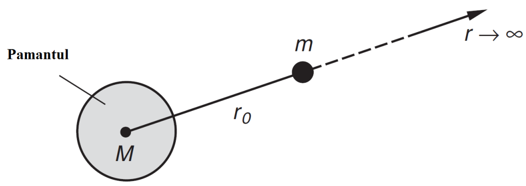
"Ohne Abweichung von der Norm ist Fortschritt nicht möglich."
Frank Zappa

2
Uneigentliche Integrale

Motivation:

∘ Beim bestimmten Integral haben wir stetige Funktionen auf beschränkten Intervallen zugrunde gelegt. Wir wollen den Integralbegriff etwas erweitern, um auch unbeschränkte Integranden oder unbeschränkte Integrationsintervalle behandeln zu können.

∘ Im Gravitationsfeld der Erde soll eine Masse m aus der Entfernung r_0 (vom Erdmittelpunkt aus gemesen) ins Unendliche ($r = \infty$) gebracht werden.



Die Berechnung der dabei aufzuwendenden Arbeit W führt zu dem folgenden uneigentlichen Integral:

$$W = \int_{r_0}^{\infty} G\frac{mM}{r^2}dr = GmM \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2}dr$$

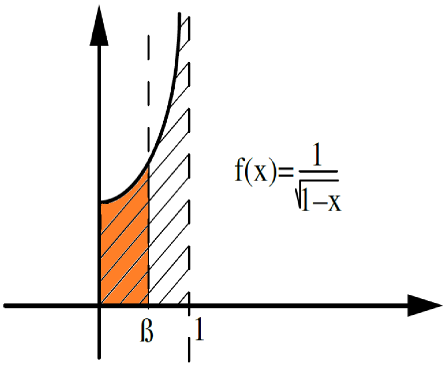
wobei G-Gravitationskonstante, M-Erdmasse.

Beispiel:

Wir betrachten die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad 0 \leq x < 1.$$

Offenbar gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \infty$.



Kann man die Fläche unter der Kurve angeben, obwohl die Funktion am rechten Rand des Integrationsintervarlls gegen Unendlich geht ?

Lösung: Wir integrieren zunächst bis zu einer oberen Grenze $\beta < 1$:

$$\int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x}\bigg|_0^\beta = -2\sqrt{1-\beta} + 2$$

Wir nehmen nun den Grenzwert als Fläche unter der Kurve:

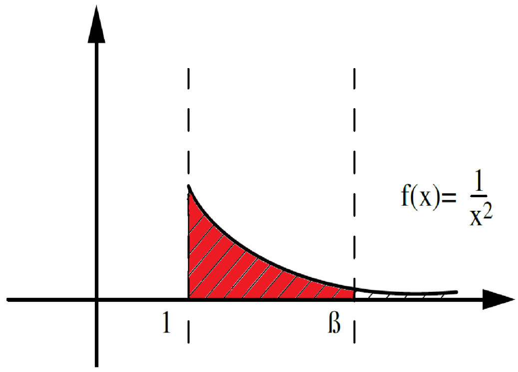
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx := \lim_{\substack{\beta \to 1 \\ \beta < 1}} \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$$

Beispiel:

Wir betrachten die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 1 \leq x.$$

Kann man die Fläche unter der Kurve angeben, obwohl das Integrationsintervall einseitig unbeschränkt ist ?



Ja ! Guck mal ! Wir integrieren bis zu einer oberen Grenze $\beta > 1$:

$$\int_1^\beta \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\beta = -\frac{1}{\beta} + 1$$

und nehmen noch einmal den Grenzwert als Fläche unter der Kurve:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx := \lim_{\beta \to \infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Definition: Uneigentliches Integral (Unseitiger Fall)
Sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion heißt uneigentlich integrierbar auf $[a, b)$, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{\substack{\beta \to b \\ \beta < b}} \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Analog verfährt man im Fall $-\infty \leq a < b < \infty$:

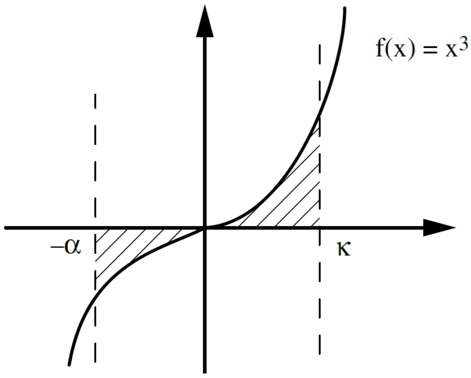
$$\lim_{\substack{\alpha \to a \\ \alpha > a}} \int_\alpha^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Manchmal schreibt man $\displaystyle\int_a^{b_-} f(x)dx$ oder $\displaystyle\int_{a_+}^{b} f(x)dx$ für ein uneigentliches Integral.

Beispiel:

Für die Funktion $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ kann man das Integral mit symmetrischen Grenzen bilden:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 0$$



Und dann zur Grenze übergehen:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} x^3 dx = 0.$$

Wir können über aber nicht von einer Fläche sprechen, die von der Funktion und der x-Achse begrenzt wird, weil die Integrale $\int\limits_{-\infty}^{0} x^3 dx$ und $\int\limits_{0}^{\infty} x^3 dx$ nicht existieren.

Definition: Uneigentliches Integral (Beidseitiger Fall)
Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion heißt uneigentlich integrierbar auf (a, b), wenn für ein $c \in (a, b)$ die uneigentlichen Integrale existieren:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}} \int_\alpha^c f(x)dx$$

und

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}} \int_c^\beta f(x)dx.$$

Wir schreiben dann:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bemerkung:

Man sieht leicht ein, dass der Grenzwert $\int_a^b f(x)dx$ nicht von der Wahl des Zwischenpunktes c abhängt.

Wichtige Beispiele:

Sei $p > 0$ und $a, b > 0$, dann:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{falls } p > 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } p \in (0,1] \end{cases}$$

und:

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{falls } \ p < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } \ p \geq 1 \end{cases}$$

Ferner:

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{falls } \ p < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } \ p \geq 1 \end{cases}$$

und ein ähnliches Ergebnis:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{falls } \ p < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } \ p \geq 1 \end{cases}$$

Zum Schluss, $q > 0$:

$$\int_a^\infty q^x\,dx = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{falls } \ q < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } \ q \geq 1 \end{cases}$$

Analog zur Definition des uneigentlichen Integrals ist der folgende Begriff:

Definition: Cauchyscher Hauptwert
Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $c \in (a, b)$ eine reelle Zahl. Die Funktion $f : (a, c) \cup (c, b) \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Existiert dann der Grenzwert:

$$CH \int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

so nennt man $CH \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ den cauchyschen Hauptwert
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann heisst der Grenzwert, falls er existiert:

$$CH \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

ebenfalls cauchyscher Hauptwert.

Bemerkung:

Existiert ein Integral im uneigentlichen Sinn, so existiert auch immer der cauchysche Hauptwert und diese beiden Werte stimmen überein. Aus der Existenz des cauchyschen Hauptwertes folgt hingegen noch nicht die Existenz des uneigentlichen Integrals. Der cauchysche Hauptwert ist nützlich, wenn die Funktion nicht uneigentlich integrierbar ist!

Beispiel:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ist in $x = 1$ unstetig. Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ ist divergent, da:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\substack{\beta \to 1 \\ \beta < 1}} \int_0^{\beta} \frac{dx}{x-1} + \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha > 1}} \int_{\alpha}^3 \frac{dx}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{\beta \to 1 \\ \beta < 1}} \ln|x-1| \Big|_0^{\beta} + \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha > 1}} \ln|x-1| \Big|_{\alpha}^3 = \infty + \ln 2 - \infty$$

Keins der Teilintegrale existiert ! Dagegen existiert der cauchysche Hauptwert:

$$CH \int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x-1} \right)$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} (\ln \varepsilon + \ln 2 - \ln \varepsilon) = \ln 2.$$

Zusammenhang des uneigentlichen mit dem eigentlichen Riemann-Integral:
Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ mit f Riemann-integrierbar auf $[a,c]$ für jedes $c \in (a,b)$. Dann gilt:

f ist Riemann-integriebar über [a,b] (mit beliebig definiertem f(b))

$$\Longleftrightarrow$$

f ist beschränkt.

Ist dies der Fall, so ist f uneigentlich integriebar mit:

$$\int_a^{b-} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Wichtige Krieterien für die Konvergenz eines uneigentlichen Integrals bekommt man analog zur Konvergenz von Reihen.

Das Majorantenkriterium:
Seien $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Es gebe ein $c_0 \in (a,b)$ und $g_1 : (a, c_0] \to (0, \infty)$ sowie $g_2 : [c_0, b) \to (0, \infty)$, und es seien:

i) $\displaystyle\int_a^{c_0} g_1(x)dx, \int_{c_0}^b g_2(x)dx$ konvergent

ii) $|f(x)| \leq g_1(x)$ auf $[a, c_0]$ und $|f(x)| \leq g_2(x)$ auf $[c_0, b]$

Dann ist f uneigentlich integrierbar über (a,b).

Man nennt g_1 und g_2 Majoranten von f. Das selbe Kriterium kann man für die unseitigen Fälle anwenden.

Bemerkung:

Sei $f(x) \geq g(x) \geq 0$ und das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ divergent, dann ist auch das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ divergent.

Beispiel:

Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}$ ist konvergent, bzw. existiert, da $\displaystyle\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ und das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ konvergiert.

Dagegen divergiert bzw. existiert nicht das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}dx$, da $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{1}{x}$ und das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ divergiert.

Mehr praktisch ist der nächste Satz:

Das Grenzwertkriterium:
Sei $-\infty < a < b \leq \infty$. Die Funktionen $f, g : [a, b)$ sind stetig und der Grenzwert:

$$L = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

existiert.

i) Ob $L \in (0, \infty)$, dann $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert genau dann, wenn $\displaystyle\int_a^b |g(x)|dx$ konvergiert.

ii) Ob $L = 0$ und $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ absolut konvergent ist, dann ist $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ absolut konvergent.

ii) Ob $L = \infty$ und $\displaystyle\int_a^b |g(x)|dx$ divergent ist, dann ist $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ divergent.

Bemerkung:

Für $f(x) \geq 0$ und $g(x) > 0$ der Punkt ii) wird:

ii) Ob $L = 0$ und $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ konvergent ist, dann ist $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ konvergent.

Korollare:

Sei $I = \displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$, $a > 0$, f stetig und:

$$\lim_{x \to \infty} x^p f(x) = L$$

existiert und ist endlich. Dann:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{falls } p > 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } p \in (0, 1] \end{cases}$$

Für ein integral $J = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, mit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, und der Eigenschaft, dass:

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x) = L$$

existiert und endlich ist:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{falls } p < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } p \geq 1 \end{cases}$$

Analog, für $K = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, mit $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, sodass:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} (x - a)^p f(x) = L$$

existiert und endlich ist:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{falls } p < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } p \geq 1 \end{cases}$$

Es gibt eine Beziehung zwischen uneigentlichen Integralen und Reihen:

Das Integralkriterium:

Sei $f : [k, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend. Dann ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ genau dann konvergent, wenn $\displaystyle\int_k^{\infty} f(x)dx$ konvergent ist.

Beispiel:

Wir betrachten die allgemeine harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0$$

Die natürliche Wahl ist die Funktion:

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad p > 0$$

Aber:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{für } p > 1 \\ \text{divergent}, & \text{für } p \in (0, 1] \end{cases}$$

also aus dem Integralkriterium folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergent}, & \text{für } p > 1 \\ \text{divergent}, & \text{für } p \in (0,1] \end{cases}$$

Das Dirichlet-Kriterium:
Sei $a < b \leq \infty$ und $f : [a,b) \to [0,\infty)$ stetig, sodass $F(u) = \int_a^u f(x)dx$ begrenzt ist. Für jede monotone Funktion $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} g(x) = 0$ ist das Integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$ konvergent.

Beispiel:

Wir studieren die Konvergenz des Integrals:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

Gibt es die Spaltung:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Da $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot 0 = 0$ hat die Funktion $h(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ eine stetige Erweiterung:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Daraus ist das erste Integral konvergent, und $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \tilde{h}(x)dx$.

Für das zweite Integral bezeichnen wir $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Die Funktion g ist monoton fallend und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Um das Dirichlet-Kriterium zu verwenden, betrachten wir die Funktion:

$$F(u) = \int_0^u f(x) = \int_0^u \sin x dx = -\cos u + \cos 1 \in [-2, 2]$$

also ist begrenzt. Aus dem Dirichlet-Kriterium ist das zweite Integral konvergent, somit ist $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ auch konvergent.

Übungen mit Lösungen

Aufgabe 1. *Studiere nur mit der Definition die Konvergenz des Integrals:*

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$$

Lösung: Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ ist unstetig an der Stelle $a = -1$ und $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$. Wir betrachten die Funktion $F(u) = \displaystyle\int_{u}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx$ und nach der Definition eines uneigentlichen Integrals man den folgenden Grenzwert berechnen soll:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} F(u) &= \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \int_{u}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1+x)^2}\Big|_{u}^{7} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{(1+u)^2}) = 6.\end{aligned}$$

Schliesslich, das Integral ist konvergent und:

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx = 6$$

Aufgabe 2. *Man studiere die Konvergenz der Integrale:*

$$i) \int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx \qquad ii) \int_{-1}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$$

Lösung: i) Das erste Integral ist uneigentlich, weil das Intervall unbeschränkt ist. Man kann beobachten, dass:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \frac{x+1}{x^4+1} = 1.$$

Um die Konvergenz zu studieren, verwenden wir die Korollare des Grenzwertkriteriums für $p = 3 > 1$. Daraus ist $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx$ konvergent.

ii) Für das zweite Integral ist der Integrand $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ an der Stellen $a = -1$ und $b = 3$ unbegrenzt. Betrachten wir einen Zwischenpunkt, zum Beispiel 0, und die Spaltung:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx &= \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} dx\end{aligned}$$

Die Korollare des Grenzwertkriteriums sind noch einmal sehr nützlich. Da:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (x+1)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} = 1, \quad p = \frac{1}{2} < 1$$

und:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (3-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} = 5, \quad p = \frac{1}{2} < 1$$

sind die beiden Integrale konvergent.

Aufgabe 3. *Beweisen Sie, dass:*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

für jedes $p > 0$ konvergent ist.

Lösung: Da beide Grenzen kritisch sind, spalten wir das Integral auf in:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

Für das erste Integral verwenden wir die Vergleichsfunktion $g(x) = x^{p-1}$. Wir wissen, dass $\int_0^1 x^{p-1}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}}dx$ genau für $p > 0$ existiert. Mit $f(x) = x^{p-1}e^{-x}$ ergibt sich:

$$L = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-x} = 1$$

Nach dem Grenzwertkriterium i) existiert $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ genau für $p > 0$.

Für das zweite Integral verwenden wir die Vergleichsfunktion $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ (um das mögliche Anwachsen von $x \to x^{p-1}$ zu kompensieren). Wir erhalten nun:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} x^{p-1}e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

Aus dem Grenzwertkriterium ii) folgt die Existenz von $\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ für alle $p \in \mathbb{R}$, weil $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx$ absolut konvergent ist. Somit existiert $\Gamma(p)$ genau für $p > 0$.

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. *Untersuchen Sie, ob das nachfolgenden uneigentlichen Integrale existieren:*

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx.$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{2x}dx.$

iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\sin(\beta x)dx, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}.$

Hinweis: partielle Integration

Aufgabe 2. *Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Interale auf Konvergenz:*

i) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+1}dx.$

ii) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{-3}+x^{-\frac{1}{3}}}dx.$

iii) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+x^{\frac{1}{2}}}dx.$

iv) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin\frac{1}{x}dx.$

Aufgabe 3. *Versuchen Sie folgende uneigentliche Integrale zu berechnen:*

i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos x \; dx$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos x e^{-x} dx$

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$

iv) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} tg(x) \; dx$

Aufgabe 4. *Studieren Sie, ob die folgenden Integrale divergieren. Bestimmen Sie danach den Cauchyschen Hauptwert.*

i) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^3}dx.$

ii) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} tg(x)dx$

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$

iv) $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$

Aufgabe 5. *Ist die Reihe:*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$$

konvergent ?

Aufgabe 6. *Ist das Integral:*

$$\int_a^{\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x^2}dx, \quad a > 0.$$

konvergent ? Warum ?

Literaturverzeichnis

[1] W. Strampp. Höhere Mathematik 2, *Springer Vieweg*, 2012.

[2] C. I. Hedrea. Curs de Matematici speciale, 2016.

[3] O. Lipovan. Curs de Matematici speciale *Editura Politehnica*, 2016.

Literaturverzeichnis