P_Y(y)$ si valoarea asteptata a lui Y, costul faxului.

Problema 12. *Doua variabile aleatoate X, Y au functia de probabilitate atasata perechii data prin*

$P_{X,Y}(x,y)$	$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$
$x = -1$	0	0.25	0
$x = 1$	0.25	0.25	0.25

Studiati daca X si Y sunt independente. Sunt X si Y necorelate ($\rho_{X,Y} = 0$) ?

Bibliografie

[1] R. Yates and D. Goodman. *Probability and Stochastic processes*, Wiley&Sons, 2005.

[2] F. P. Schoenberg. *Introduction to Probability with Texas Hold'em examples*, Taylor & Francis, 2011.

[3] R. Negrea. *Curs Matematici Speciale*, 2020.

[4] C. Hedrea. *Notite seminar Matematici Speciale*, 2020.