Übungsblatt 7

> Aufgabe 1. *Beweisen Sie dass* $\sinh z = 0$ *genau dann, wenn* $z = n\pi i$ *und* $\cosh z = 0$ *genau dann, wenn* $z = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi i$.

Solutie: Vom arata ca

$$\sinh z = 0 \iff z = n\pi i$$

Pentru aceasta trebuie sa pornim de la formula sinusului hiperbolic

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

deci atunci cand aceasta expresie va fi nula obtinem

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^z + e^{-z} = 0 \Longrightarrow \quad e^z + \frac{1}{e^z} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{e^z e^z + 1}{e^z} = 0 \quad \Longrightarrow e^{2z} + 1 = 0 \Longrightarrow e^{2z} = -1$$

Pentru a rezolva aceasta ultima ecuatie trebuie sa folosim logaritmul complex, despre care amintim ca este definit cu ajutorul logaritmului real ln prin formula (vezi curs)

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \cdot (\theta + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Asadar

$$e^{2z} = -1 \quad \Longrightarrow 2z = \text{Ln}(-1) \quad \Longrightarrow z = \frac{1}{2}\text{Ln}(-1)$$

Conform formulei logaritmului complex

$$\text{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \cdot (\theta + 2k\pi)$$

unde $\theta = 0$ este argumentul numarului -1, fiind real. Se remarca usor ca $\ln|-1| = \ln 1 = 0$ deci in final $\text{Ln}(-1) = 2k\pi \cdot i$, pentru un $k \in \mathbb{Z}$ oarecare. Solutia primei ecuatii va fi

$$z = \frac{1}{2}\text{Ln}(-1) = k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 2. *Schreibe folgende komplexe Zahlen in Polarform*

$$z_1 = -\sqrt{3} - i, \quad z_2 = 1 - i.$$

i) *Finden Sie das Hauptargument* $Arg(z_1)$ *und berechnen Sie* $(-\sqrt{3} - i)^{50}$.

ii) *Für die komplexen Zahlen* $z_1 = -1, z_2 = 5i$, *überprüfen Sie dass:*

$$Arg(z_1 z_2) \neq Arg(z_1) + Arg(z_2)$$
$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

und

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$
$$arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) + arg(z_2).$$

Solutie: Pentru a obtine forma polara (trigonometrica) a unui numar complex avem nevoie de modulul numarului complex si de un argument al acestuia De exemplu pentru $z_1 = -\sqrt{3} - i$, partea sa reala este $-\sqrt{3}$ iar partea sa imaginara este -1 (coeficientul lui i). Modulul va fi

$$|-\sqrt{3} - i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

iar argumentul se afla cu formula

$$\theta = arctg\ \frac{y}{x} + k\pi = arctg\ \frac{-1}{-\sqrt{3}} + k\pi = arctg\ \frac{\sqrt{3}}{3} + k\pi = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

si putem pastra oricare dintre valorile gasite, vom alege $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Forma polara va fi

$$z_1 = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Aufgabe 3. *Zeigen Sie dass* $|\mathrm{Re}\ z| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$. *Zeigen Sie die Identität:*

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}), \qquad z, w \in C$$

und die Dreiecksungleichung $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Solutie: Strategia generala de demnstrare a inegalitatilor este urmatoarea: se prelucreaza inegalitatea pana in momentul in care se ajunge la un rezultat adevarat. Cand prelucram o inegalitate folosim propozitii echivalente si doar A (adevar) poate fi echivalent cu A (adevar), deci inegalitatea cu care pornim va fi adevarata daca vom ajunge prin prelucrare la un rezultat adevarat.

Vom folosi forma algebrica a unui numar complex si vom nota

$$z = x + iy \quad \text{si} \quad w = a + ib$$

pentru $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

Tot ce trebuie sa facem in acest moment e sa scriem fiecare expresie, pornind de la definitia sa, in limbaj de x,y respectiv a,b. De exemplu

$$|Rez| \leq |z|$$

se traduce prin

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

care se prelucreaza la

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq y^2$$

si astfel am obtinut o inegalitate adevarata, prin urmare si cea initiala este adevarata.

Identitatea

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w})$$

se argumenteaza usor prin inlocuire, de exemplu

$$z\overline{w} = (x + iy)(a - ib) = xa - iya - ixb - i^2yb = xa + yb - i(ya + xb)$$

apoi $Re(z\overline{w}) = xa + yb$, etc.

Pentru ultima inegalitate

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

prin inlocuire devine

$$|x + a + i(y + b)| \leq |x + iy| + |a + ib|$$

$$\iff \sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a^2 + b^2}$$

care se ridica la patrat pentru a obtine

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 \leq x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$$

care se reduce apoi la

$$2xa + 2yb \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

pe care o impartim la 2 apoi din nou o ridicam la patrat

$$(xa + yb)^2 \leq (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$$

$$\iff (xa)^2 + 2xayb + (yb)^2 \leq a^2x^2 + y^2a^2 + x^2b^2 + y^2b^2$$

$$\iff 2xayb \leq y^2a^2 + x^2b^2$$

care este adevarata doarece provine din

$$0 \leq (ya - xb)^2$$

Aufgabe 4. *Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichung:*

$$\cos z = 2$$

Solutie: Este suprinzator faptul ca sinusul si cosinusul complex poate lua si valori mai mari decat 1, spre deosebire de cele reale. Pornim de la definitia functiei complexe cosinus

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Daca $\cos z = 2$ ajungem usor la

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \quad \Longrightarrow \quad e^{iz} + e^{-iz} = 4 \quad \Longrightarrow \quad e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} - 4 = 0$$

Daca notam $w = e^{iz}$ ultima ecuatie se transforma in

$$w + \frac{1}{w} - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad w^2 - 4w + 1 = 0$$

cu solutiile

$$w_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} \quad w_2 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Sa nu uitam de notatia facuta

$$w_1 = e^{iz} \quad \Longrightarrow \quad iz = \text{Ln } w_1 \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{i}\text{Ln } w_1$$

unde *Ln* este logaritmul complex. Pentru a continua calculele trebuie sa aplicam formula logaritmului complex

$$\text{Ln}(w_1) = \ln |w_1| + i \cdot \arg(w_1)$$

De retinut aici ca $arg(w_1)$ inseamna argumentul lui w_1 plus un multiplu intreg al lui 2π

$$arg(w_1) = \theta + 2k\pi = 0 + 2k\pi$$

iar modulul lui w_1 este $|w_1| = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$, fiind un numar real.

In final pentru w_1 se obtin o infinitate de solutii de forma

$$z = \frac{1}{i}\left(\ln |2 - \sqrt{3}| + i(0 + 2k\pi)\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Si pentru w_2 se vor obtine tot o infinitate de solutii, procedand asemanator.

Aufgabe 5. *i) Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichungen:*

$$z^6 = 1 + i$$
$$z^2 + z + 1 = 0$$
$$z^4 + 1 = 0$$

ii) Berechnen Sie $\sqrt{3 + \sqrt{3}i}$

Solutie: La ambele subpuncte se ajunge la un moment dat la aplicarea formulei radicalului de ordin n al unui numar complex

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

In principiu atunci cand avem de-a face cu radicali din numere complexe trebuie sa retinem trei lucruri: radicalul de ordin n returneaza n rezultate, avem nevoie de modul numarului complex si de un argument al sau.

Spre exemplu, pentru a rezolva ecuatia

$$z^6 = 1 + i$$

ajungem la

$$z = \sqrt[6]{1+i} = \sqrt[6]{|1+i|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{6}\right)$$

unde k ia valori de la 0 la $6 - 1 = 5$ iar θ este un argument al numarului complex $z = 1 + i$. Argumentul se afla rapid, vezi si curs, caci $z = 1 + i$ are partea reala $x = 1$ si partea imaginara $y = 1$ apoi

$$\theta = arctg\ \frac{y}{x} + k\pi = arctg\ 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}$$

unde nu am mai adaugat $k\pi$ deoarece este suficient sa obtinem un argument oarecare al lui $1 + i$.

Apoi modulul $|z| = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. In final obtinem cele 6 valori ale radicalului de ordin sase:

$$k = 0 \implies \sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 0\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 0\pi}{6}\right) = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)$$

$$k = 1 \implies \sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 1\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 1\pi}{6}\right) = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{24} + i\sin\frac{9\pi}{24}\right)$$

$$k = 2 \implies \sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 2\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 2\pi}{6}\right) = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{24} + i\sin\frac{17\pi}{24}\right)$$

$$k = 3 \implies \sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 3\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 3\pi}{6}\right) = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}\right)$$

$$k = 4 \implies \sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 4\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 4\pi}{6}\right) = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{24} + i\sin\frac{33\pi}{24}\right)$$

$$k = 5 \implies \sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 5\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 5\pi}{6}\right) = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24} + i\sin\frac{41\pi}{24}\right)$$

Pentru a verifica daca am obtinut rezultatul corect putem sa folosim formula lui Moivre pentru a ridica la puterea a 6-a pe oricare dintre ele

$$\begin{aligned}\left[\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24} + i\sin\frac{41\pi}{24}\right)\right]^6 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{6\cdot 41\pi}{24} + i\sin\frac{6\cdot 41\pi}{24}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{41\pi}{4} + i\sin\frac{41\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

La ultimul pas am folosit faptul ca sin si cos sunt periodice de perioada 2π

$$\cos\frac{41\pi}{4} = \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

In final

$$\left[\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24} + i\sin\frac{41\pi}{24}\right)\right]^{6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{2} + i\frac{2}{2} = 1 + i$$

Analog se procedeaza la celelalte subpuncte ale problemei.

Aufgabe 6. *Beweisen Sie dass:*

$$\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$$

$$\sin(2z) = 2\sin z\cos z$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Solutie: Folosim pentru fiecare dintre cele trei identitati definitia functiilor complexe $\sin z$ si $\cos z$. Mai precis

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Cea mai simpla strategie de rezolvare ar implica evaluarea membrului stang si apoi membrului drept, al fiecarei identitati, iar in final compararea rezultatelor.

$$m_s = \cos(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2}$$

si deja este neclar incotro ar trebui sa ne indreptam, eventual mai continuam un pas si desfacand parantezele ajungem la

$$\cos(z+w) \overset{definitie}{=} \frac{e^{iz}e^{iz} + e^{-iz}e^{-iw}}{2}$$

Pornim din cealalta parte si incercam sa ajungem la aceasta expresie

$$\cos z\cos w - \sin z\sin w \overset{def}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

facem calculele, inmultind fractiile si apoi adunandu-le

$$m_d = \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4} - \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{-4}$$

$$= \frac{2e^{iz}e^{iw} + 2e^{-iz}e^{-iw}}{4} = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2}$$

si acum e clar ca cei doi membri ai identitatii sunt egali intre ei. Analog se precedeaza pentru celelate doua identitati.