Übungsblatt 3

Aufgabe 1. *Berechne den Wert der Integrale:*

i) $\int_0^\infty x^6 e^{-x^2} dx$ *ii)* $\int_0^\infty x^{1000} e^{-x^2} dx$ *iii)* $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{100x^2}}$

Lösung:

iii) Intai remarcam faptul ca integrala poate fi scrisa sub forma

$$\int_0^\infty e^{-100x^2} dx$$

Avem nevoie de o schimbare de variabila pentru a ne apropia de forma functiei Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

altfel o integrala care contine e^{-x^2} este foarte greu de evaluat, in general.

Incercam schimbarea $100x^2 = y$ si vom folosi a doua metoda de schimbare a variabilei. Pentru a realiza schimbarea trebuie sa precizam ca noile capete de integrare devin:

$$0 \mapsto 100 \cdot 0^2 = 0 \qquad \infty \mapsto 100 \cdot \infty^2 = \infty$$

Conform algoritmului dictat de a doua metoda a schimbarii de variabila, trebuie sa aflam x in functie de y

$$x^2 = \frac{y}{100} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{\sqrt{y}}{10}$$

Deci integrandul se transforma conform regulii

$$e^{-100x^2} \mapsto e^{-y}$$

Acum trebuie sa aflam cum se transforma elementul diferential dx. Pentru aceasta vom diferentia relatia care il da pe x in functie de y (suntem la a doua metoda de schimbare a variab.)

$$x = \frac{\sqrt{y}}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{y} \cdot 10} dy$$

Acum totul este pregatit si putem face schimbarea de variabila:

$$\int_0^\infty e^{-100x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{y} \cdot 10} dy$$

Incepe sa semene cu forma functiei gama. Sa o mai prelucram putin

$$\int_0^\infty e^{-y}\frac{1}{2\sqrt{y}\cdot 10}dy = \frac{1}{20}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y}dy = \frac{1}{20}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}dy$$

Mai avem de "coafat" doar termenul $-\frac{1}{2}$ care trebuie scris sub forma $s-1$:

$$s-1=-\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad s=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Deci in final reusim sa exprima integrala ceruta sub forma

$$I=\frac{1}{20}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}dy = \frac{1}{20}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1}e^{-y}dy = \frac{1}{20}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{20}\sqrt{\pi}$$

unde folosim ca $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ este o valoare remarcabila a lui Γ.

Aufgabe 2. *Berechnen Sie die Integrale:*

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{61}x\cos^{43}xdx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{101}xdx$

iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{54}xdx$

iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cdot\cos^{19}xdx$

Lösung: iv) Putem incerca fie schimbarea de variabila $\sin x = y$ fie $\cos x = y$. De exemplu, vom folosi prima metoda de schimbare de variabila pentru

$$\sin x = y$$

Conform algoritmului impus de prima metoda de schimbare de variabila vom diferentia relatia de mai sus

$$(\sin x)'dx = dy \qquad \Longrightarrow \qquad \cos x\cdot dx = dy$$

Prin urmare va trebui sa facem rost de $\cos x\cdot dx$ pentru a putea introduce in scena pe dy.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos^{19}xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cdot\cos^{18}x\cdot\cos x\cdot dx$$

In acest moment nu e foarte clar cum se modifica restul functiilor de la integrand, caci $\sqrt{\sin x}$ devine $\sqrt{y}$, dar $\cos^{18}x$??

Stim ca $\sin x = y$, cum scriem $\cos^{18}x$ in functie de $\sin x$? Sa ne amintim ca $\cos^2 x+\sin^2 x = 1 \implies \cos^2 x = 1-y^2$. Un pas mai departe gasim $\cos^{18}x = (1-y^2)^9$.

Acum totul e pregatit pentru a realiza schimbarea de variabila

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cdot \cos^{18} x \cdot \cos x \cdot dx = \int_{\sin 0}^{\sin \frac{\pi}{2}} \sqrt{y} \cdot (1-y^2)^9 \cdot dy$$
$$= \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} (1-y^2)^9 dy$$

Integrala se apropie de expresia lui β. Singurul obstacol pare a fi prezenta lui y^2. Facem substitutia $y^2 = z$. Folosim a doua metoda si obtinem $y = \sqrt{z}$ si apoi $dy = (\sqrt{z})' dz = \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$.

$$\int_0^1 y^{\frac{1}{2}} (1-y^2)^9 dy = \int_{0^2}^{1^2} \sqrt{z}^{\frac{1}{2}} (1-z)^9 \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^9 dz$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 z^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} (1-z)^9 dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z^{-\frac{1}{4}} (1-z)^9 dz$$

Expresia functiei beta este

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Daca $p - 1 = -\frac{1}{4}$ atunci $p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Daca $q - 1 = 9$ atunci $q = 10$
In final

$$I = \frac{1}{2} \beta \left(\frac{3}{4}, 10\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma(10)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + 10\right)}$$

Intrucat $\frac{1}{4}$ nu este o valoare remarcabila pentru functia Γ, putem sa lasam rezultatul afisat mai sus.

Aufgabe 3. *Man beweise:*

a) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ gilt:*
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \beta(a, 1-a)$$

b) *Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:*
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \beta \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

Lösung: a) Avem nevoie de o transformare pentru a face integrala sa semene cu una dintre functiile Γ sau β. Prea multe indicii nu avem si probabil doar o abordare trial and error va functiona. Daca am incerca sa ne apropiem de expresia lui β, de exemplu, am avea nevoie de o schimbare de variabila $u(x) = y$ astfel incat $u(0) = 0$ si $u(\infty) = 1$ (sau invers $u(0) = 1$ si $u(\infty) = 0$). Evident prin valoarea in ∞ intelegem o limita cand $x \to \infty$.

Sa incercam cativa candidati cu proprietatea

$$u(0) = 0 \quad \text{si} \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 1$$

Pentru $u(0) = 0$ este destul de simplu de gasit $u(x) = x$ dar acum $\lim_{x\to\infty} u(x) = \infty$. Deci trebuie sa potrivim cumva functia astfel incat limita la infinit sa fie 1.

Ar mai fi un indiciu in forma integralei: functia care trebuie integrata este o functie rationala $\Longrightarrow$ am putea incerca sa construim o functie rationala cat mai simpla posibila. O functie rationala are limita 1 (cand $x \to \infty$) daca polinoamele de la numarator si numitor au acelasi grad si termenii de grad maxim au acelasi coeficient. Prin urmare apare un candidat serios $\frac{x}{x+1}$ sau $\frac{x}{x+c}$, unde c constanta. Adica ambele (sus/jos) sunt polinoame de grad 1 si coeficientii lui x sunt egali.

Facem substitutia

$$\frac{x}{x+1} = y$$

din nou cu a doua metoda de schimbare a variabilei. Deci intai exprimam x in functie de y si obtinem

$$\frac{x}{x+1} = y \quad \Longrightarrow x = (x+1)y \quad \Longrightarrow x(1-y) = y \quad \Longrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

Elementul diferential dx se transforma in

$$dx = \left(\frac{y}{1-y}\right)' dy = \frac{1}{(1-y)^2} dy$$

Facem acum schimbarea de variabila $\frac{x}{x+1} = y$

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^{a-1}}{1+\frac{y}{1-y}} \frac{1}{(1-y)^2} dy$$

Aranjam putin expresia, pentru a obtine

$$I = \int_0^1 \frac{y^{a-1}}{(1-y)^a} dy = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{-a} dy$$

Expresia functiei beta este

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Daca $p - 1 = a - 1$ atunci $p = a$ iar daca $q - 1 = -a$ atunci $q = 1 - a$, prin urmare putem scrie

$$I = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{1-a-1} dy = \beta(a, 1-a)$$

b) Intai putem remarca asemanarea cu integrala anterioara. Pentru a face cele doua integrale si mai similare incercam sa transformam x^n in y, adica propunem schimbarea de variabila

$$x^n = y$$

Cu a doua metoda de schimbare a variabilei, avem intai

$$x = \sqrt[n]{y} \qquad \Longrightarrow \qquad dx = (\sqrt[n]{y})' dy = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)' dy = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} dy$$

asadar obtinem

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx = \int_{0^n}^{\infty^n} \frac{1}{1+y} \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} dy = \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{1+y} dy$$

Am obtinut exact integrala de mai sus pentru $a = \frac{1}{n}$, si o constanta $\frac{1}{n}$ in fata sa. In final, conform subpunctului a)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \beta(a, 1-a) \qquad \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{1+x} dx = \beta\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

si

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \beta\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \beta\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$