“ *Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme verwandelt.* ”

Alfréd Rényi

3

Die Eulerschen Funktionen

Die reelle Fakultätsfunktion $x!$

Die Motivation zur Definition der Gammafunktion war es, die Fakultätsfunktion (n!) auf reelle und komplexe Argumente zu erweitern.

Definition: *Die Gammafunktion* Γ
Wir definieren die sogenannte Gammafunktion für $s > 0$ durch das folgende uneigentliche Integral:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

Bemerkung:

In der vergangenen Vorlesung haben wir die Konvergenz der Gammafunktion für $s > 0$ bewiesen.
Gibt es verschiedene andere Varianten der Funktion Γ. Zum Beispiel:

$$\Gamma(s) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx$$

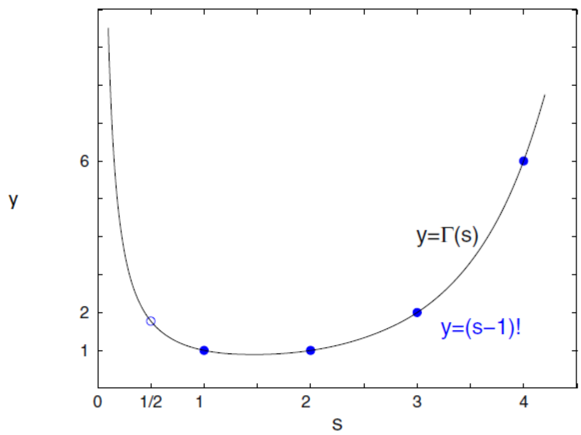
oder:

$$\Gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx-e^x} dx.$$

Carl Friedrich Gauss hat um 1820 durch die Ausweitung des Definitionsbereichs der Gammafunktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, ...\}$ folgende Formel errechnet, die Gammafunktion nach Gauss :

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdot \ldots \cdot (s+n)}$$

Die nächste Abbildung zeigt graphisch wie die Gammafunktion die Fakultät $n!$ interpoliert:



Im Folgenden präsentieren wir die wichtigsten Eigenschaften der Gammafunktion.

Legendresche Verdopplungsformel:
Für $s > 0$ gilt:

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s)$$

Die Funktionalgleichung der Gammafunktion:
Die Gammafunktion ist stetig und nullstellenfrei. Sie hat die Interpolationseigenschaft:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

und genügt die Funktionalgleichung:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Iterierte Anwendung der Funktionalgleichung liefert:

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdot \ldots \cdot (s+n)}$$

Eulerscher Ergänzungssatz:
Für jedes $0 < s < 1$ gilt es die Identität:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(s\pi)}$$

Folgerung:

Falls $s = \frac{1}{2}$, die obige Identität liefert das Resultat:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Beispiel:

Wir berechnen noch einmal das gaußsche Fehlerintegral:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Man beachte, dass:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

und nach der Substitution $x = y^2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-y^2}}{y} 2y dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = 2I$$

Die obige Eigenschaft impliziert:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 2I \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Betafunktion und die Stringtheorie:

Im Jahr 1968 arbeitet der junge Wissenschaftler Gabriele Veneziano am CERN daran die starke Kernkraft durch Auswertung von Messdaten, die bei hochenergetischen Teilchenstöße im Teilchenbeschleuniger aufgenommen worden, zu verstehen. Nach monatelanger Analyse fiel ihm auf, dass die Eulersche Betafunktion die Messergebnisse exzellent beschreiben vermochte. Doch er wusste nicht, warum die Betafunktion so hervorragend zu den Messungen passte. Jegliches tieferes physikalisches Verständnis der starken Kernkraft blieb ihm verborgen.

Zwei Jahre später erkannten Leonard Susskind und Andere, wie man die Daten im Einklang mit der Betafunktion interpretieren konnte. Sieht man die starke Kernkraft zwischen zwei Teilchen als eine Art sehr dünnes, elastisches Gummiband an, so lassen sich die Quantenprozesse, die Veneziano nicht verstand, durch die Betafunktion erklären. Die kleinen elastischen

Stränge wurden als Strings (Saiten) bezeichnet und der Grundstein zu Stringtheorie war gelegt.

Definition: *Die Betafunktion* β
Wir definieren die Betafunktion für $p, q > 0$ als:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Bemerkung:

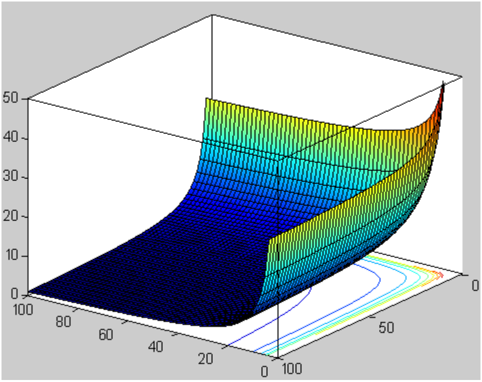
Die Betafunktion hat viele weitere Darstellungen wie:

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cdot \cos^{2q-1} x dx$$

oder:

$$\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx.$$

Der Graph der Betafunktion für pozitive p, q:



Die Funktionalgleichung der Betafunktion:
Die Betafunktion genügt die Symmetrierelation:

$$\beta(p,q) = \beta(q,p)$$

und für $p > 0, q > 1$ die folgende Funktionalgleichung gilt:

$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\beta(p,q-1)$$

Bemerkung:

Aus der Symmetrie der Betafunktion folgt:

$$\beta(p,q) = \frac{p-1}{p-1+q}\beta(p-1,q) \qquad p>1, q>0.$$

Eulerscher Ergänzungssatz für die Betafunktion:
Für jedes $0<p<1$ gilt es die Identität:

$$\beta(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

Beispiel:

Um das Integral $\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ zu berechnen, muss man beobachten:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1+t)^1}dt = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}dt$$
$$= \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Aus dem Ergänzungssatz von Euler folgt:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \beta\left(\frac{1}{2},1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$$

Darstellung der Betafunktion durch Gammafunktionen:
Das Hauptresultat der Theorie der Betafunktion ist die Identität:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q>0.$$

Beweis: Sehe [2] Korrolar 4.2.1

Folgerung:

Wenn m,n natürliche Zahlen sind, gilt die Formel

$$\beta(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

Übungen mit Lösungen

Aufgabe 1. *Berechnen Sie das Integral:*

$$I = \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx.$$

Lösung: Durch die Substitution $x^2 = t$ erhält man:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty t^2 e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{5}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) \overset{\text{Funktionalgleichung}}{=} \frac{1}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. *Berechnen Sie das Integral:*

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} dx$$

Lösung: Durch die Substitution $\sqrt{x} = t$ erhält man:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} 2t^1 dt = 2\int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= 2\beta\left(2, \frac{1}{2}\right) \overset{\text{Darstellung durch } \Gamma}{=} 2\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \\ &= 2\frac{1!\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)} \overset{\text{Funktionalgleichung}}{=} \frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

weil $\Gamma(n) = (n-1)!$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 3. *Berechnen Sie das folgende Integral:*

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x dx, \quad a, b > 0.$$

Lösung: Durch die Substitution $\sin x = t$ erhält man:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 t^{a-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{b-1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 t^{a-1}\left(1-t^2\right)^{\frac{b-1}{2}}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1}\left(1-t^2\right)^{\frac{b}{2}-1} dt \end{aligned}$$

Braucht man eine neue Substitution $y^2 = t$:

$$K = \int_0^1 y^{\frac{a-1}{2}} (1-y)^{\frac{b}{2}-1} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{a}{2}-1} (1-y)^{\frac{b}{2}-1} dy$$
$$\overset{\text{Definition } \beta}{=} \frac{1}{2} \beta \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. *Berechne den Wert der Integrale:*

$$i) \int_0^\infty x^6 e^{-x^2} dx \qquad ii) \int_0^\infty x^{1000} e^{-x^2} dx \qquad iii) \int_0^\infty \frac{dx}{e^{100x^2}}$$

Aufgabe 2. *Berechnen Sie die Integrale:*

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{61} x \cos^{43} x dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{101} x dx$

iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{54} x dx$

iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos^{19} x dx$

Aufgabe 3. *Berechnen Sie das Integral:*

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{3 - \cos x}}.$$

Aufgabe 4. *Man beweise:*

a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < a < 1$ *gilt:*

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \beta(a, 1-a)$$

b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ *gilt:*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \beta \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right)$$

Literaturverzeichnis

[1] C. I. Hedrea. Curs de Matematici speciale, 2016.

[2] O. Lipovan. Analiza matematica: Calcul Integral, *Ed. Politehnica*, 2006.