"Regula 50-50-90: de fiecare data cand ai o sansa de 50-50 sa intelegi ceva corect exista o probabilitate de 90% sa intelegi gresit."

Andy Rooney

8

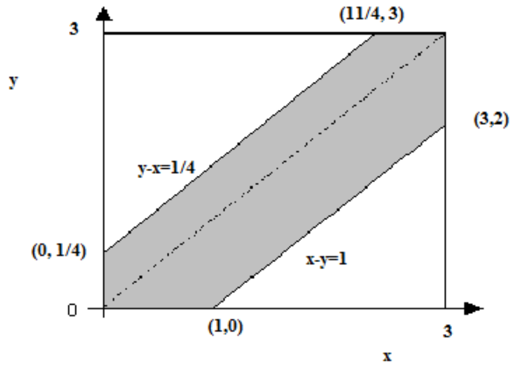
Probabilitati. Probleme clasice

Problema intalnirii

Un barbat si o femeie decid sa se intalneasca intr-un restaurant dupa ora 21. Restaurantul se inchide la ora 24. Din cauza programului incarcat, al fiecaruia, ei decid ca in cazul in care unul dintre ei va intarzia fiecare sa astepte dupa celalalt un anumit timp. Barbatul este dispus sa astepte o ora iar femeia doar 15 minute.

Care este probabilitatea ca cei doi sa se intalneasca in acel restaurant?

Solutie: Vom modela matematic problema in felul urmator: notam cu x timpul la care soseste femeia la restaurant si cu y timpul la care soseste barbatul. Putem sa consideram ora 21 ca fiind timpul 0 si atunci 24 va fi reprezentat de numarul 3. Asadar $x, y \in [0,3]$. Toate posibilitatile sunt reprezentate de punctele (x, y) din interiorul patratului $[0,3] \times [0,3]$ de mai jos.



In cazul in care barbatul soseste primul, adica $y \leq x$, atunci cei doi se vor intalni daca $x - y \leq 1$ (timpul la care soseste femeia este cu cel mult o ora peste cel al sosirii barbatului). Toti timpii de sosire care satisfac aceste restrictii sunt continuti in regiunea gri, din interiorul patratului,mai precis partea din regiune cuprinsa intre prima bisectoare $y = x$ si dreapta $x - y = 1$

In cazul in care femeia soseste prima, adica $x \leq y$, atunci cei doi se intalnesc doar daca $y - x \leq \frac{1}{4}$. Toti timpii de sosire care satisfac aceste restrictii sunt continuti in partea superioara a regiunii gri, din interiorul patratului, si anume partea cuprinsa intre prima bisectoare $y = x$ si dreapta $y - x = \frac{1}{4}$

Probabilitatea ca cei doi sa se intalneasca va fi:

$$P = \frac{\text{numar cazuri favorabile}}{\text{numar cazuri posibile}}.$$

Sunt o infinitate de cazuri favorabile si o infinitatea de cazuri posibile.

Pentru a depasi aceasta situatie va trebui sa contorizam intr-un al mod punctele (x, y) care corespund celor doua multimi. In loc sa numaram puncte, vom "masura" multimi. Estimam probabilitatea utilizand ariile regiunilor care descriu geometric multimea cazurilor favorabile, respectiv multimea cazurilor posibile.

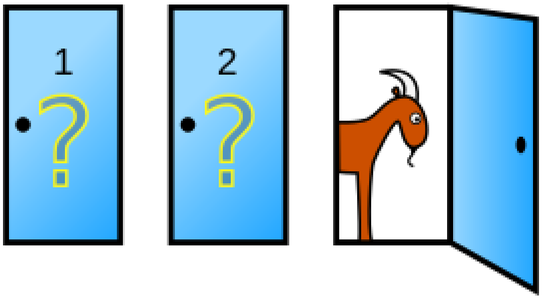
Probabilitatea ca cei doi sa se intalneasca :

$$P = \frac{\text{aria regiunii gri}}{\text{aria patratului}} = \frac{\frac{103}{32}}{3^2} \approx 35\%.$$

Remarca:

Sansa sa intelegi solutia este 50-50, asa ca verifica inca o data daca se aplica regula Rooney si pentru tine!

Problema Monty Hall



Esti la un concurs TV in fata a trei usi. Publicul aplauda. Tensiune, suspans.

Trebuie sa ceri prezentatorului emisiunii sa deschida o usa pentru tine, in speranta ca vei castiga o masina. In spatele unei singure usi se afla masina iar in spatele celorlalte doua se afla cate o capra. Ai ales o usa, sa zicem usa nr. 1. Prezentatorul emisiunii, care stie unde se afla masina, nu o deschide inca dar va deschide una dintre celelalte usi, in spatele careia se va afla evident o capra. Sa presupunem ca e vorba de usa nr. 3.

Apoi, prezentatorul se joaca cu mintea ta si spune:

"Iti voi da posibilitatea sa iti schimbi optiunea si sa alegi usa 2, daca doresti."

Vei alege usa nr.2 sau vei ramane cu alegerea facuta initial (usa nr.1) ?

Tehnici de numarare

• **Regula produsului:** daca o sarcina consta dintr-un sir de n alegeri astfel incat sunt p_1 moduri de a realiza prima alegere, p_2 moduri de a realiza a doua alegere, etc., atunci sarcina poate fi realizata in $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ moduri diferite.

• **Aranjamente de n obiecte distincte luate cate k:** numarul de aranjari a k obiecte alese dintre n obiecte disponibile astfel incat:

- cele n obiecte sunt distincte
- repetarile nu sunt permise
- ordinea conteaza

se obtine prin formula $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

• **Combinari de n obiecte distincte luate cate k:** numarul de moduri in care putem extrage k obiecte din n existente, fara ca ordinea in care sunt extrase sa conteze, se obtine prin formula $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

- **Aranjamente in k lazi (coeficient multinomial):** numarul aranjamentelor a n obiecte, dintre care n_1 sunt de tip 1, n_2 sunt de tip 2,..., n_k sunt de tip k este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}, \qquad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

- **Principiul bijectiei**: doua multimi finite A si B au acelasi numar de elemente daca si numai daca exista o bijectie $f : A \to B$.

· vezi Problema rezolvata 1 pentru un exemplu

- **Principiul incluziunii si excluziunii**: vom nota prin $|A|$ numarul de elemente ale multimii A. Pentru un sir finit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de submultimi ale unei multimi finite X avem

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{p-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n|.$$

Acest principiu poate fi exprimat si in forma sa complementara

$$\left|\bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right| = \left|X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \ldots$$

$$+ (-1)^p \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n|.$$

Scheme clasice de probabilitate

- **Teorema lui Poincaré:** probabilitatea realizarii cel putin a unui eveniment este data de

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k) - \sum_{1\le i<j\le n} P(E_i \cap E_j) +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_n)$$

Compara cu principiul incluziunii si excluziunii. De exemplu, pentru $n = 3$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ & - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

- **Formula inmultirii:** probabilitatea realizarii tuturor evenimentelor

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \ldots \cdot P\left(E_n \middle| \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right)$$

In cazul in care stim ca evenimentele sunt independente, formula se simplifica

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) = P(E_1)\cdot P(E_2)\cdot \ldots \cdot P(E_n).$$

• **Formula probabilitatii totale:** probabilitatea unui eveniment E care poate aparea simultan cu unul dintre evenimentele $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (numite ipoteze), care formeaza un sistem complet de evenimente, e data de

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(E|H_k)$$

unde $\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k) = 1$ (adica doar in aceste ipoteze poate aparea E)

• **Formula lui Bayes:** probabilitatea $P(H_j|E)$ a ipotezei H_j dupa ce evenimentul E a avut loc

$$P(H_j|E) = \frac{P(H_j)P(E|H_j)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(E|H_k)}$$

Experimentul binomial

• este un experiment statistic cu urmatoarele proprietati

· experimentul consta din n incercari repetate

· la fiecare repetare nu pot aparea decat doua evenimente unul numit succes si celalalt esec

· probabilitatea unui succes, notat prin p, este aceeasi la fiecare incercare.

· probabilitatea unui esec, notata prin $q = 1 - p$, este aceeasi la fiecare incercare

· incercarile sunt independente: rezultatul uneia nu afecteaza rezultatul oricarei alte incercari

• probabilitatea binomiala este probabilitatea ca la un experiment binomial sa fie inregistrate exact k succese in n incercari

$$P = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Exemplu: se arunca o moneda de 6 ori, probabilitatea de a obtine de 4 ori pajura este

$$P = C_6^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4}$$

• probabilitatea de a obtine cel putin k succese este

$$P = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

• probabilitatea ca al k-lea succes sa fie obtinut dupa exact r incercari este

$$P = C_{r-1}^{k-1} p^k (1-p)^{r-k}, \qquad r \geq k.$$

Experimentul multinomial

• generalizeaza experimentul binomial:
· acum fiecare incercare are k rezultate posibile $E_1, E_2, \ldots, E_k$
· aceste rezultate au probabilitatile $p_1, p_2, \ldots p_k$
· cele n incercari sunt din nou independente

• probabilitatea multinomiala este probabilitatea ca E_1 sa apara de n_1 ori, E_2 sa apara de n_2 ori,… E_k sa apara de n_k ori

$$P = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

unde $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Schema Poisson

• fie $E_1, E_2, ..., E_n$ n evenimente independente ale unui experiment.

• notam prin p_i probabilitatea sa apara evenimentul E_i si prin $q_i = 1 - p_i$, $i = \overline{1,n}$ probabilitatea evenimentului complementar

• probabilitatea sa apara k evenimente dintre cele n este data de coeficientul lui X^k din expresia

$$(p_1 X + q_1) \cdot (p_2 X + q_2) \cdot ... \cdot (p_n X + q_n)$$

• poate fi interpretata ca o generalizare a experimentului binomial, in sensul ca acum succesul are o probabilitate diferita p_i, $i = \overline{1,n}$, la fiecare incercare.

Schema bilei nerevenite (hipergeometrica)

• consideram problema a n extrageri repetate dintr-o cutie ce contine N obiecte, dintre care M sunt defecte.

• daca extragerile se fac cu innlocuire (obiectul extras este pus inapoi in cutie inainte de extragerea urmatoare), atunci avem un experiment binomial cu n incercari si $p = \frac{M}{N}$ probabilitatea unui succes, daca definim succesul ca fiind extragerea unui obiect defect

• daca extragerile se fac fara inlocuire, atunci probabilitatea extragerii unui obiect defect nu mai este aceeasi in cele n extrageri

• probabilitatea de a extrage exact k obiecte defecte in cele n incercari se numeste probabilitate hipergeometrica si este data prin

$$P = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

Probleme rezolvate

Problema 1. *a) Aratati ca numarul de functii* $f : A \mapsto B$ *este dat de* $|B|^{|A|}$*, daca* A *si* B *sunt multimi finite.*
b) Aflati numarul submultimilor unei multimi A *cu* m *elemente.*

Solutie: Vom folosi aceasta problema pentru a exersa doua tehnici de numarare: regula produsului si principiul bijectiei.

a) Sa definim mai intai multimile $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ si $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Conform definitiei unei functii, $f(x_1)$ trebuie sa ia o singura valoare din multimea $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Astfel pentru valoarea lui $f(x_1)$ avem exact n posibilitati. Analog, pentru $f(x_2)$ avem n posibilitati, etc. La final se aplica regula produsului si se obtin n^m posibilitati de a defini functii de la A la B.

b) Putem afla numarul submultimilor intr-un mod mai elementar, contorizand pe rand cate submultimi cu k elemente exista, $k \le m$. Dorim insa sa aratam cum functioneaza principiul bijectiei.

Vom construi o bijectie intre multimea submultimilor lui A, de obicei notata cu $\mathcal{P}(A)$ (partile lui A) si o alta multime a carei elemente se numara mai usor. Dificultatea principiului consta in constructia functiei bijective, care va usura rezolvarea problemei de numarare.

Sa consideram multimea cuvintelor binare de lungime m

$$C = \{c_1 c_2 \ldots c_m : \ c_i \in \{0, 1\}, \text{ pentru orice } i \le m\}$$

Se observa usor ca aceasta multime are 2^m elemente, conform regulii produsului, caci fiecare litera c_i a cuvantului binar poate avea exact 2 valori.

Definim acum o bijectie $f : \mathcal{P}(A) \mapsto C$ care atribuie fiecarei submultimi S a lui A un cuvant binar de lungime m, in felul urmator

$$f(S) = c_1 c_2 \ldots c_m \quad \text{unde} \quad c_i = \begin{cases} 1, & \text{daca} \quad x_i \in S \\ 0, & \text{daca} \quad x_i \notin S \end{cases}$$

De exemplu, submultimea $S = \{x_1, x_3, x_4\}$ corespunde cuvantului binar

$$1011\,\underbrace{0.............0}_{\text{doar zerouri}}$$

Se argumenteaza usor ca aceasta functie este bijectiva si prin urmare numarul de elemente ale lui $\mathcal{P}(A)$ este egal cu numarul de elemente ale lui C, conform principiului bijectiei $\implies$ sunt 2^m submultimi.

Problema 2. *Aratati ca numarul de functii surjective* $f : A \mapsto B$*, unde* $|A| = m, |B| = n$ *este*

$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

atunci cand $m \ge n$*, altfel* $S = 0$.

Solutie: Problema propusa creaza o buna oportunitate de a face cunostinta cu cateva tehnici caracteristice teoriei probabilitatilor. Nu vom folosi cuvantul probabilitate dar vom adopta unele strategii din teoria probabilitatilor.

Dorim sa contorizam functiile surjective $f : \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \to \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Este mai simplu sa studiem functiile care nu sunt surjective, la fel cum la probabilitati vom studia uneori evenimentul complementar $\overline{E}$. Pentru inceput sa cadem de acord ca avem relatia

nr. functii surjective=nr. functii- nr. functii nesurjective

si ca numarul de functii $f : A \to B$ care pot fi definite intre doua multimi finite este $|B|^{|A|}$.

Pentru a calcula numarul de functii nesurjective, vom descompune proprietatea de a nu fi surjectiva in mai multe proprietati, in ideea aplicarii principiului incluziunii si excluziunii.

Vom nota cu F_1 multimea functiilor care rateaza valoarea y_1, cu F_2 multimea functiilor care rateaza valoarea y_2, si asa mai departe cu F_n multimea functiilor care rateaza valoarea y_n. Surpriza consta in faptul ca $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ va contine toate functiile nesurjective, caci aceste functii rateaza cel putin o valoare y_i, $i = \overline{1, n}$. Numarul functiilor nesurjective va fi

$$|F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n| = \sum_{i=1}^{n} |F_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |F_i \cap F_j| + \ldots$$

$$+(-1)^{p-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n} |F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_p}| + \ldots + (-1)^{n-1} |F_1 \cap F_2 \cap \ldots F_n|.$$

Pentru a calcula aceasta suma, trebuie sa evaluam pe rand termenii sai. Pentru inceput $|F_i|$ este numarul functiilor care rateaza valoarea y_i. Aceste functii sunt functii definite pe multimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ si cu valori in multimea $\{y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\}$. Conform celor discutate mai sus, se pot construi $(n-1)^m$ astfel de functii.

In mod asemanator $|F_i \cap F_j|$ este numarul functiilor care rateaza valorile y_i si y_j, adica functii definite pe o multime cu m elemente si cu valori intr-o multime cu $n-2$ element $\implies$ $|F_i \cap F_j| = (n-2)^m$. Rationamentul continua pentru fiecare grup de termeni in parte. E important sa remarcam faptul ca atunci cand construim functii din $F_i \cap F_j$ nu ne intereseaza daca acestea rateaza si alte valori din multimea $\{y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots y_n\}$ ci doar faptul ca y_i si y_j nu se afla in $Im\ f$. La fel gandim si in cazul celorlalti termeni. Ca formula generala, grupul

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n} |F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_p}|$$

va contine C_n^p termeni si toti au valoarea $(n-p)^m$. Prin urmare

$$|F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n| = C_n^1 (n-1)^m - C_n^2 (n-2)^m + \ldots + (-1)^{p-1} C_n^p (n-p)^m + \ldots + (-1)^{n-1} (n-n)^m$$

si numarul de functii surjective va fi

$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Remarca:

Putem sa privim problema aflarii functiilor surjective dintr-o alta perspectiva. Vom vizualiza o functie surjectiva ca pe o partitie a multimii $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ in n submultimi in felul urmator: in fiecare submultime A_i se afla doar elemente din A care sunt transformate in acelasi element din $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, adica $A_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}\}$ pentru care $f(x_{i_1}) = f(x_{i_2}) = ... = f(x_{i_p})$. Deoarece functia nu trebuie sa fie injectiva o astfel de submultime poate avea mai mult de un element. Asadar $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$. De remarcat faptul ca nu am precizat in ce element sunt transformate elementele din aceste submultimi. Practic aceasta partitie a lui A reprezinta o grupare a elementelor care sunt trimise in acelasi $y \in B$.

Spre exemplu, functia surjectiva $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2\}$ definita prin $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$ corespunde partitiei $\{1, 3\} \cup \{2, 4\}$ a lui A.

Numarul partitiilor unei multimi cu m elemente in n submultimi este dat de numarul Stirling de speta a doua $S(m, n)$. Trebuie insa remarcat ca fiecarei partitii in n submultimi ii corespund $n!$ functii surjective distincte, deoarece atunci cand am construit o partitie nu am fixat valoarea y in care este trimis fiecare x dintr-o astfel de submultime. Putem aranja aceste valori in $n!$ moduri.

$$S = n! \cdot S(m, n)$$

Problema 3. *Un muncitor a lucrat n piese. Sa notăm cu A_i, $i = \overline{1, n}$ evenimentul care constă în faptul că cea de a i-a piesă lucrată este defectă. Să se descrie matematic folosind limbajul teoriei multimilor următoarele evenimente:*
a) Niciuna dintre piesele lucrate nu este defectă,
b) Cel puţin una dintre piesele lucrate este defectă,
c) Numai una dintre piesele lucrate este defectă,
d) Exact două piese sunt defecte,
e) Cel puţin două piese nu sunt defecte,
f) Cel mult două piese sunt defecte.

Solutie: Fie A_i evenimentul ca cea de a i-a piesă sa fie defectă, atunci evenimentul complementar $\overline{A_i}$ inseamna a i-a piesa lucrata este bună. Toate evenimentele descrise mai sus pot fi descompuse in functie de aceste evenimente, pe care am putea sa le numim evenimente elementare.

a) Niciuna dintre piesele lucrate nu este defectă

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \overline{A_n}$$

b) Cel puţin una dintre piesele lucrate este defectă

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

c) Numai una dintre piesele lucrate este defectă

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap...\cap\overline{A_{i-1}}\cap A_i\cap\overline{A_{i+1}}\cap...\cap\overline{A_n}\right)$$

d) Exact două piese sunt defecte

$$\bigcup_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap...\cap\overline{A_{i-1}}\cap A_i\cap\overline{A_{i+1}}\cap...\cap\overline{A_{j-1}}\cap A_j\cap\overline{A_{j+1}}\cap...\cap\overline{A_n}\right)$$

e) Evenimentul ”Cel puţin două piese nu sunt defecte” este complementar evenimentului ”Cel mult o piesă nu este defectă”

$$\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cup\left[\bigcup_{i=1}^{n}A_1\cap A_2\cap...A_{i-1}\cap\overline{A_i}\cap A_{i+1}\cap...\cap A_n\right]}$$

f) Cel mult două piese sunt defecte

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)\cup\left[\bigcup_{i=1}^{n}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap...\cap\overline{A_{i-1}}\cap A_i\cap\overline{A_{i+1}}\cap...\cap\overline{A_n}\right)\right]$$

$$\cup\left[\bigcup_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap...\cap\overline{A_{i-1}}\cap A_i\cap\overline{A_{i+1}}\cap...\cap\overline{A_{j-1}}\cap A_j\cap\overline{A_{j+1}}\cap...\cap\overline{A_n}\right)\right]$$

Problema 4. *Dintre studenţii prezenti la un curs de MS se alege la intâmplare unul. Să notăm urmatoarele evenimente*
A - studentul ales este băiat,
B - studentul ales este nefumător,
C - studentul ales locuieşte în cămin.
Se cer următoarele:
a) Să se descrie evenimentul $A\cap B\cap\overline{C}$,
b) În ce condiţii are loc identitatea $A\cap B\cap C=A$?
c) Când este adevarată relaţia $\overline{C}\subseteq B$?
d) Când va putea avea loc egalitatea $\overline{A}=B$?

Solutie: a) Evenimentul are loc daca a fost ales un băiat care nu fumează şi care nu locuieşte în cămin.

b) Când toţi băieţii locuiesc în cămin şi nici unul nu fumează.

c) Când toţi studenţii care nu stau în cămin sunt nefumători.

d) Are loc dacă nicio fată nu fumeaza şi în acelaşi timp toti baieţii fumează.

Problema 5. *Într-o societate compusă din n perechi (soţ şi soţie) se dansează (se presupune că formarea perechilor de dans este egal probabilă). Care este probabilitatea ca la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu soţia sa ? Să se calculeze limita acestei probabilităţi când $n\to\infty$.*

Soluţie: Definim "evenimentele elementare":
E_1: primul barbat danseaza cu sotia in acel moment
E_2: al doilea barbat danseaza cu sotia in acel moment
. . . .
E_n: al n-lea barbat danseaza cu sotia in acel moment
Se arata usor ca

$$P\left(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_p}\right) = \frac{(n-p)!}{n!}$$

deoarece dacă s-au format p perechi soţ-soţie, atunci celelalte $(n-p)$ perechi "barbat-femeie" se pot forma în $(n-p)!$ moduri.

Evenimentul E cerut: "Fiecare barbat sa nu danseze cu sotia sa" se compune folosind aceste evenimente elementare in felul urmator

$$E = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \overline{E}_n$$

Prin urmare forma complementara a teoremei lui Poincaré ne furnizeaza

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \bar{E}_k\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(E_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(E_i \cap E_j) + \ldots$$

$$+(-1)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_p}) + \ldots + (-1)^n P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots E_n).$$

$$\begin{aligned} P(E) &= 1 - C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} + C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} - ... + (-1)^n C_n^n \frac{(n-n)!}{n!} \\ &= 1 - \frac{n!}{1!\,(n-1)!} \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \frac{(n-2)!}{n!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\lim_{n \to \infty} P(E) = \frac{1}{e}.$$

deoarece am tinut cont de dezvoltarea Maclaurin a lui e^{-x}

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Problema 6. *Intr-o urma sunt 3 bile albastre si 7 bile rosii. Se extrag trei bile fara a fi repuse in urna. Care este probabilitatea ca bilele extrase sa fie de culoare albastra, rosie, rosie, in aceasta ordine ?*

Solutie: Problema enuntata mai sus este elementara. Rolul ei este sa atraga atentia asupra modului in care "manevram" evenimentele dependente. Definim evenimentele

E_1 am extras o bila albastra la prima extragere
E_2 am extras o bila rosie la a doua extragere
E_3 am extras o bila rosie la a treia extragere

Daca bilele are fi repuse in urna atunci toate cele trei evenimente ar fi independente si conform formulei inmultirii am obtine

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{3}{10}\frac{7}{10}\frac{7}{10}$$

Insa, deoarece bilele nu sunt repuse, aparitia evenimentului E_1 afecteaza probabilitatea evenimentului E_2, apoi aparitia lui E_1 si E_2 afecteaza sansa lui E_3. Cand evenimentele sunt dependente formula inmultirii este

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_1 \cap E_2)$$

Pentru inceput $P(E_1) = \frac{3}{10}$ insa factorul $P(E_2|E_1)$ se traduce prin:

Probabilitatea lui E_2 daca E_1 a aparut.

Asadar, stim ca E_1 a aparut la prima extragere (a fost extrasa o bila albastra). In acest moment in urna au mai ramas 2 bile albastre si 7 bile rosii
$\Longrightarrow P(E_2|E_1) = \frac{7}{9}$.

Probabilitatea sa apara o bila rosie la prima extragere este $\frac{7}{10}$. Un **paradox al teoriei probabilitatilor** se manifesta in felul urmator: daca nu stim ce bila a fost extrasa la prima extragere, probabilitatea de a extrage o bila rosie, la a doua extragere, ramane $\frac{7}{10}$!

Argumentarea se face folosind **formula probabilitatii totale**. Bila rosie poate aparea la a doua extragere in doua ipoteze:

H_1: la prima extragere a iesit o bila albastra

H_2: la prima extragere a iesit o bila rosie

Prin urmare $P(E_2) = P(H_1)P(E_2|H_1) + P(H_2)P(E_2|H_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10}\frac{6}{9} = \frac{7}{10}$

Sa revenim la problema si sa observam ca $P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{6}{8}$ caci deja au fost extrase o bila albastra si una rosie. In final se obtine

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8}$$

Remarca:

In practica este foarte important sa stabilesti dependenta sau independenta unor evenimente, intrucat evaluarea corecta a sansei depinde de aceasta. Una dintre erorile des intalnite in teoria jocurilor poarta numele de eroare Monte Carlo. Jucatorii de ruleta care pariaza pe rosu, pentru ca ultimele sapte numere au fost negre, folosesc aceeasi logica gresita. Probabilitatea de a se opri pe rosu este aceeasi indiferent de cate ori a iesit negru ! Evenimentele sunt independente !

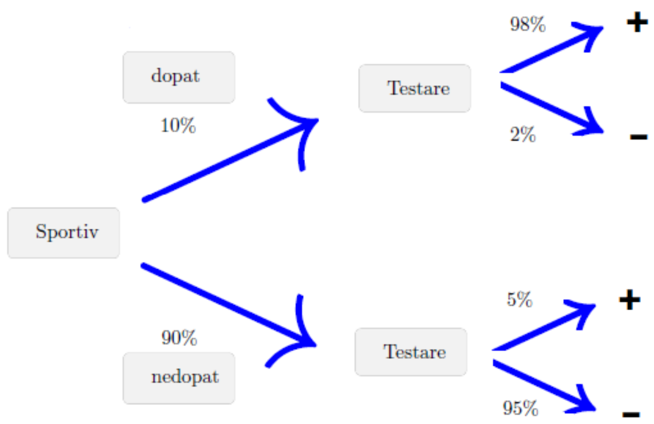
"Mintea are iluziile ei, ca si simtul vazului"

Pierre Simon Laplace

Problema 7. *Un test anti-doping pentru o substanta interzisa sportivilor are o acuratete de 98%, in cazul in care cel testat a utilizat respectiva substanta (adica produce rezultate pozitive in 98% dintre cazuri). Acelasi test are o acuratete de 95%, in cazul celor care nu au utilizat substanta interzisa (adica returneaza rezultate negative la 95% dintre acestia). Este estimat ca 10% dintre sportivi folosesc substanta interzisa.*
Un test administrat unui sportiv a iesit pozitiv. Care este probabilitatea ca acesta sa se fi dopat ? Care este probabilitatea ca testul administrat unui sportiv oarecare sa iasa negativ ?

Solutie: Aceasta problema evidentiaza o situatie reala foarte frecventa: chiar si cei care nu se dopeaza pot sa iasa pozitiv la testele anti-doping. Din aceasta cauza se recolteaza si investigheaza si o asa-zisa proba B si abia apoi sportivul testat este incriminat sau dezincriminat.

Intotdeauna cand avem de-a face cu probabilitati conditionate este o idee buna sa reprezentam grafic problema, sub forma unui arbore de decizie



Definim doua ipoteze, care vor forma un sistem complet
H_1: sportivul este dopat
H_2: sportivul nu este dopat
Observam ca evenimentele
$+$: testul a iesit pozitiv la testarea anti-doping
$-$: testul a iesit negativ la testarea anti-doping
pot aparea in oricare dintre cele doua ipoteze.

Prima intrebare se traduce matematic prin $P(H_1|+) = ?$, prin urmare avem de estimat probabilitatea unei ipoteze in conditiile in care un anumit eveniment a avut loc. Aceasta estimare se face cu formula lui Bayes

$$P(H_1|+) = \frac{P(H_1) \cdot P(+|H_1)}{P(+)}$$

iar $P(+) = P(H_1) \cdot P(+|H_1) + P(H_2) \cdot P(+|H_2)$ conform formulei probabilitatii totale, deoarece testul poate iesi pozitiv in ambele ipoteze(dopat-nedopat). Urmarind cu atentie arborele de decizie desenat mai sus

$$P(+) = 10\% \cdot 98\% + 90\% \cdot 5\% = 14,3\%$$

apoi

$$P(H_1|+) = \frac{10\% \cdot 98\%}{14,3\%} \approx 68\%$$

Din cauza ca probabilitatea nu este suficient de mare se va apela si la proba B. A doua intrebare a problemei se traduce prin $P(-) = ?$ si din nou formula probabilitatii totale livreaza

$$P(-) = P(H_1) \cdot P(-|H_1) + P(H_2) \cdot P(-|H_2) = 10\% \cdot 2\% + 90\% \cdot 95\% \approx 86\%$$

Problema 8. *Patru premii diferite pot fi castigate cumparand cutii de cereale pentru micul dejun. Fiecare cutie contine un premiu. Unul dintre premii este un bilet la gradina zoologica a orasului. Sa presupunem ca o familie avand patru membri intentioneaza sa cumpere cereale pana cand vor castiga patru bilete la gradina zoologica. Care este probabilitatea ca familia sa trebuiasca sa cumpere* 10 *cutii pentru a castiga cele patru bilete? Dar probabilitatea sa trebuiasca sa cumpere* 16 *cutii pentru a le castiga?*

Soluţie: Trebuie sa remarcam faptul ca avem de-a face cu un experiment binomial. La fiecare incercare poti sa castigi un bilet la zoo (succesul) cu probabilitatea $p = \frac{1}{4}$ sau sa nu castigi (esecul) cu probabilitatea $q = \frac{3}{4}$. Cerinta problemei se traduce prin a afla probabilitatea ca al k-lea suscces sa fie obtinut dupa r incercari si asta se face prin formula

$$P = C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k}, \qquad r \geq k.$$

Formula nu are nimic magic, poate fi argumentata usor. Daca al k-lea succes a fost obtinut in a r-a incercare $\Longrightarrow$ in cele $r-1$ incercari precedente au fost inregistrate exact $k-1$ succese. Conform formulei probabilitatii binomiale stim ca probabilitatea de a avea $k-1$ succese in $r-1$ incercari este

$$C_{r-1}^{k-1} p^{k-1} q^{r-1-(k-1)}$$

Daca mai adaugam si evenimentul (independent de ce s-a intamplat in primele $r-1$ incercari) ca la a r-a incercare inregistram un succes, atunci probabilitatea ceruta se obtine cu formula inmultirii.

In particular, in problema noastra ne intereseaza cazurile $r = 4$ si $r = 10$ si dorim sa obtinem exact $k = 4$ succese. Se obtin pe rand probabilitatile

$$P_1 = C_{10-1}^{4-1} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^{10-4} \qquad \text{si} \qquad P_2 = C_{16-1}^{4-1} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^{16-4}$$

Problema 9. *Gasiti probabilitatea ca printre* 7 *persoane:*

a) Sa nu existe doua nascute in aceeasi zi a saptamanii

b) Cel putin doua sa fie nascute in aceeasi zi

c) Doua persoane sa fie nascute duminica si doua martea

Soluţie: a) Aflarea zilei din saptamana in care fiecare persoana s-a nascut poate fi interpretata ca fiind un experiment multinomial cu 7 incercari, la fiecare incercare avem 7 evenimente posibile(rezultate):

E_1: s-a nascut luni

E_2: s-a nascut marti

. . . .

E_7: s-a nascut duminica

Evident $P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_7) = \frac{1}{7}$. Daca dorim sa nu existe doua persoane nascute in aceeasi zi a saptamanii, inseamna ca impunen conditia ca E_1 sa apara o data, E_2 sa apara o data, $\ldots$, E_7 sa apara o data. Prin urmare probabilitatea ceruta este de fapt probabilitatea multinomiala

$$P = \frac{7!}{1! \cdot 1! \cdot \ldots \cdot 1!} \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{7!}{7^7}$$

b) Evenimentul "Cel putin doua sunt nascute in aceeasi zi" este evenimentul complementar evenimentului "Fiecare persoana este nascuta intr-o alta zi a saptamanii" deci

$$P = 1 - \frac{7!}{7^7}$$

c) Redefinim rezultatele posibile ale experimentului multinomial in felul urmator

E_1: persoana s-a nascut martea

E_2: persoana s-a nascut duminica

E_3: persoana s-a nascut intr-o zi a saptamanii diferita de ziua de marti sau duminica

$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{7}$ dar $P(E_3) = \frac{5}{7}$. Sa observam ca dorim ca E_1 sa apara de $n_1 = 2$ ori, E_2 sa apara de $n_2 = 2$ ori si E_3 sa apara de $n_3 = 3$ ori. Probabilitatea ceruta va fi probabilitatea multinomiala

$$P = \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^3$$

Problema 10. *Problema Monty Hall*

Solutie: La o evaluare rapida se pare ca sansa de castig e de 1/3 la inceput si 1/2 daca ne schimbam optiunea. Vom vedea mai jos ca intuitia reprezinta doar inceputul cunoasterii.

Conform informatiilor de la inceputul fisei, ai ales usa 1 iar gazda emisiunii a deschis usa 3. Ce ne propunem sa calculam este probabilitatea ca masina sa se afle in spatele usii 2 daca gazda a deschis usa 3.

Pentru a aborda problema folosind formule de tip Bayes va trebui sa definim ipotezele:

H_1: masina se afla in spatele usii 1

H_2: masina se afla in spatele usii 2

H_3: masina se afla in spatele usii 3

Definim si evenimentul

E : moderatorul emisiunii deschide usa 3

Prin urmare, evenimentul a carui probabilitate dorim sa o calculam este:

H_2 conditionat de aparitia lui E !!

$\implies P(H_2|E)$, probabilitatea unei ipoteze in conditiile in care evenimentul a avut loc.

Conform teoremei lui Bayes

$$P(H_2|E) = \frac{P(H_2)P(E|H_2)}{P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2) + P(H_3)P(E|H_3)}$$

Va trebui sa fim foarte atenti la semnificatia fiecarei probabilitati din formula anterioara:

$P(H_1)$: probabilitatea ca masina sa fie in spatele usii 1 $\implies P(H_1) = \frac{1}{3}$
$P(H_2)$: probabilitatea ca masina sa fie in spatele usii 2 $\implies P(H_2) = \frac{1}{3}$
$P(H_3)$: probabilitatea ca masina sa fie in spatele usii 3 $\implies P(H_3) = \frac{1}{3}$

Urmeaza probabilitatile conditionate:

$P(E|H_1)$: probabilitatea ca gazda sa deschida usa 3. daca masina este in spatele usii 1

$\implies$ atunci gazda stie ca in spatele usii 2 si 3 este o capra deci poate deschide pe oricare dintre acestea, din moment ce concurentul a ales usa 1

$\implies P(E|H_1) = \frac{1}{2}$

$P(E|H_2)$: probabilitatea ca gazda sa deschida usa 2, daca masina este in spatele usii 2

$\implies$ gazda poate acum sa deschida doar usa 3, din moment ce masina este in spatele usii 2 si concurentul a ales usa 1

$\implies P(E|H_2) = 1$

$P(E|H_3)$: probabilitatea ca gazda sa deschida usa 3, daca masina este in spatele usii 3, este evident nula $\implies P(E|H_3) = 0$

Inlocuind aceste informatii in formula se obtine:

$$P(H_2|E) = \frac{2}{3} \approx 66\%$$

Remarca:

Problema admite si alte abordari. Ceea ce merita retinut este ca estimarea de castig de 50%, facuta à l'aveugle, este gresita. Sansa de castig prin alegerea usii 2 este in realitate mult mai de mare, insusi marele matematician Pal Erdos nu a fost convins de exactitatea acestui rezultat pana in momentul in care a vazut o simulare pe calculator a problemei.

Probleme propuse

Problema 1. *Cate full houses-uri sunt posibile in poker ?*

Problema 2. *In poker, o chinta consta din cinci carti care formeaza un sir de valori aflate in ordine consecutiva. De exemplu sirurile* 4♦, 5♣, 6♣, 7♥, 8♠, *si* 10♠, *J*♥, *Q*♥, *K*♣, *A* ♣ *sunt considerate chinte dar K*♣, *Q*♦, *A*♠, 2♠, 3♣ *nu este. O situatie speciala il are asul, pentru ca se poate afla atat la finalul chintei (ca mai sus) cat si la inceput A*♥, 2♦, 3♦, 4♠, 5♦.

Cate chinte diferite sunt posibile in poker?

Problema 3. *Cate numere naturale din seria* $1, 2, 3, \ldots, 2017$ *nu sunt divizibile cu niciunul dintre numerele* $4, 5, 6$ *?*

Indicatie: Incercati sa aplicati o forma a principiului includerii si excluderii

Problema 4. *Fiind date numerele* 1, 2, 3,..., *n scrise într-o anumită ordine, care este probabilitatea ca numerele* 1 *şi* 2 *să fie consecutive?*

Problema 5. *Cate dreptunghiuri se pot forma pe o tabla de sah cu* m *linii si* n *coloane ? Incepeti cu o tabla normala de sah.*

Problema 6. *Un experiment consta in extragerea unei carti dintr-un pachet de* 52 *de carti de joc, fara a introduce inapoi cartea extrasa. Acest experiment se repeta de 10 ori. Gasiti probabilitatea de a obtine de doua ori pica* ♠, *de trei ori caro* ♦, *de trei ori trefla* ♣ *si de doua ori cupa* ♥.

Problema 7. *Popescu stie raspunsurile la una dintre cele 10 intrebari cu raspunsuri multile ale examenului de MS. El a absentat la multe dintre cursuri si va trebui sa ghiceasca raspunsurile la celelalte* 9 *intrebari. Presupunand ca fiecare intrebare are patru raspunsuri care este probabilitatea ca el sa nimereasca* 7 *raspunsuri corecte ? Fiecare raspuns valoreaza un punct si este nevoie de* 5 *puncte pentru a promova examenul. Care este probabilitatea ca Popescu sa promoveze examenul ?*

Indicatie: avem un experiment binomial

Problema 8. *Opt studenti sunt distribuiti in trei camere ale unui camin studentesc. Doua dintre acestea au 3 paturi iar una doar 2 paturi. In cate moduri pot fi distribuiti studentii in cele trei camere ?*

Problema 9. *La un moment dat, intr-o partida de table, trebuie sa dai un* 6 *sau suma numerelor sa fie* 6, *pentru a pune pulul adversarului pe bara. Care este probabilitatea sa scoti din joc pulul adversarului ? Care este probabilitatea de a lovi de cel putin doua ori in* 4 *incercari ?*

Problema 10. *In secolul al* $XVII$*-lea Cavalerul de Méré, un nobil francez pasionat de jocuri de noroc, l-a chestionat pe Blaise Pascal in legatura cu o problema. Aceasta problema, considerata de catre multi ca fiind un punct de plecare in aparitia teoriei probabilitatilor, este denumita azi problema potului:*

Doi jucatori joaca pe bani un joc constand din n *runde si in fiecare runda sansele de castig sunt egale. Jucătorii contribuie în mod egal la formarea potului și convin în avans ca primul jucător ce castiga un anumit numar de runde să incaseze miza. Presupunand că jocul este intrerupt de anumite circumstanțe externe inainte ca vreun jucator sa castige potul, intrebarea ce se pune este: Cum se va imparti potul in mod corect?*

Problema 11. *Doi prieteni decid sa se intalneasca la ora* $21:00$ *intr-un restaurant. Cel care ajunge primul va astepta cel mult 20 de minute dupa celalalt. Restaurantul se inchide la ora* $23:00$*. Care este probabilitatea ca ei sa se intalneasca ?*

Problema 12. *O persoana scrie 5 scrisori, le introduce in plicuri si apoi trece la intamplare adresele pe fiecare dintre aceste plicuri. Gasiti probabilitatea ca cel putin unul dintre plicuri sa aiba adresa scrisa corect.*

Problema 13. *In SUA* 40% *dintre votantii inregistrati sunt republicani,* 45% *sunt democrati si* 15% *sunt independenti. Cand votantii sunt intrebati despre necesitatea cresterii cheltuielilor militare* 20% *dintre republicani s-au pronuntat contra,* 65% *dintre democrati se opun si ei si la fel* 55% *dintre indepenedenti. Care este probabilitatea ca un votant ales aleator sa se fie impotriva cresterii cheltuielilor militare ?*

Problema 14. *Gasiti probabilitatea de a extrage un popa, o dama, un popa si un valet, in aceasta ordine, dintr-un pachet de* 52 *de carti, in patru extrageri consecutive. Cartile nu sunt introduse inapoi in pachet.*

Problema 15. *Un sistem telegrafic de comunicatii transmite semnalele punct* $\bullet$ *si linie* $^-$*. Sa presupunem ca proprietatile statistice ale obstacolelor sunt in asa fel incat aproximativ* 40% *dintre puncte si* 25% *dintre linii sunt schimbate. Raportul dintre numarul de puncte transmise si cel de linii este* $5:3$*. Care este probabilitatea ca un semnal primit sa fie acelasi cu un semnal transmis daca:*

a) semnalul primit este un punct.

b) semnalul primit este o linie.

Bibliografie

[1] R. Yates and D. Goodman. *Probability and Stochastic processes*, Wiley&Sons, 2005.

[2] K. Devlin. *The Unfinished Game*, Basic Books, 2008.

[3] R. Negrea. *Note de curs MS*, 2020.

[4] C. Hedrea. *Fise de seminar MS*, 2015.