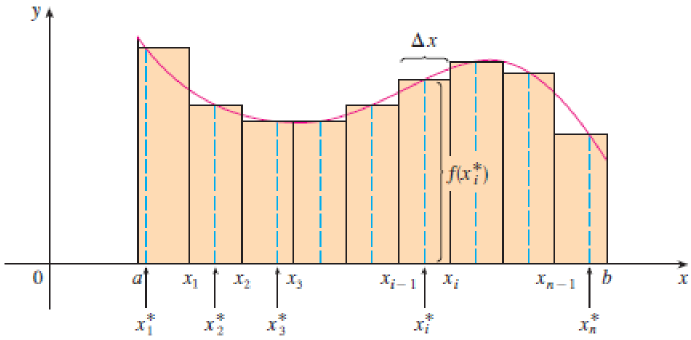
"In der Mathematik versteht man die Dinge nicht. Man gewöhnt sich nur an sie."

John von Neumann

4 Das Doppelintegral

Flächen, Volumen, Integrale

Ob f für $a \leq x \leq b$ definiert ist, zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit der selben Länge $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ und wählen wir Zwischenpunkte x_i^* in dieser Teilintervalle. Im Fall $f \geq 0$ die Riemann-Summe $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$ ist die Summe der Flächeninhalte der orangen Rechtecke:



Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ gibt den Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen a und b an.

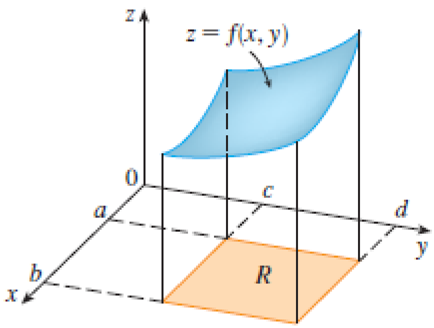
Man sieht leicht an, dass:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Ähnlich wie im obigen eindimensionalen Fall definieren wir das Doppelintegral für eine Funktion f mit zwei Variablen. Sei f auf dem Rechteck:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

der xOy-Ebene definiert und nicht negativ. Sei S der Körper zwischen R und dem Graph $z = f(x, y)$ der Funktion f :



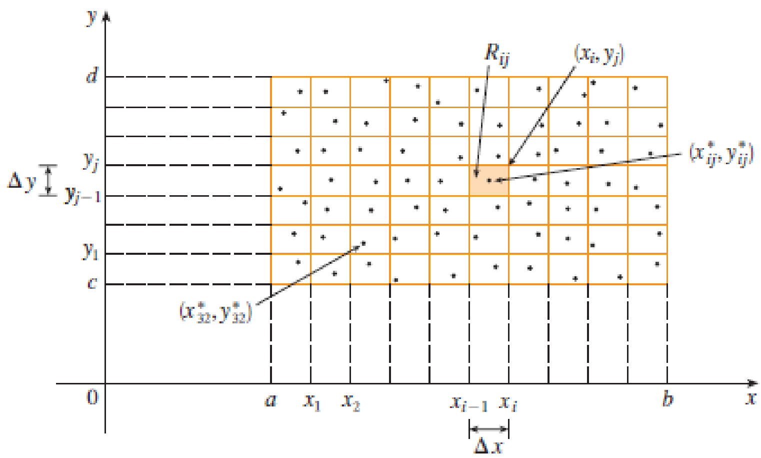
d.h.:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le f(x, y)\}.$$

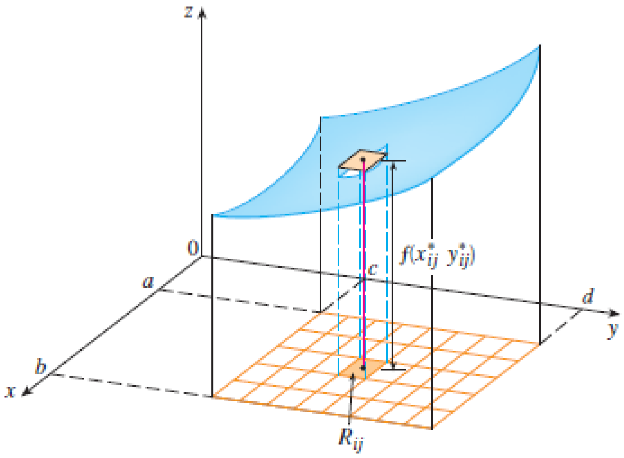
Wir zerlegen R durch achsenparallele Strecken in Teilrechtecke:

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) : x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\},$$

jeder mit dem selben Flächeninhalt $\Delta A = \Delta x \Delta y$.



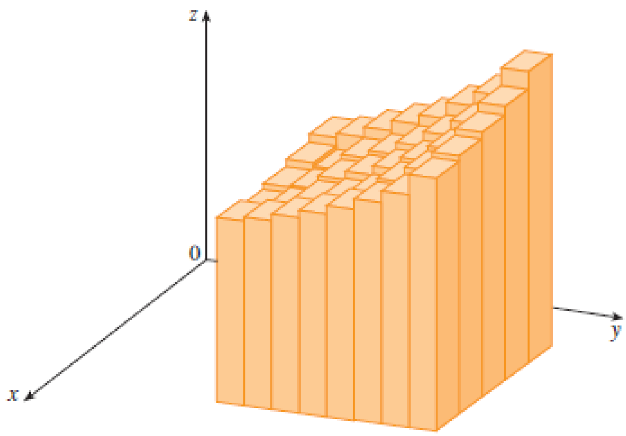
In jedem R_{ij} wählen wir einen beliebigen Zwischenpunkt (x_{ij}^*, y_{ij}^*), dann ist $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A$ das Volumen des Quaders mit Grundfläche R_{ij} und Höhe $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.



Die Riemann-Summe:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A$$

werden wir als eine Abschätzung des Volumens von S ansehen:



Unsere Intuition sagt uns: erhöht man m und n, so die Abschätzung immer besser wird.

Definition: *Das Doppelintegral*
Wir definieren das Doppelintegral einer Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ durch:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A$$

ob dieser Grenzwert existiert.

Bemerkungen:

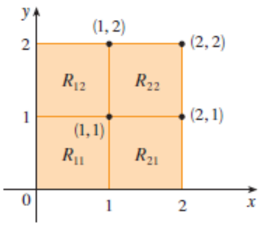
- Das mathematische Objekt dA heisst das Flächenelement.

Beispiel:

Wir schätzen das Volumen des Körpers, der zwischen dem Rechteck $R = [0,2] \times [0,2]$ und dem elliptischen Paraboloid $z = 16 - x^2 - 2y^2$ liegt. Wir spalten R in vier Teilrechtecke und wählen wir die Zwischenpunkte oben rechts in der Ecke in jedem R_{ij} aus. Also gilt:

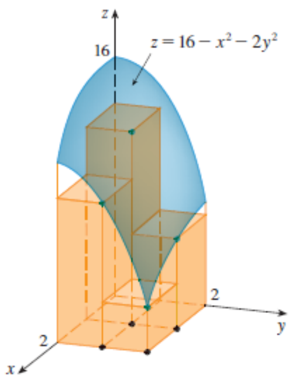
$$(x_{11}^*, y_{11}^*) = (1,1) \quad (x_{21}^*, y_{21}^*) = (2,1) \quad (x_{12}^*, y_{12}^*) = (1,2) \quad (x_{22}^*, y_{22}^*) = (2,2)$$

Das Paraboloid ist der Graph von $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ und der Flächeninhalt jedes Quadrats ist $\Delta A = 1$.

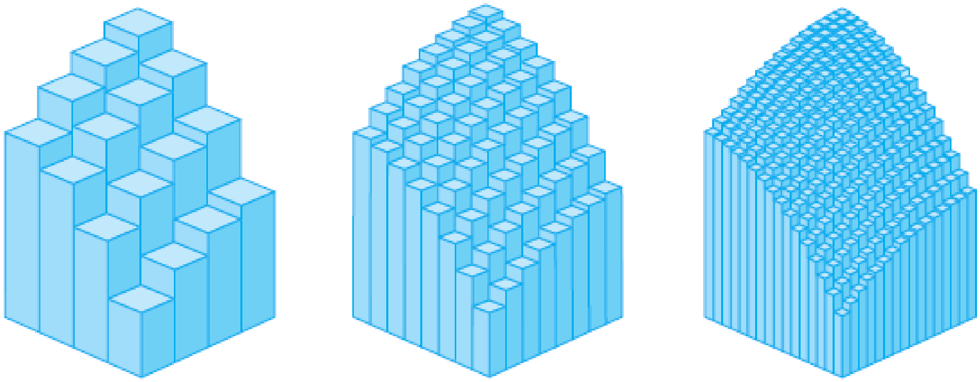


Nun schätzen wir das Volumen durch die Riemann-Summe mit $m = 2, n = 2$ ab:

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \\ &= f(1,1)\Delta A + f(1,2)\Delta A + f(2,1)\Delta A + f(2,2)\Delta A \\ &= 13 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ &= 34 \end{aligned}$$



Bessere Näherungen werden für grössere Werte von m, n erhalten:



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

$\square$

Grundeigenschaften von Doppelintegralen:

(i) das Doppelintegral ist eine lineare Abbildung:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \alpha f + \beta g \; dA = \alpha \cdot \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f \; dA + \beta \cdot \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} g \; dA$$

(ii)

$$\iint\limits_{D} 1 \; dA = \mathcal{A}(D), \quad D \in \mathbb{R}^2 \text{ beschränkt },$$

wobei $\mathcal{A}(D)$ der Flächeninhalt von D ist .

(iii) für $f \le g$ gilt:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f \; dA \le \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} g \; dA.$$

Wie berechnet man ein Doppelintegral ? "Triple is funny, Double makes the money" sagen die Dartsspieler. Umschreibend sage ich mal:

"Die Definition is funny aber Fubini makes the money"

Satz von Fubini:
Sei f stetig auf dem Rechteck $R = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$, dann gilt:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$$

Folgerungen:

Für eine Funktion mit getrennten Variablen $f(x,y) = f(x)g(y)$ gilt:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dA = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

Beispiel:

Um das genaue Volumen des letzten Beispiels zu berechnen, verwenden wir den Satz von Fubini:

$$V = \iint_{[0,2]\times[0,2]} 16 - x^2 - 2y^2 dA = \int_0^2 \int_0^2 16 - x^2 - 2y^2 dxdy$$

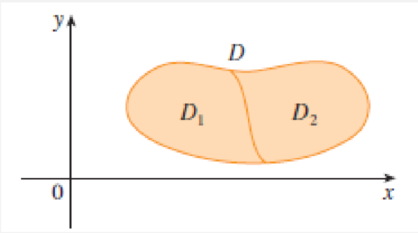
$$\overset{Fubini}{=} \int_0^2 \left(\int_0^2 16 - x^2 - 2y^2 \, dx \right) dy = \int_0^2 \left(16x - \frac{x^3}{3} - 2xy^2 \right) \Bigg|_0^2 dy$$

$$= \int_0^2 \frac{88}{3} - 4y^2 dy = \left(\frac{88}{3} y - 4\frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 = 48$$

$\square$

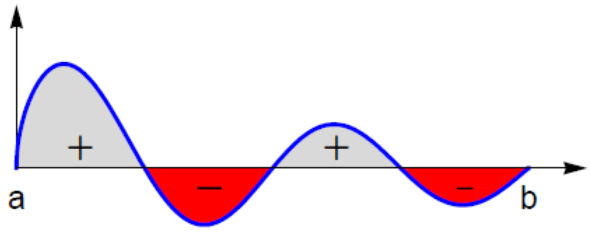
Additivität des Doppelintegrals:
Man kann den Integrationsbereich D in kleinere, nicht überlappende bereiche D_1, D_2 aufteilen. Da f auf D stetig ist, ist f auch auf allen D_1, D_2 stetig. Es ist dann:

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$



? Nicht-positive Integranden

- Was bedeutet $\int_a^b f(x)dx$ wenn f nicht positiv ist ?



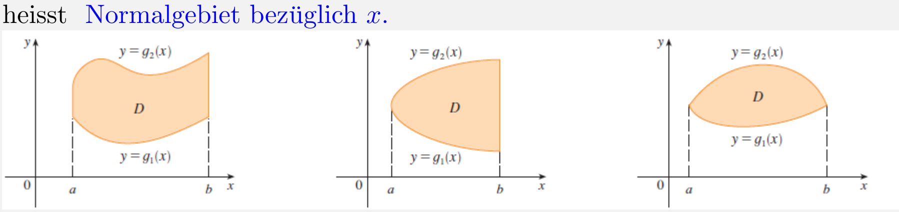
Antwort: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx =$ graue Fläche − rote Fläche.

Gibt es dieselbe Situation für Doppelintegrale und Volumen.

Schlichte Gebiete:
Das Gebiet definiert durch: .

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

heisst Normalgebiet bezüglich x.



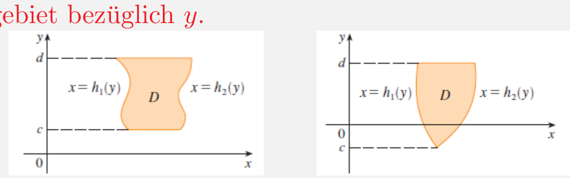
Ist f stetig auf D, dann:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

Das Gebiet definiert durch:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

heisst Normalgebiet bezüglich y.

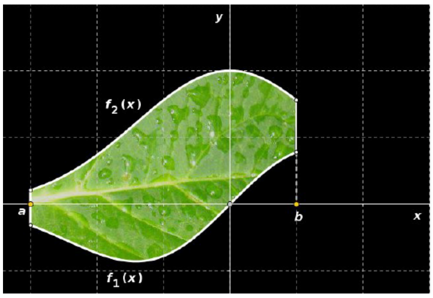


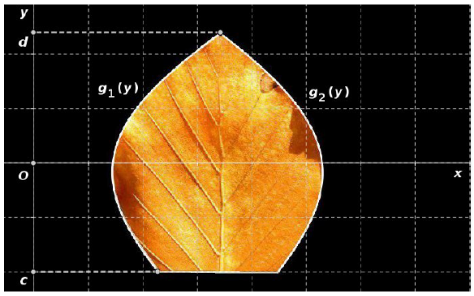
Ist f stetig auf D, dann:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy$$

Beispiel:

Normalgebiete in Natur:





□

Bemerkungen:

Im Allgemeinen: eine Verallgemeinerung der Normalgebiete sind die regulären Menge $D \subset \mathbb{R}^2$:

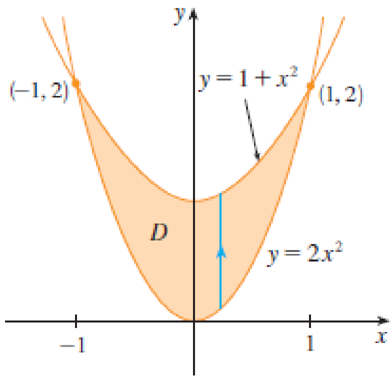
- die Menge D ist selbst abgeschlossen und beschränkt
- ihr Inneres $int(D)$ nicht leer ist
- ihr Rand aus endlich vielen stückweise glatten Kurven besteht.

Beispiel:

Wir werten das folgende Integral aus

$$\iint_D (x + 2y) dA.$$

Hier ist D das Gebiet, das von den Parabeln $y = 2x^2$ und $y = 1 + x^2$ begrenzt wird.



Die Schnittpunkte der Parabeln sind die Punkte $A(-1, 2)$ und $B(1, 2)$. Das Gebiet begrenzt durch die Parablen ist ein Normalgebiet bezüglich x.

$$D = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$$

Das zieht nach sich:

$$\iint_D (x+2y) dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y) dy dx = \int_{-1}^{1} (xy+y^2)\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1+x^2)+(1+x^2)^2-x(2x^2)-(2x^2)^2]dx = \int_{-1}^{1} (-3x^4-x^3+2x^2+x+1)dx$$

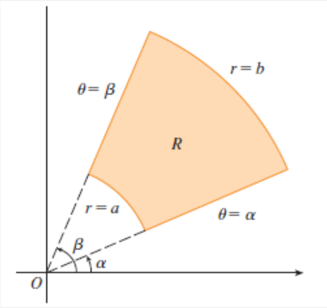
$$= \left(-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

$\square$

Das Doppelintegral in Polarkoordinaten:

Ist f stetig auf einem Polarrechteck:

$D = \{(r, \theta) : 0 \leq a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta\}$

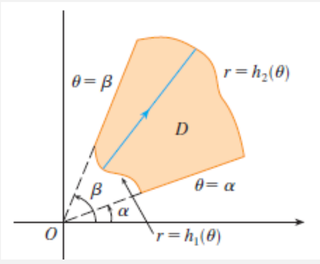


wobei $\beta - \alpha \leq 2\pi$, dann gilt:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)rd\theta dr$$

Ist f stetig auf einer Polarregion:

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$



dann gilt:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

Bemerkungen:

Der Ausdruck x^2+y^2 schreit nach Polarkoordinaten $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$, mit $r \geq 0$ und $\theta \in [0, 2\pi]$. Umgekehrt ist:

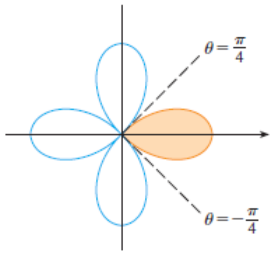
$$r = x^2+y^2, \quad \theta = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Beispiel:

Wir berechnen den Flächeninhalt des Blumenblatts, das von der Kurve:

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = x^2 - y^2$$

beigefügt wird.



In Polarkoordinaten die Gleichung der Kurve ist $r = \cos 2\theta$. Für $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$ gilt es $x^2 - y^2 = r^2\cos 2\theta$ und $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = r^3$. Das Blumenblatt ist die Polarregion:

$$D = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) = \iint_D 1 dA &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{\cos 2\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(2\theta)}{2} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\theta}{4} d\theta = \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right)\bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

$\square$

Integration durch Substitution:
Entsteht der reguläre Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$ unter der Koordinaten-transformation $x = x(u,v), y = y(u,v)$ aus B, dann gilt für jede auf D stetige Funktion f die Transformationsformel:

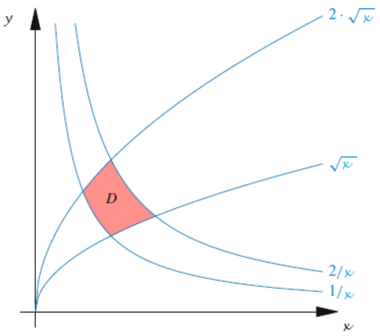
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_B f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv,$$

wobei $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$.

Beispiel:

Wir berechnen das Integral

$$\iint_D \sqrt{xy}\; dA$$



über dem folgenden Gebiet

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x, y > 0, \quad \sqrt{x} < y < 2\sqrt{x}, \quad \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x} \;\}$$

Um eine geignete Transformation zu finden betrachten wir die Bedingungen in der Definition von D genauer. Sie lassen Sich umschreiben zu:

$$1 < xy < 2 \quad \text{und} \quad 1 < \frac{y}{\sqrt{x}} < 2$$

Nun, wählen wir als neue Koordinaten aus

$$u = xy \quad \text{und} \quad v = \frac{y}{\sqrt{x}} \qquad\qquad (*)$$

sodass das neue Integrationsgebiet wird $B = [1,2] \times [1,2]$

Umgekehrt hat man dann

$$x = x(u,v) = u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \quad \mathit{und} \quad y = y(u,v) = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}},$$

weil $(*) \implies u/v = x\sqrt{x} = \sqrt{x^3}$ danach $x = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}}$ und so weiter.

Nach Definition ergibt sich

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

aber

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{5}{3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}}$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}}$$

daraus

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9} v^{-1} + \frac{2}{9} v^{-1} = \frac{2}{3v}$$

Diese Determinante is also positiv. Wir können nun die Substitutionsformel anwenden

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_B f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

ist äquivalent mit

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{xy}\, dA &= \iint_{[1,2]\times[1,2]} \sqrt{(x(u,v) y(u,v)} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \\
&= \iint_{[1,2]\times[1,2]} \sqrt{u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}} \left| \frac{2}{3v} \right| dudv \\
&\overset{Fubini}{=} \int_1^2 \left(\int_1^2 u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \frac{2}{3v} du \right) dv \\
&= \frac{2}{3} \int_1^2 \left(\int_1^2 u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} du \right) dv \\
&= \frac{2}{3} \int_1^2 v^{-\frac{2}{3}} \left(\int_1^2 u^{\frac{2}{3}} du \right) dv \\
&= \frac{2}{3} \frac{3}{5} (\sqrt[3]{32} - 1) \int_1^2 v^{-\frac{2}{3}} dv = \frac{6}{5} (\sqrt[3]{32} - 1)(\sqrt[3]{2} - 1)
\end{aligned}$$

□

Anwendungen der Doppelintegrale

Die Masse M einer Platte $B \subseteq R^2$ von variabler Dichte $\rho(x,y)$ ist gegeben durch:

$$M = \iint_B \rho(x,y)\; dxdy$$

Der Schwerpunkt $G(x_G, y_G)$ der Platte hat die Koordinaten:

$$x_G = \frac{1}{M} \iint\limits_B x \cdot \rho(x,y)\ dxdy, \qquad y_G = \frac{1}{M} \iint\limits_B y \cdot \rho(x,y)\ dxdy$$

Trägheitsmoment einer Partikel um die x-Achse:

$$I_x = \iint\limits_B x^2 \cdot \rho(x,y)\ dxdy$$

Trägheitsmoment einer Partikel um die y-Achse:

$$I_y = \iint\limits_B y^2 \cdot \rho(x,y)\ dxdy$$

Trägheitsmoment einer Partikel um den Ursprung :

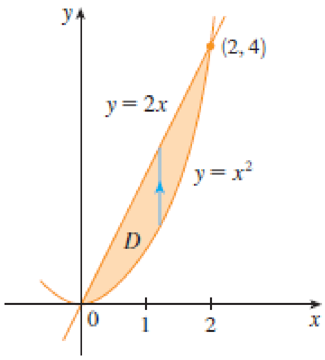
$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_B (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,y)\ dxdy$$

Übungen mit Lösungen

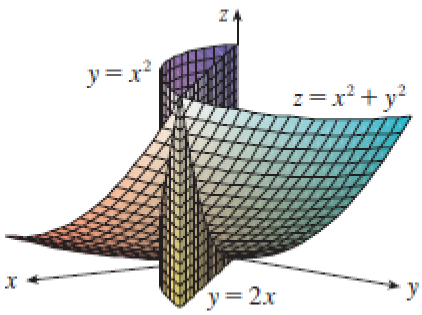
Aufgabe 1. *Sei D das Gebiet, das von der Gerade $y = 2x$ und der Parabel $y = x^2$ begrenzt wird. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unter dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und über dem Gebiet D liegt.*

Lösung: 1. Methode: Man kann D als ein Normalgebiet bezüglich x interpretieren:

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 2x \leq y \leq x^2\}$$



Das Bild zeigt den Körper, der unter dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und über dem Gebiet D liegt:

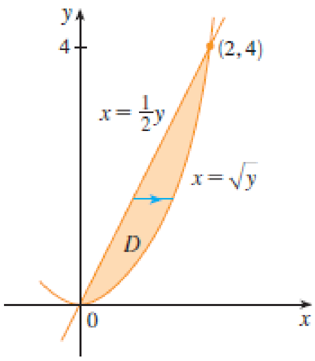


Das Volumen des Körpers ist:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2+y^2)dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dydx \\
&= \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left(x^2(2x) - x^4 + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(x^2)^3}{3} \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = \left(-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{216}{35}.
\end{aligned}
$$

2. Methode: Simultan ist D ein Normalgebiet bezüglich y :

$$D = \{(x,y) : \frac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 4\}$$



Dasselbe Volumen kann man berechnen durch:

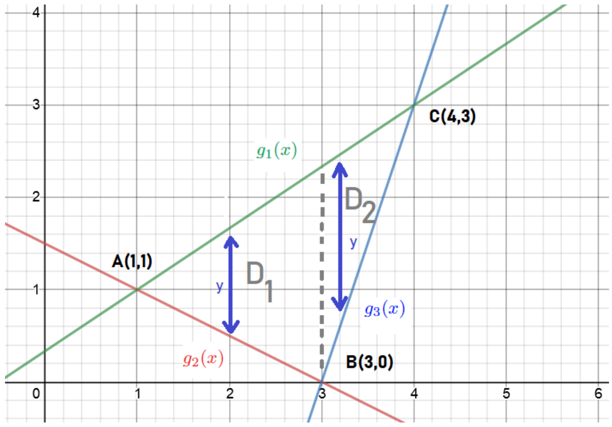
$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy$$
$$= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Bigg|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$
$$= \left(\frac{2}{15} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{13}{96} y^4 \right) \Bigg|_0^4 = \frac{216}{35}$$

Aufgabe 2. *Berechnen Sie das Integral der Funktion:*

$$f(x, y) = x + 3y$$

über dem Dreiecksbereich mit den Eckpunkten $A(1, 1)$, $B(3, 0)$, *und* $C(4, 3)$.

Lösung: Wir interpretieren ΔABC als ein Normalgebiet bezüglich y oder x. Das ist nicht möglich, weil unter es zwei verschiedene Grenzen gibt: die rote und die blaue Gerade. Dieselbe Situation am links: die grüne Gerade und die rote Gerade. Mit einer Zerlegung $D = D_1 \cup D_2$, wird D_1 ein Normalgebiet bezüglich y und D_2 ein Normalgebiet bezüglich y.



Also, schreiben wir zuerst

$$\int_D (x+3y)\ dA = \int_{D_1} (x+3y)\ dA + \int_{D_2} (x+3y)\ dA$$

Danach, um das erste Integral zu berechnen, brauchen wir die Funktion mit dem Graph AC

$$AC: \quad \frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{3-1}$$

$$AC: \quad y = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$$

also die Gerade AC ist der Graph der Funktion $g_1(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$.
Weiter, brauchen wir die Funktion mit dem Graph AB

$$AB: \quad \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{0-1}$$

$$AB: \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} = g_2(x)$$

Nun, kann man schreiben

$$D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 3, \quad -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \leq y \leq \frac{2x}{3} + \frac{1}{3} \right\}$$

und D_1 ist ein Normalgebiet bezüglich y.
Das erste Integral ergibt

$$\iint_{D_1} (x+3y)\ dA = \int_1^3 \left(\int_{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}^{\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}} (x+3y)\ dy \right) dx$$

Aber

$$\int_{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}^{\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}} (x+3y)\ dy = xy + 3\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}^{\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}}$$

$$= x\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}-\left(-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)\right)+3\left(\frac{\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}\right)^2}{2}-\frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}{2}\right)$$

$$= \dots\dots\dots = \frac{2x^2-3x+9}{72}$$

Deshalb

$$\iint_{D_1} (x+3y)\ dA = \int_1^3 \frac{2x^2-3x+9}{72}\ dx = \frac{1}{72}\left(2\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 - 3x^2\Bigg|_1^3 + 9x\Bigg|_1^3\right) = \dots$$

Für das zweite Integral braucht man die Grenzen von D_2:

$$BC: \quad \frac{x-3}{4-3} = \frac{y-0}{3-0}$$

$$BC: \quad y = 3x-9 = g_3(x)$$

und D_2 ist nun definiert als

$$D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 3\le x\le 4,\quad 3x-9\le y\le \frac{2x}{3}+\frac{1}{3}\right\}$$

Danach

$$\iint_{D_2} (x+3y)\ dA = \int_3^4 \left(\int_{3x-9}^{\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}} (x+3y)\ dy\right) dx$$

$$\int_{3x-9}^{\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}} (x+3y)\ dy = xy + 3\frac{y^2}{2}\Bigg|_{3x-9}^{\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}}$$

$$= x\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}-(3x-9)\right)+3\left(\frac{\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}\right)^2}{2}-\frac{(3x-9)^2}{2}\right)$$

$$= \dots\dots\dots = \frac{x^2-8x+1}{72}$$

Deshalb

$$\iint_{D_2} (x+3y)\ dA = \int_3^4 \frac{x^2-8x+1}{72}\ dx = \frac{1}{72}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_3^4 - 8x^2\Bigg|_3^4 + x\Bigg|_3^4\right) = \dots$$

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. *Für den Bereich* $D = \{(x, y) \ : \ 1 \leq x \leq 2, \ 1 \leq y \leq 4\}$ *berechne man folgende Doppelintegrale:*

i) $\displaystyle\iint_D x^2 y^3 \ dxdy$

ii) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x+y} \ dxdy$

iii) $\displaystyle\iint_D \ln(2x+3y) \ dxdy$

Aufgabe 2. *Berechnen Sie das Doppelintegral:*

$$\iint\limits_D xe^y dA,$$

wo das Gebiet D *durch die Kurven* $y = x$ *und* $y = x^2$ *begrenzt ist.*

Aufgabe 3. *Berechnen Sie das Doppelintegral:*

$$\iint\limits_D (x+y) dA,$$

wo der Bereich ein Quadrat mit den Eckpunkten $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ *und* $(0, -1)$ *in der* xy *Ebene liegt.*

Aufgabe 4. *Berechnen Sie das Integral der Funktion:*

$$f(x, y) = xy$$

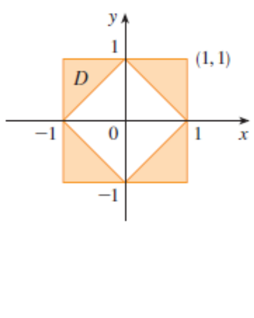
über dem Dreiecksbereich mit den Eckpunkten $A(1, 1)$, $B(4, 5)$, $C(4, 2)$.

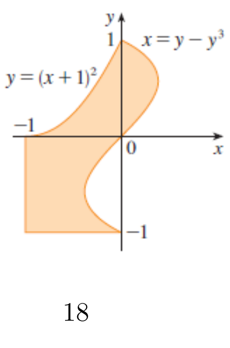
Aufgabe 5. *Berechnen Sie das Volumen des gestumpften Zylinders, dessen Basisfläche der Kreis:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

ist, und von oben durch die Ebene $z = x + y + 6$ *begrenzt ist.*

Aufgabe 6. *Schreiben Sie* D*:*





als eine Vereinigung mehrerer Normalgebiete und rechnen Sie die Integrale $\iint_D x\,dA$ *und* $\iint_D y\,dA$ *aus.*

Literaturverzeichnis

[1] J. Stewart. Calculus, *Thompson Brooks/Cole*, 2008.

[2] D. Ferus. Analysis II für Ingenieure, *Technische Universität Berlin*, 2007.

[3] C. I. Hedrea. Curs de Matematici speciale, 2016.

[4] O. Lipovan. Analiza matematica: Calcul Integral, *Editura Politehnica*, 2006.