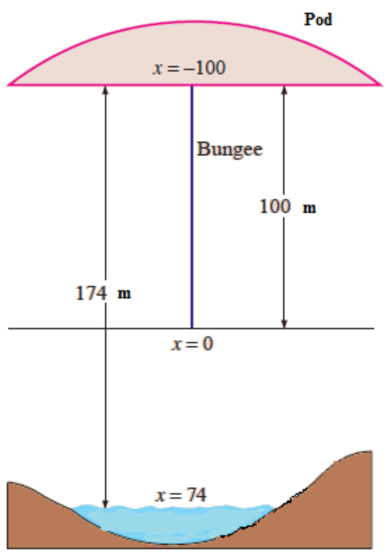
“ Exista vreo motivatie mai buna decat succesul ? ”

Ion Tiriac

5
Ecuatii liniare de ordin superior

Bungee jumping

Bungee jumping sau saritura cu coarda elastica este unul dintre cele mai spectaculoase sporturi extreme, o sfidare a gravitatiei care necesita mult curaj, experienta si rezistenta. Practicantul sare de la o inaltime de zeci de metri, fiind asigurat cu o coarda elastica, fixata de glezna.



Sa presupunem ca cel care doreste sa faca bungee jumping alege un pod aflat la o distanta de 174 m de apa. Are legata de picioare o coarda cu lungimea 100 m. Consideram pozitia pana unde ajunge coarda prinsa de pod ca fiind 0 si masuram pozitia picioarelor in timpul sariturii prin intermediul functiei $x(t)$, care este o functie de timpul t. Evident in momentul in care saritorul se afla pe pod avem $x(0) = -100$. Distanta creste atunci cand e in cadere, prin urmare viteza este pozitiva iar atunci cand e tras inapoi de coarda viteza este negativa. Se stie ca acceleratia gravitationala g este constanta. Astfel ca forta care ii impinge in jos corpul are valoarea mg.

Atunci cand sare de pe pod forta de rezistenta a aerului creste proportional cu viteza sa si reprezinta o forta de sens opus miscarii sale, de valoare βv, unde β este o constanta si v este viteza miscarii sale.

Conform legii lui Hooke referitoare la actiunea resorturilor coarda de bungee va exercita o forta asupra saritorului proportionala cu distanta parcursa dincolo de lungimea naturala a corzii. Astfel forta cu care coarda il impinge inapoi se poate exprima ca

$$b(x) = \begin{cases} 0, & \text{daca } x \le 0, \\ -kx, & \text{daca } x > 0. \end{cases}$$

Numarul k este constanta de elasticitate a corzii si reprezinta modul in care coarda influenteaza ecuatia. E nevoie de o coarda cu o constanta k suficient de mare care sa il opreasca pe cel care sare inainte de a atinge apa dar nu dintr-odata, pentru a nu-l vatama. *Prin urmare esti interesat sa afli distanta la care vei cadea, dincolo de lungimea naturala a corzii, ca functie de constanta de elasticitate a corzii.*

Pentru a afla asta trebuie sa rezolvi ecuatia diferentiala obtinuta in conformitate cu cele spuse mai sus. Forta mx'' care apasa asupra asupra corpului tau este data de

$$m \cdot x''(t) = m \cdot g + b(x(t)) - \beta \cdot x'(t)$$

Aici mg este greutatea ta iar x' este viteza ta. Constanta β a fortei de rezistenta a aerului depinde de multi factori, incluzand hainele pe care le porti. Aceasta este o ecuatie neliniara dar ascunde doua ecuatii liniare in interiorul ei.

Cand $x(t_0) < 0$, ecuatia devine

$$m \cdot x''(t) = m \cdot g - \beta \cdot x'(t)$$

si dupa punctul unde lungimea naturala a corzii se termina avem ecuatia

$$m \cdot x^{''}(t) = m \cdot g - k \cdot x(t) - \beta \cdot x'(t)$$

Remarca:

Sa stii putina matematica este periculos !! Toata modelarea matematica de mai sus este doar o aproximare a situatiei reale. De exemplu, presupunerea ca forta de rezistenta a aerului este liniara se poate aplica doar vitezelor mici. Mai mult, resorturile se pot comporta neliniar la oscilatii mari astfel ca legea lui Hooke e doar o aproximare. Nu-ti pune viata in pericol pentru o aproximare a unui tip care a trait acum 200 de ani !

Ecuatii liniare de ordin superior

Ecuatii liniare omogene cu coeficienti constanti:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Algoritm:

• scriem polinomul caracteristic

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

• aflam radacinile, reale sau complexe, ale ecuatiei caracteristice: $p(\lambda) = 0$.

• pentru orice radacina obtinem un element al sistemului fundamental de solutii, conform urmatorului tabel:

radacina	solutia generata
$\lambda = a$	e^{ax}
$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = a$	$e^{ax},\ xe^{ax},\ x^2 e^{ax} \ldots,\ x^{k-1} e^{ax}$
$\lambda = \alpha + \beta i, \quad \lambda = \alpha - \beta i$	$e^{\alpha x} \sin \beta x,\ e^{\alpha x} \cos \beta x$
$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \alpha + \beta i \\ \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \ldots = \lambda_{2k} = \alpha - \beta i \end{cases}$	$\begin{cases} e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \\ e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \end{cases}$
$\lambda = 0$	1
$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$	$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{k-1}$

- solutia generala a ecuatiei liniare omogene va fi

$$\bar{y}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x),$$

unde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt cele n solutii liniar independente ale sistemului fundamental.

Ecuatii liniare neomogene cu coeficienti constanti:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

Algoritm:

- aflam solutia generala $\bar{y}(x)$ a ecuatiei omogene atasate

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

- solutia generala a ecuatiei neomogene va fi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_p(x)$$

unde $y_p(x)$ este o solutie particulara a ecuatiei neomogene care poate fi aflata folosind metoda variatiei constantelor.

Ideea metodei:

↳ daca $\bar{y}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x)$ este o solutie generala a ecuatiei omogene atasate cautam o solutie particulara de tipul

$$y_p(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n(x) \cdot y_n(x)$$

obtinuta prin transformarea constantelor in functii care depind de x.

↳ aceste functii $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ se afla rezolvand sistemul functional liniar:

$$\begin{cases} C_1^{'}(x) \cdot y_1 + C_2^{'}(x) \cdot y_2 + \ldots + C_n^{'}(x) \cdot y_n = 0 \\ C_1^{'}(x) \cdot y_1^{'} + C_2^{'}(x) \cdot y_2^{'} + \ldots + C_n^{'}(x) \cdot y_n^{'} = 0 \\ C_1^{'}(x) \cdot y_1^{''} + C_2^{'}(x) \cdot y_2^{''} + \ldots + C_n^{'}(x) \cdot y_n^{''} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^{'}(x) \cdot y_1^{(n-2)} + C_2^{'}(x) \cdot y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n^{'}(x) \cdot y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1^{'}(x) \cdot y_1^{(n-1)} + C_2^{'}(x) \cdot y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n^{'}(x) \cdot y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

in care necunoscutele sunt derivatele acestora, iar apoi se integreaza solutiile obtinute

- sistemul de mai sus se poate rezolva folosind, spre exemplu, regula Cramer caci determinantul sau este wronskianul

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

si acesta este nenul deoarece $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sunt liniar independente.

Cazuri particulare:

• in anumite situatii speciale, daca observam un sablon in forma termenului responsabil de neomogenitate $f(x)$, putem construi direct forma unei solutii particulare

• aceasta solutie particulara va depinde de cativa coeficienti care se afla inlocuind solutia construita in ecuatia diferentiala data

↳ vezi problemele rezolvate

• aveti mai jos formele particulare ale lui $f(x)$ si structura unei solutii particulare $y_p(x)$, sugerata de aceste forme

$\boxed{1.}$ daca $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ unde P_m este un polinom de grad m si α nu este radacina a ecuatiei caracteristice, atunci:

$$y_p(x) = e^{\alpha x} Q_m(x)$$

pentru Q_m un polinom de grad m care trebuie determinat.

$\boxed{2.}$ daca $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ si α este o radacina multipla de ordin k a ecuatiei caracteristice, cautam:

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$$

$\boxed{3.}$ daca $f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m \sin \beta x]$ si $\alpha + i\beta$ nu este o radacina a ecuatiei caracteristice, cautam:

$$y_p(x) = e^{\alpha x} [R_m(x) \cos \beta x + S_m(x) \sin \beta x]$$

$\boxed{4.}$ daca $f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m \sin \beta x]$ si $\alpha + i\beta$ este o radacina multipla de ordin k a ecuatiei caracteristice, cautam:

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} [R_m(x) \cos \beta x + S_m(x) \sin \beta x]$$

Probleme rezolvate

Problema 1. *Gasiti solutiile generale ale urmatoarelor ecuatii liniare:*

a) $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0,$

b) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,$

c) $y^{iv} + 5y'' + 4y = 0.$

Solutie: **a)** Pentru ecuatia omogena $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$ scriem ecuatia caracteristica:

$$\begin{aligned} r^4 - 5r^2 + 4 &= 0 \overset{r^2=t}{\Rightarrow} t^2 - 5t + 4 = 0 \\ &\Rightarrow (t-1)(t-4) = 0 \end{aligned}$$

astfel

$$\begin{aligned} r^2 &= 1,\ r^2 = 4 \Leftrightarrow \\ r_{1,2} &= \pm 1,\ r_{3,4} = \pm 2. \end{aligned}$$

Intrucat cele patru radacini sunt reale si distincte construim solutia generala a ecuatiei de mai sus

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}.$$

b) Sa scriem ecuatia caracteristica atasata

$$\begin{aligned} r^3 - 6r^2 + 12r - 8 &= 0 \Leftrightarrow (r-2)\left(r^2 - 4r + 4\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (r-2)^3 = 0. \end{aligned}$$

Obtinem o radacina tripla care genereaza urmatoarea forma a solutiei generale, conform tabelului

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \\ &= \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^{2x}. \end{aligned}$$

c) Ecuatia caracteristica va fi

$$\begin{aligned} r^4 + 5r^2 + 4 &= 0 \overset{r^2=t}{\Rightarrow} t^2 + 5t + 4 = 0 \\ &\Rightarrow (t+1)(t+4) = 0 \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} r^2 &= -1,\ r^2 = -4 \Leftrightarrow \\ r_{1,2} &= \pm i,\ r_{3,4} = \pm 2i. \end{aligned}$$

Radacinile sunt complexe si distincte si vor genera solutia

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x.$$

Problema 2. *Gasiti formulele solutiilor generale ale urmatoarelor ecuatii liniare neomogene:*

a) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$,

b) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 2 + e^{x} + \sin x$.

Solutie: **a**) Scriem ecuatia omogena atasata acestei probleme $y''-y'-2y=0$ care va avea ca ecuatie caracteristica

$$\begin{aligned} r^2-r-2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (r-2)(r+1) &= 0 \Rightarrow r_1=2,\ r_2=-1. \end{aligned}$$

Solutia generala a ecuatiei omogene va fi

$$\overline{y}(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}.$$

E necesar sa observam ca functia $f(x)=3e^{2x}$ are $\alpha=2$ care e radacina pentru ecuatia caracteristica $(r_1=2)$, astfel suntem sfatuiti sa cautam solutii particulare de forma

$$y_p(x)=x^1\cdot e^{2x}\cdot c$$

Calculam:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= c(1+2x)e^{2x}, \\ y_p''(x) &= 4c(1+x)e^{2x}. \end{aligned}$$

si substituim in ecuatia neomogena, pentru a obtine

$$4c(1+x)e^{2x}-c(1+2x)e^{2x}-2cxe^{2x}=3e^{2x}\ |:e^{2x}\Leftrightarrow$$

$$4c(1+x)-c(1+2x)-2cx=3$$

$$\Rightarrow c=1\Rightarrow y_p(x)=xe^{2x}$$

In cele din urma putem afisa solutia generala a ecuatiei date

$$\begin{aligned} y(x) &= \overline{y}(x)+y_p(x) \\ &= c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+xe^{2x}. \end{aligned}$$

b) Ecuatia omogena $y'''+2y''-y'-2y=0$ admite ecuatia caracteristica

$$\begin{aligned} r^3+2r^2-r-2 &= 0\Leftrightarrow(r-1)(r+1)(r+2)=0 \\ &\Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1,\ r_3=-2, \end{aligned}$$

si solutia generala

$$\overline{y}(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}.$$

Pentru a afla o solutie particulara $y_p(x)$ exploram doua metode de lucru

Metoda 1: Termenul care este responsabil de neomogenitate $f(x)=2+e^x+\sin x$ trebuie vizualizat ca fiind

$$2+e^x+\sin x$$

pentru a putea utiliza cazurile particulare studiate in prima parte a acestei fise de seminar:

$$\begin{aligned} 2=2\cdot e^{0\cdot x} &\Rightarrow \alpha=0 \\ e^x=e^{1\cdot x} &\Rightarrow \alpha=1 \\ \sin x=e^{0\cdot x}\sin(1\cdot x) &\Rightarrow \alpha=0\pm1\cdot i. \end{aligned}$$

Una dintre valori ($\alpha = 1$) este si radacina a ecuatiei caracteristice, asadar solutia particulara pe care trebuie sa o cautam va fi de forma

$$y_p(x) = a + cxe^x + \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

Calculam acum:

$$y_p'(x) = ce^x + cxe^x - \alpha \sin x + \beta \cos x,$$

$$y_p''(x) = 2ce^x + cxe^x - \alpha \cos x - \beta \sin x,$$

$$y_p'''(x) = 3ce^x + cxe^x + \alpha \sin x - \beta \cos x$$

si inlocuim aceste rezultate in ecuatia neomogena pentru a obtine coeficientii:

$$a = -1 \; c = \frac{1}{6}, \; \beta = -\frac{1}{5}, \; \alpha = \frac{1}{10},$$

care conduc la solutia particulara

$$y_p(x) = -1 + \frac{1}{6}xe^x + \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x,$$

In final, solutia generala a problemei este

$$\begin{aligned} y(x) &= \overline{y}(x) + y_p(x) = \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} - 1 + \frac{1}{6}xe^x + \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x. \end{aligned}$$

Metoda 2: Vom folosi metoda variatiei constantelor, care reprezinta abordarea generala si va da rezultate atunci cand prima metoda nu functioneaza

Solutia generala a ecuatiei omogene

$$\overline{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

impune cautarea unei solutii particulare de forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{-x} + c_3(x) e^{-2x}$$

care inlocuita in ecuatia initiala va da sistemul

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x) \cdot e^{-x} + c_3'(x) \cdot e^{-2x} = 0 \\ c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x) \cdot (-e^{-x}) + c_3'(x) \cdot (-2e^{-2x}) = 0 \\ c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x) \cdot e^{-x} + c_3'(x) \cdot 4e^{-2x} = 2 + e^x + \sin x \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este wronskianul

$$\Delta = W(e^x, e^{-x}, e^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & -2e^{-2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = -6e^{-2x} \neq 0$$

iar ceilalti determinanti dati prin regula Cramer sunt

$$\Delta_{c_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & e^{-2x} \\ 0 & -e^{-x} & -2e^{-2x} \\ 2+e^x+\sin x & e^{-x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}(2+e^x+\sin x)$$

deci

$$c_1'(x) = \frac{-e^{-3x}(2+e^x+\sin x)}{-6e^{-2x}} = \frac{1}{6}(2e^{-x}+1+e^{-x}\sin x)$$

iar apoi prin integrare se obtine $c_1(x)$. Se poate observa ca dificultatea tehnica a acestei metode apare de obicei in momentul integrarii, necesare la ultimul pas.

$$\Delta_{c_2'(x)} = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{-2x} \\ e^x & 0 & -2e^{-2x} \\ e^x & 2+e^x+\sin x & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = -3e^{-x}(2+e^x+\sin x)$$

si

$$c_2'(x) = \frac{-3e^{-x}(2+e^x+\sin x)}{-6e^{-2x}} = \frac{1}{2}(2e^x+e^{2x}+e^x\sin x)$$

$$\Delta_{c_3'(x)} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 0 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & 2+e^x+\sin x \end{vmatrix} = -2(2+e^x+\sin x)$$

si

$$c_3'(x) = \frac{-2(2+e^x+\sin x)}{-6e^{-2x}} = \frac{1}{3}(2e^{2x}+e^{3x}+e^{2x}\sin x)$$

Apoi se determina $c_2(x), c_3(x)$ pentru ca in final sa se obtina forma lui $y_p(x)$ conform metodei variatiei constantelor.

Problema 3. *Rezolvati ecuatia Cauchy:*

$$\begin{cases} y^{(iv)} - y = x^3 + x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases}$$

Solutie: Ecuatia caracteristica este:

$$r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(r^2-1\right)\left(r^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r+1)(r-i)(r+i) = 0$$

deci:

$$r_1 = 1,\ r_2 = -1,\ r_3 = i,\ r_4 = -i$$

vor genera solutia:

$$\overline{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Pentru functia $f(x) = x^3 + x = e^{0\cdot x}\left(x^3 + x\right)$ evident $\alpha = 0$ nu este o radacina a ecuatiei caracteristice, prin urmare

$$y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Incepem sa calculam:

$$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$

$$y_p''(x) = 6ax + 2b,\ y_p'''(x) = 6a,\ y^{iv}(x) = 0.$$

pentru a le substitui in ecuatia neomeogena si a obtine:

$$a = -1,\ b = 0,\ c = -1,\ d = 0$$

deci solutia particulara este

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -1\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - 1\cdot x + 0 \\ &= -x^3 - x. \end{aligned}$$

iar solutia generala e

$$\begin{aligned} y(x) &= \overline{y}(x) + y_p(x) = \\ &= c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x - x^3 - x. \end{aligned}$$

Pentru a rezolva problema Cauchy trebuie sa folosim conditiile initiale pentru a identifica constantele c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3,$$

$$y'(x) = c_1e^x - c_2e^{-x} - c_3\sin x + c_4\cos x - 3x^2 - 1 \Rightarrow y'(0) = c_1 - c_2 + c_4 - 1,$$

$$y''(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\sin x - 6x \Rightarrow y''(0) = c_1 + c_2 - c_3,$$

$$y'''(x) = c_1e^x - c_2e^{-x} + c_3\sin x - c_4\cos x - 6 \Rightarrow y'''(0) = c_1 - c_2 - c_4 - 6.$$

Folosind

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$$

se obtine

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_4 = 1 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 - c_4 = 6 \end{cases}$$

cu solutia

$$c_1 = \frac{7}{4},\ c_2 = -\frac{7}{4},\ c_3 = 0,\ c_4 = -\frac{5}{2}.$$

In concluzie, ecuatia Cauchy are solutia:

$$y(x) = \frac{7}{4}e^x - \frac{7}{4}e^{-x} - \frac{5}{2}\sin x - x^3 - x,$$

sau echivalent:

$$y(x) = \frac{7}{2}\cosh x - \frac{5}{2}\sin x - x^3 - x.$$

Probleme propuse

Problema 1. *Aflati solutiile generale ale urmatoarelor ecuatii liniare:*

a) $64y^{(8)} + 48y^{(6)} + 12y^{(4)} + y^{(2)} = 0,$

b) $y^{iv} - 3y''' + 5y'' - 3y' + 4y = 0.$

Problema 2. *Aflati solutiile generale ale urmatoarelor ecuatii liniare neomogene cu coeficienti constanti:*

a) $y'' - 4y' + 4y = 1 + e^x + e^{2x},$

b) $y'' - y = xe^x \sin x,$

c) $y^{iv} - 4y'' = 1,$

d) $y''' - y'' = x.$

f) $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x$

g) $y'' - 4y = e^{2x}(11 \cos x - 7 \sin x)$

h) $y'' - 2y'' = e^x((4 - 4x) \cos x - (6x + 2) \sin x)$

i) $y''' - y'' + y' - y = \cos x$

j) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$

k) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$

Bibliografie

[1] Dennis. G. Zill. A First Course in Differential Equations with Modeling Applications, *Brooks/Cole*, 2013.

[2] Octavian Lipovan. Matematici speciale: Ecuatii diferentiale si teoria campurilor, *Editura Politehnica*, 2007.

[3] R Negrea. Curs Matematici speciale, 2020.

[4] C Hedrea. Notite seminar, 2020.