Übungsblatt 4

Aufgabe 1. *Für den Bereich $D = \{(x,y) \ : \ 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4\}$ berechne man folgende Doppelintegrale:*

i) $\displaystyle\iint_D x^2y^3 \ dxdy$

ii) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x+y} \ dxdy$

iii) $\displaystyle\iint_D \ln(2x+3y) \ dxdy$

Lösung: Din moment ce domeniul se poate scrie sub forma $D = [1,2] \times [1,4]$ putem sa aplicam teorema lui Fubini (vezi curs). De exemplu la subpunctul iii) avem

$$\iint_D \ln(2x+3y) \ dxdy = \int_1^2 \left(\int_1^4 \ln(2x+3y)dy \right) dx$$

Sa luam separat prima integrala care este o integrala relativ la y, deci x trebuie privita ca fiind o constanta:

$$\int_1^4 \ln(2x+3y)dy = ??$$

Intai facem schimbarea de variabila $2x+3y=z$, in care x e considerata o constanta

$$3dy = dz$$

deci

$$\int_1^4 \ln(2x+3y)dy = \int_{2x+3\cdot 1}^{2x+3\cdot 4} \ln z \frac{dz}{3} = \frac{1}{3}\int_{2x+3}^{2x+12} \ln z \ dz$$

Avem nevoie de primitiva lui $\ln z$ pentru a calcula aceasta integrala. O obtinem folosind integrarea prin parti

$$\int \ln z \ dz = \int z' \ln z \ dz = z\ln z - \int z(\ln z)'dz = z\ln z - \int z\frac{1}{z}dz = z\ln z - z$$

Prin urmare

$$\int_1^4 \ln(2x+3y)dy = z\ln z - z\Big|_{2x+3}^{2x+12} = (2x+12)\ln(2x+12) - (2x+3)\ln(2x+3) + 9$$

Rezultatul se inlocuieste in integrala de la care am pornit

$$\iint_D \ln(2x+3y) \ dxdy = \int_1^2 (2x+12)\ln(2x+12) - (2x+3)\ln(2x+3) + 9 \, dx$$

si totul se transforma intr-o munca de chinez nebun :))

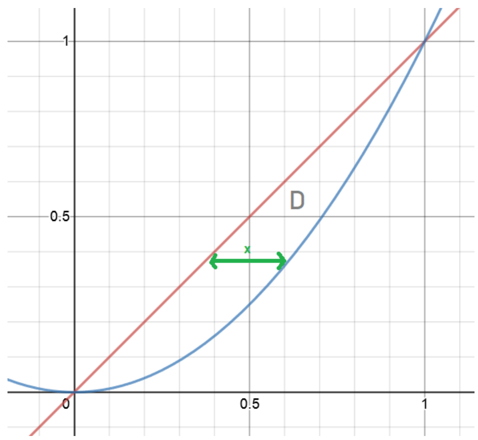
Cismas

Aufgabe 2. *Berechnen Sie das Doppelintegral:*

$$\iint_D xe^y dA,$$

wo das Gebiet D durch die Kurven $y = x$ und $y = x^2$ begrenzt ist.

Lösung: Intai trebuie sa desenam domeniul D care este marginit de curbele $y = x$ si $y = x^2$. In principiu trebuie sa reprezentam grafic functia de gradul intai $f(x) = x$ si functia de gradul al doilea $g(x) = x^2$. Sau putem sa trisam si sa reprezentam ambele grafice pe site-ul desmos.com. Vom obtine dupa ce dam zoom, urmatorul domeniu D



Pentru a putea calcula integrala data trebuie sa reprezentam pe D ca un domeniu simplu in raport cu axele (Normalgebiet bezüglich x oder y, vezi curs). Se poate vedea relativ usor ca D este un Normalgebiet bezüglich y caci pe verticala y este marginit de 1 si 0 iar pe orizonatala x este marginit de curbele $y = x$ si $y = x^2$ care trebuie interpretate din punctul de vedere al lui x, adica $y \leq x \leq \sqrt{y}$.

Asadar

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1, \ y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

Atentia la acest aspect: Daca avem ecuatia unei curbe trebuie sa stim din perspectiva carei variabila trebuie sa o interpretam. De exemplu daca dorim sa spunem ca x se afla cuprins intre curbele $y = \frac{1}{x}$ si $y = x^3$ atunci ne asteptam sa scriem o relatie de tipul

$$g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$$

adica in fiecare ecuatie se exprima x in functie de y si se obtine $x = \frac{1}{y}$ si respectiv $x = \sqrt[3]{y}$ si in final obtinem

$$\frac{1}{y} \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

Daca dorim sa spunem ca y este cuprins intre cele doua curbe atunci exprimam y in functie de x, ceea ce deja este disponibil si obtinem

$$\frac{1}{x} \leq y \leq x^3$$

Aceleasi curbe, diverse persective !

In cazul problemei noastre putem sa reprezentam pe D si ca un Normalgebiet bezüglich x caci vizualizam pe x intre 0 si 1 (vezi desen) iar pe y intre cele doua curbe $y = x$ si $y = x^2$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ x \leq y \leq x^2\}$$

Daca folosim aceasta reprezentare vom obtine (vezi curs)

$$\iint_D xe^y \ dA = \int_0^1 \left(\int_x^{x^2} xe^y dy \right) dx$$

Vom evalua intai integrala din interior

$$\int_x^{x^2} xe^y dy = xe^y \Big|_x^{x^2} = xe^{x^2} - xe^x$$

In final

$$\iint_D xe^y \ dA = \int_0^1 (xe^{x^2} - xe^x) dx = \int_0^1 xe^{x^2} dx + \int_0^1 xe^x dx$$

Prima integrala este usor de evaluat, facem o schimbare de variabila $x^2 = y$ si cu prima metoda $2xdx = dy$ apoi

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} 2xdx = \frac{1}{2} \int_{0^2}^{1^2} e^y dy = \frac{1}{2} e^y \Big|_0^1 = \frac{e^1 - 1}{2}$$

In a doua integrala folosim integrarea prin parti

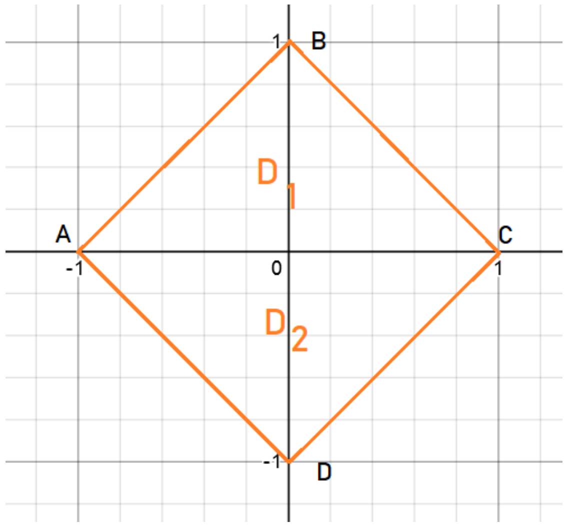
$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 x' e^x dx = e - 0 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1$$

Aufgabe 3. *Berechnen Sie das Doppelintegral:*

$$\iint_D (x + y) dA,$$

wo der Bereich ein Quadrat mit den Eckpunkten $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ *und* $(0, -1)$ *in der* xy *Ebene liegt.*

Lösung: Domeniul D marginit de cele patru puncte este un patrat



Acesta nu poate fi scris ca un domeniu simplu in raport cu axele si prin urmare trebuie sa il descompunem in subdomenii care pot fi scrise ca domenii simple. Il descompunem in cele doua triunghiuri care il formeaza

$$D = D_1 \cup D_2$$

si din lipsa de spatiu vom evalua doar prima integrala rezultata

$$\iint_D (x+y)dA = \iint_{D_1} (x+y)dA + \iint_{D_2} (x+y)dA$$

Pentru a evalua integrala peste D_1 va trebui sa scriem pe D_1 ca domeniu simplu in raport cu una dintre axe (Normalgebiet). Se observa ca y se plimba pe verticala intre 0 si 1 si x pe orizontala intre dreapta AB si dreapta BC. Avem nevoie de ecuatiile celor doua drepte pe care apoi ca trebui sa le interpretam din punctul de vedere al lui x.

Dreapta AB este determinata de punctele $A(-1,0)$ si $B(0,1)$, deci

$$AB: \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{1-0}$$
$$AB: \quad x = y-1$$

Dreapta BC este determinata de punctele $B(0,1)$ si $C(1,0)$, deci

$$BC: \quad \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{0-1}$$
$$BC: \quad x = -y+1$$

In final

$$D_1 = \{(x,y): \ 0 \leq y \leq 1, \ y-1 \leq x \leq -y+1\}$$

si

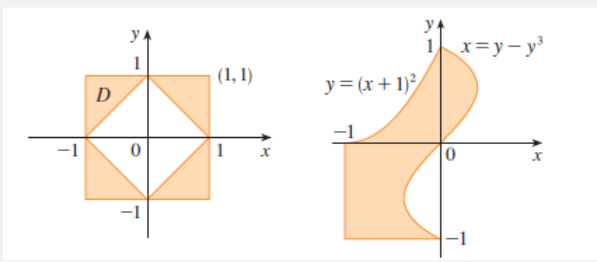
$$\iint_{D_1} (x+y)dA = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{-y+1} (x+y)\ dx \right) dy$$

Incepem din interior

$$\int_{y-1}^{-y+1} (x+y)\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{y-1}^{-y+1} + yx\Big|_{y-1}^{-y+1} = \frac{(-y+1)^2-(y-1)^2}{2} + y(-y+1-y+1)$$
$$= -2y^2+2y$$

$$\iint_{D_1} (x+y)dA = \int_0^1 (-2y^2+2y)dy = ...$$

Aufgabe 4. *Schreiben Sie D*



als eine Vereinigung mehrerer Normalgebiete und rechnen Sie die Integrale

$$\iint_D x\ dA \qquad \textit{und} \qquad \iint_D y\ dA$$

aus.

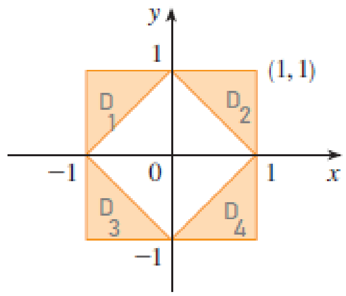
Lösung: Observam ca primul domeniu se poate scrie

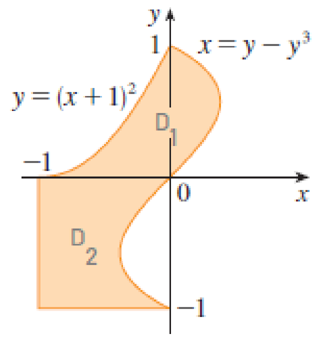
$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

pentru domeniul din stanga si

$$D = D_1 \cup D_2$$

pentru domeniul din dreapta.





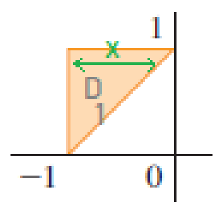
Atunci prima integrala se descompune in

$$\iint_D x\ dA = \iint_{D_1} x\ dA + \iint_{D_2} x\ dA + \iint_{D_3} x\ dA + \iint_{D_4} x\ dA$$

si toate cele patru integrale duble care trebuie evaluate sunt de acelasi tip, drept care o evaluam doar pe prima dintre ele, celelalte calculandu-se asemanator. Pentru toate cele patru triunghiuri care delimiteaza pe D_1, D_2, D_3, D_4 ee util sa identificam varfurile acestora. De exemplu D_1 este marginit de laturile triunghiului de varfuri $(-1,0)$, $(-1,1)$ si $(1,0)$.

$$\iint_{D_1} x\ dA = ???$$

Vom incerca sa scriem pe D_1 ca un Normalgebiet bezüglich x sau y. De exemplu daca pe y il incadram pe verticala intre 0 si 1 (vezi desen) atunci x se incadreaza pe orizontala intre -1 in dreapta si curba care leaga punctele $(-1,0)$ si $(0,1)$.



Avem nevoie de ecuatia curbei care margineste pe x in drepta: dreapta care contine punctele $(-1,0)$ si $(0,1)$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{1-0}$$
$$x+1 = y$$

Aceasta ecuatie trebuie sa o interpretam din punctul de vedere al lui x (vezi comentariul de la Aufgabe 2)

$$x = y - 1$$

$$D_1 = \{(x,y):\ 0 \le y \le 1,\ -1 \le x \le y-1\}$$

Prin urmare

$$\iint_{D_1} x\ dA = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{y-1} x\ dx \right) dy =$$

Din nou incepem din interior

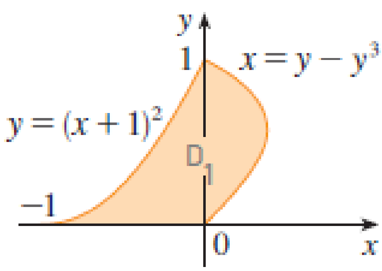
$$\int_{-1}^{y-1} x\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{y-1} = \frac{(y-1)^2 - 1}{2}$$

fiind foarte atenti la variabila relativ la care integram.

$$\iint_{D_1} x\ dA = \int_0^1 \left(\frac{(y-1)^2-1}{2} \right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 - 2y + 1\ dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right)$$

Pentru al doilea domeniu D vom calcula doar integrala pe D_1, cealalta fiind mai usor de evaluat.

$$\iint_D y\ dA = \iint_{D_1} y\ dA + \iint_{D_2} y\ dA$$



Din nou y este incadrat pe verticala intre curbele 0 (jos) si 1 (sus) iar x intre curba $y = (x+1)^2$ (stanga) si $x = y - y^3$ (dreapta). Va trebui sa exprimam ambele curbe din punctul de vedere a lui x. A doua curba este deja astfel exprimata, caci $x = y - y^3$. In acest moment am putea scrie

$$?? \le x \le y - y^3$$

si pentru a afla limita din stanga va trebui sa exprimam pe x in functie de y in ecuatia care da limita din stanga $y = (x+1)^2$

$$y = (x+1)^2 \quad \Longrightarrow x^2 + 2x + 1 - y = 0$$

pe care o interpretam ca pe o ecuatie in x, deci

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1-y)}}{2} = -1 \pm \sqrt{y}$$

Din cele doua valori trebuie sa alegem un care corespunde desenului. Sa investigam putin desenul. x-ul punctelor din cadranul 2 va fi cuprins intre -1 si 0 iar y-ul intre 0 si 1. Daca dorim sa obtinem un x care sa fie intre -1 si 0 trebuie sa alegem expresia $x = -1 + \sqrt{y}$, altfel x-ul ia si valori mai mici decat -1.

$$D_1 = \{(x,y) :\ 0 \le y \le 1,\ -1 + \sqrt{y} \le x \le y - y^3\}$$

Conform definitiei vom obtine

$$\iint_{D_1} y \; dA = \int_0^1 \left(\int_{-1+\sqrt{y}}^{y-y^3} y \; dx \right) dy$$

Bla, bla, bla.