ÜBUNGSBLATT 8

Aufgabe 1. *Calculati reziduurile functiilor de mai jos in punctele specificate*

i) $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^2}$, $\quad Rez(f,0) = ?$

ii) $f(z) = \frac{\sin(z)+1}{z^3}$, $\quad Rez(f,0) = ?$

iii) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, $\quad Rez(f,0) = ?$

iv) $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^2}$, $\quad Rez(f,1) = ?$

Solutie: i) Pentru functia $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^2}$ se observa ca $z = 0$ este un pol de ordin 3 (vezi in curs definitia singularitatii numita pol si teorema de caracterizare). Stim din curs ca daca functia f are in punctul z_0 un pol de ordin m, $m \geq 1$, atunci:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z)\right)$$

Prin urmare pentru $z = 0$, pol de ordin $m = 3$ avem

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} \left((z - 0)^3 f(z)\right) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \left(z^3 f(z)\right)^{(2)}$$

Notatia $\left(z^3 f(z)\right)^{(2)}$ inseamna derivare de doua ori a expresiei $z^3 f(z)$. Intai sa observam ca

$$z^3 f(z) = z^3 \frac{1}{z^3(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

Apoi incepem sa derivam

$$\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)' = \frac{-2}{(z-1)^3}$$

$$\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)^{(2)} = \left(\frac{-2}{(z-1)^3}\right)' = \frac{6}{(z-1)^4}$$

Daca revenim la formula reziduului mai avem de calculat

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \left(z^3 f(z)\right)^{(2)} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{6}{(z-1)^4} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{6}{1} = 3$$

Analog se evalueaza si celelalte reziduuri, tinand cont ca de obicei calculul unui reziduu implica derivari si apoi calcularea unei limite.

Aufgabe 2. *Calculati integralele:*

i) $I = \displaystyle\int_c \frac{z^2}{(z-1)^3}\,dz, \quad unde \quad c : x^2 + y^2 = 2x$

ii) $J = \displaystyle\int_c \frac{z-e}{z^2+1} \quad unde \quad c : \ |z| = 3$

iii) $K = \displaystyle\int_{|z+2|=5} \frac{3i+z^4}{(z+3)^3} dz$

iv) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^3} dz$

Solutie: i) In toate problemele de integrare a unor functii complexe este foarte important sa realizam un desen cat mai corect al curbei pe care vom integra, deoarece trebuie sa evaluam pozitia singularitatilor functiei in raport cu aceasta curba (daca se afla in interiorul curbei, pe curba sau in exterior).

De remarcat ca o curba de tipul $|z - z_0| = c$ este un cerc cu centrul in imaginea numarului complex z_0 si de raza c. In cazul nostru curba este data de ecuatia $x^2 + y^2 = 2x$ care seamana cu ecuatia unui cerc (in varianta necomplexa)

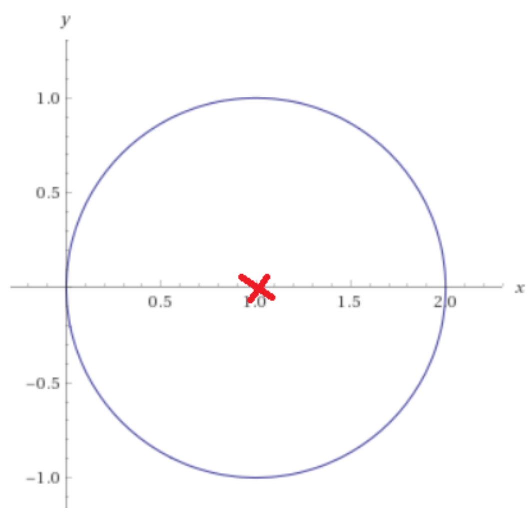
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

unde $C(a, b)$ este centrul cercului si R raza. Putem prelucra putin ecuatia curbei noastre pentru a ajunge la aceasta forma

$$x^2 + y^2 = 2x \implies x^2 - 2x + y^2 = 0 \implies (x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$$
$$\implies (x-1)^2 + y^2 = 1 \implies (x-1)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

deci am obtinut ecuatia unui cerc de centru $C(1, 0)$ si raza $R = 1$.

Functia data $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$ va avea o singura singularitate, in $z = 1$. Aceasta singularitate este un pol de ordin 3. Trebuie sa evaluam pozitia singularitatii fata de curba pe care vom integra



Se poate observa ca $z = 1$ se afla in interiorul curbei, exact in mijlocul cercului. Prin urmare reziduul in 1 va aparea cand aplicam teorema reziduurilor (vezi curs)

$$\int_c \frac{z^2}{(z-1)^3}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}(f,1)$$

Ideea teoriei reziduurilor este sa reduca evaluarea unei integrale pe o curba inchisa la calculul unor reziduuri, care se obtin cu formula de la problema anterioara. Din nou $z = 1$ este pol de ordin 3. Aplicam din nou formula reziduului unei functii intr-un pol de ordin 3

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,1) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3 f(z)\right) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{z^2}{(z-1)^3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(z^2)'' = \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 1} 2 = 1\end{aligned}$$

In final

$$\int_c \frac{z^2}{(z-1)^3}\,dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

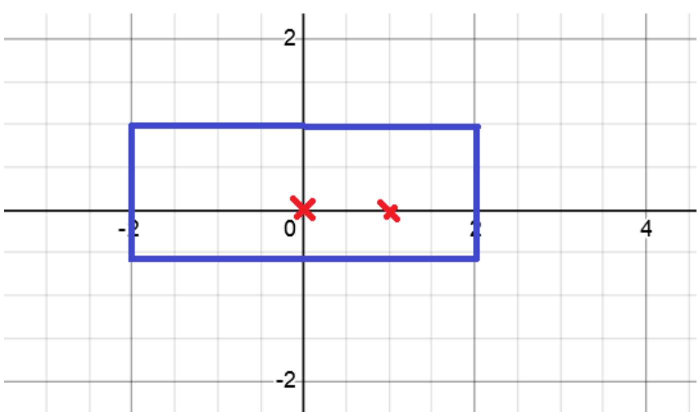
Ar fi de observat ca rezultatul integrarii este un numar complex. Cand integram functii complexe este normal sa obtinem nu doar numere reale ca rezultate ci si complexe.

Aufgabe 3. *Calculati integrala:*

$$\int_c \frac{2z-1}{z^2(z-1)^3}dz$$

unde c este dreptunghiul definit de $x = -2$, $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}$ si $y = 1$.

Solutie: Functia are doua singularitati: pe $z = 0$ care este pol de ordin 2 si pe $z = 1$ care este pol de ordin 3. Se deseneaza curba c care este un dreptunghi, folosind informatiile date



Se observa ca ambii poli se afla in interiorul curbei (dreptunghiului) prin urmare vor aparea in teorema reziduurilor

$$\int_c \frac{2z-1}{z^2(z-1)^3}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}(f, 0) + 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}(f, 1)$$

Vom calcula cele doua reziduuri tinand cont de ordinul fiecarui pol. De exemplu, $z = 0$ este un pol de ordin 2 deci

$$\mathrm{Rez}(f, 0) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}(z^2 f(z))' = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z-1}{(z-1)^3}\right)'$$

Se deriveaza

$$\left(\frac{2z-1}{(z-1)^3}\right)' = \frac{(2z-1)'(z-1)^3 - (2z-1)[(z-1)^3]'}{(z-1)^6} = \frac{-4z+1}{(z-1)^4}$$

apoi

$$\mathrm{Rez}(f, 0) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{-4z+1}{(z-1)^4} = 1$$

In schimb $z = 1$ este pol de ordin 3 deci

$$\mathrm{Rez}(f, 1) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}((z-1)^3 f(z))'' = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{2z-1}{z^2}\right)''$$

Va trebui sa derivam de doua ori, apoi vom obtine reziduul cautat si in final valoarea integralei.

Aufgabe 4. *Calculati integrala:*

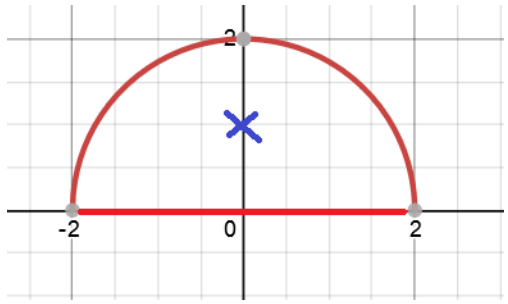
$$\int_c \frac{1}{z^2+1}dz$$

unde c este curba marginita de $y = 0$ *si* $y = \sqrt{4-x^2}$.

Solutie: Se observa ca singularitati (puncte in care functia are probleme de definire) apar atunci cand $z^2 + 1 = 0$ adica $z = \pm i$. Acum va trebui sa desenam curba pe care integram. Intai prelucram ecuatia

$$y = \sqrt{4-x^2} \implies y^2 = 4-x^2 \implies x^2+y^2 = 2^2 \implies (x-0)^2+(y-0)^2 = 2^2$$

deci avem un cerc de centru $C(0, 0)$ si raza $R = 2$, din care enuntul problemei ne cere sa pastram doar partea de deasupra axei Ox (caci $y = 0$ este ecuatia axei Ox).



Din cele doua singularitati doar $z = i$ se afla in interiorul curbei c, $z = -i$ se afla in exterior si nu va aparea in expresia data de teorema reziduurilor

$$\int_c \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \text{Rez}(f, i)$$

mai trebuie remarcat ca functia $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ se poate scrie $\frac{1}{(z-i)(z+i)}$ deci $z = i$ este pol de ordin 1, la fel si $z = -i$. Pentru polii de ordin intai formula reziduului este mai simpla

$$\text{Rez}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

In final

$$\int_c \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Aufgabe 5. *Calculati integrala:*

$$\int_c z^2 e^z + \frac{z e^z}{z^4 - \pi^4} dz$$

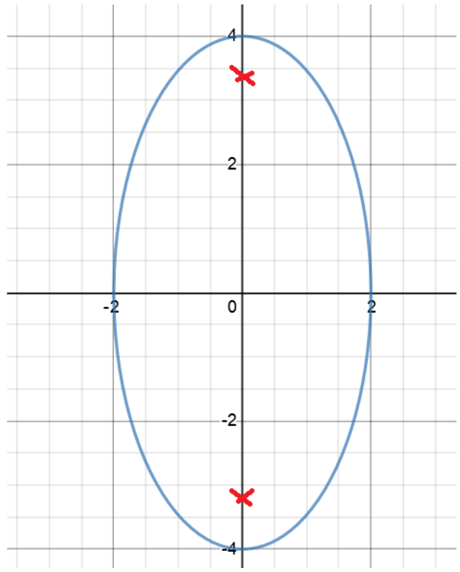
unde c este curba $4x^2 + y^2 = 16$

Solutie: Curba pe care vom integra este o elipsa, caci

$$4x^2 + y^2 = 16 \quad \Longrightarrow \frac{4x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \Longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

deci o elipsa cu centrul in $O(0,0)$ si de semiaxe $a = 2$ si $b = 4$

Singurele puncte problematice se obtin daca $z^4 - \pi^4 = 0$ deci $z = \pi$, sau $z = -\pi$ sau $z = i\pi$ sau $z = -i\pi$. Doar ultimele doua puncte sunt in interiorul curbei c. Celelalte doua puncte sunt pe axa Ox in afara curbei, caci π este aproximativ $3,14$.



Inainte de a trece la calcularea integralei trebuie sa adaugam o observatie. Partea din functie z^2e^z nu are singularitati in interiorul curbei, prin urmare

$$\int_c z^2e^z\ dz = 0$$

Pentru cealalta parte aplicam teorema reziduurilor si obtinem

$$\int_c \frac{ze^z}{z^4-\pi^4}dz = 2\pi i \cdot \text{Rez}\left(\frac{ze^z}{z^4-\pi^4}, i\pi\right) + 2\pi i \cdot \text{Rez}\left(\frac{ze^z}{z^4-\pi^4}, -i\pi\right)$$

Ambele singularitati sunt poli de ordinul intai caci

$$\frac{ze^z}{z^4-\pi^4} = \frac{ze^z}{(z-\pi)(z+\pi)(z-i\pi)(z+i\pi)}$$

$$\text{Rez}\left(\frac{ze^z}{z^4-\pi^4}, i\pi\right) = \lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{ze^z}{z^4-\pi^4} = \lim_{z\to i\pi}\frac{ze^z}{(z-\pi)(z+\pi)(z+i\pi)}$$

$$= \frac{i\pi e^{i\pi}}{\pi(i-1)\pi(i+1)2\pi i} = \frac{e^{i\pi}}{-4\pi^2} = \frac{1}{4\pi^2}$$

caci

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0\cdot i$$

Analog se calculeaza celalalt reziduu si in final se obtine valoarea integralei.