

“In matematica nu intelegi lucrurile. Doar te obisnuiesti cu ele”  
John von Neumann

# 3

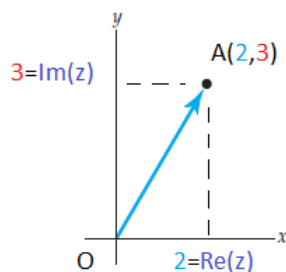
## Functii complexe

### Numere complexe

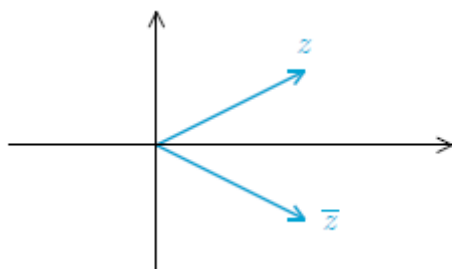
Orice numar complex are o unica reprezentare:

$$z = x + i \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Numerele complexe pot fi reprezentate grafic printr-un vector orientat cu originea in originea reperului si varful in punctul  $A(x, y)$ . Spunem ca  $z$  este afixul punctului  $A(x, y)$ . Mai jos putem observa cum numarul complex  $z = 2+3i$  este reprezentat atat prin intermediul unui vector de pozitie  $\overrightarrow{OA}$  cat si prin intermediul punctului  $A(2, 3)$ :



Numim  $x = \text{Re}(z)$  parte reala si  $y = \text{Im}(z)$  parte imaginara a numarului complex  $z$ . Daca  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  numim  $\bar{z} = x - iy$  conjugatul numarului complex  $z$ . Imaginea conjugatului se obtine prin simetrie fata de axa  $Ox$ :



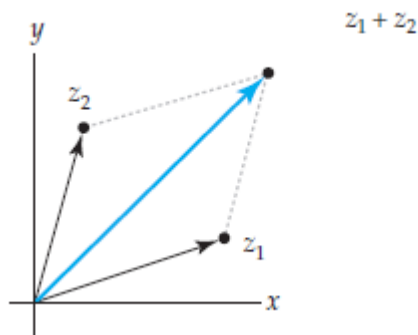
Partea reala si partea imaginara satisfac relatiile:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Suma a doua numere complexe  $z_1, z_2$  este definita prin:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

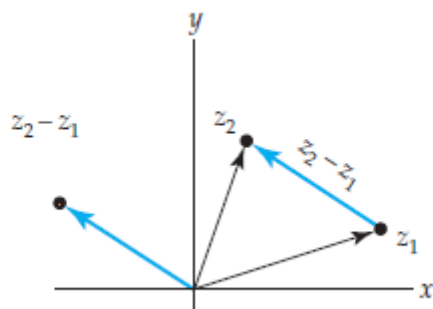
si imaginea sa se obtine prin regula paralelogramului:



Diferenta a doua numere complexe  $z_1, z_2$  este definita prin:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

si imaginea sa se obtine cu regula triunghiului apoi se aplica o translatie pana in originea reperului:



Pentru **produsul** a doua numere complexe  $z_1$  și  $z_2$  avem regula naturală:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

E de fapt înmulțirea obișnuită a două paranteze ținând cont de noutatea:

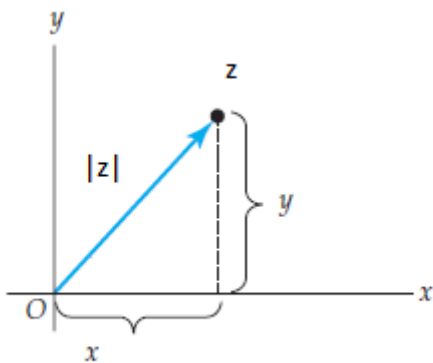
$$i^2 = -1$$

Reprezentarea grafică a produsului o vom prezenta mai târziu, după ce vom înțelege mai bine informațiile codificate în scrierea  $z = x + iy$ .

Lungimea vectorului prin care un număr complex este reprezentat se numește **modulul** numărului complex. Modulul numărului complex  $z = x + iy$  se notează  $|z|$  sau folosind litera  $r$ .

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

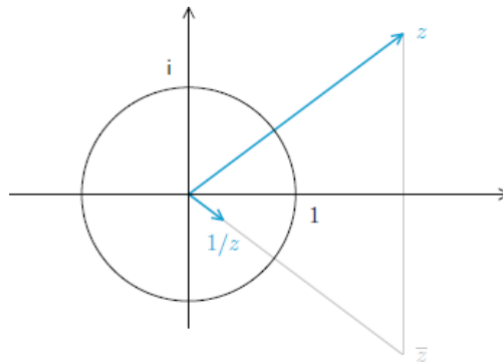
Modulul coincide cu norma euclidiană a vectorului prin care  $z$  este reprezentat:



Daca  $z \neq 0$ , putem forma inversul sau folosind regula:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

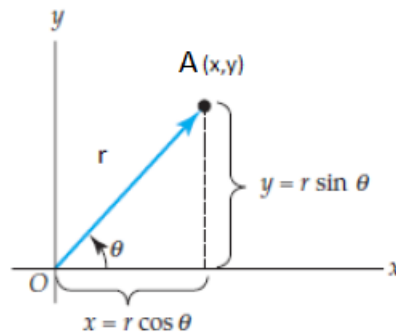
**Inversul** unui numar complex se reprezinta prin simetrie fata de axa  $Ox$  apoi inversiune fata de cercul unitate. Vectorul care reprezinta numarul complex  $\frac{1}{z}$  indica in acelasi sens ca si  $\bar{z}$  dar are lungimea  $\frac{1}{r}$ , cand  $z$  are lungimea  $r$ .



**Catun** a doua numere complexe  $z_1, z_2$  e de fapt produsul lui  $z_1$  cu inversul lui  $z_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (x_1 + iy_1) \cdot \frac{1}{x_2 + iy_2} = (x_1 + iy_1) \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 - i(y_1 x_2 + x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Unghiul  $\theta$  format de semiaxa pozitiva  $Ox$  si vectorul  $\vec{OA}$ , prin care numarul complex e reprezentat, se numeste **argumentul numarului complex**  $z = x + iy$ .



Avem urmatoarea formula pentru a obtine acest unghi:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Deoarece cos si sin sunt  $2\pi$ -periodice, argumentul nu este unic determinat, ci  $\theta \pm 2\pi, \theta \pm 4\pi, \dots$  reprezinta alte argumente posibile ale lui  $z$ .

Din aceasta cauza vom nota cu:

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

multimea tuturor argumentelor.

Pentru  $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  se observa pe baza figurii anterioare ca:

### Reprezentarea trigonometrica (polara) a unui numar complex:

Fiecare numar complex poate fi reprezentat sub forma:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

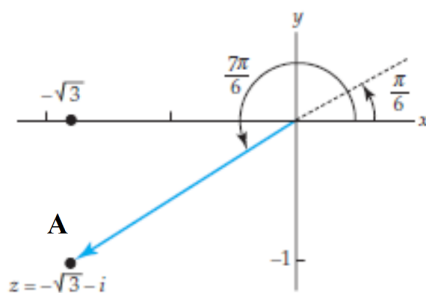
unde  $r$  si  $\theta$  se vor numi **coordonatele polare** ale lui  $z$ .



### Exemplu:

Cautam sa aflam reprezentarea trigonometrica a lui  $z = -\sqrt{3} - i$ . Deoarece  $x = -\sqrt{3}$  si  $y = -1$  obtinem:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$



Punctul  $A(-\sqrt{3}, -1)$  (imaginea lui  $z$ ) se afla in cadranul III din aceasta cauza ar trebui sa avem:

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

O astfel de valoare se obtine pentru  $k = 1$ , deci  $\theta = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \frac{7\pi}{6}$ . Modulul

sau este  $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ . Prin urmare reprezentarea trigonometrica (polara) este:

$$z = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

□

**Argument principal:** Vom nota unghiul  $\theta$  pentru care are loc:

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

prin  $\text{Arg}(z)$  si il vom numi **argumentul principal** a lui  $z$ . Are loc relatia:

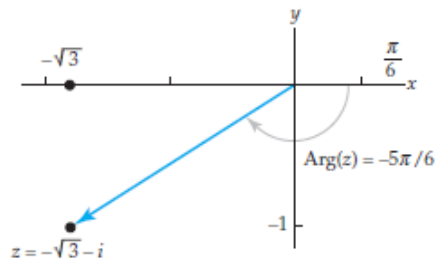
$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



**Exemplu:**

In exemplul anterior argumentul ales a fost  $\theta = \frac{7\pi}{6}$ . Cu ajutorul formulei  $\text{Arg}(z) = \theta \pm 2k\pi \in (-\pi, \pi]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , cautam sa obtinem argumentul principal.

Din aceasta cauza:  $\text{Arg}(z) = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$ .



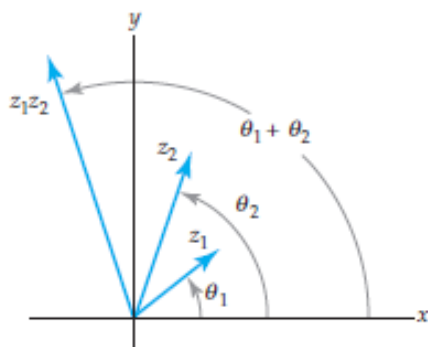
Asadar avem inca o posibila reprezentare trigonometrica:

$$z = 2 \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right)$$

□

In acest moment putem sa dam o semnificatie grafica produsului a doua numere complexe cu ajutorul reprezentarilor polare:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$



Putem astfel intelege ce se intampla la inmultirea lui  $z_2$  cu  $z_1$ . Numarul complex  $z_1$  transforma vectorul de pozitie a lui  $z_2$  rotindu-l cu un unghi  $\theta_1 = \text{Arg}(z_1)$  in jurul originii apoi scalandu-l incat sa aibe lungimea egala cu produsul lungimilor celor doi vectori. Asadar o inmultire cu un numar complex este din punct de vedere geometric o rotatie si apoi o scalare. O situatie asemanatoare are loc pentru catul lor:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Una dintre motivatiile formei trigonometrice este posibilitatea de a exprima elegant puterea unui numar complex:

#### Formula lui Moivre:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{Z}.$$

#### Radacinile ecuatiei $w^n = z$ :

Pentru orice numar natural  $n$  ecuatia  $w^n = z$  are **exact  $n$  solutii**, mai exact:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

unde  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .



#### **Exemplu:**

Ecuatia  $w^n = i$ ,  $w \in \mathbb{C}$  va avea trei solutii. Se observa usor, reprezentand grafic numarul  $i$ , ca  $|i| = 1$  si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , asadar:

Pentru  $k = 0$  :

$$w_1 = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Pentru  $k = 1$  :

$$w_2 = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \\ = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

si pentru  $k = 2$  :

$$w_3 = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) = \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \\ = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = \cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \\ = -i$$

□



### Radacinile de ordinul $n$ ale unitatii $\varepsilon^n = 1$ :

Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  exista exact  $n$  radacini de ordinul  $n$  ale numarului  $z = 1$ , mai precis:

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \\ \varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} \\ \dots \dots \dots \varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \dots \dots \dots \varepsilon_n = 1$$

Din punct de vedere grafic imaginile acestora sunt  $n$  puncte situate pe cercul de raza 1 si origine  $O$  (cercul unitate).

## Funcții complexe

O **funcție cu valori complexe** este o funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  pentru care domeniul de valori este o submultime a lui  $\mathbb{C}$ . Atunci cand  $D \subset \mathbb{C}$  spunem ca avem o **funcție complexa**.



De obicei scriem:

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

unde  $z = x + iy$ , pentru o functie complexa  $f$ . Astfel  $u, v$  vor fi **functii reale**.

**Functii liniare:** O functie complexa  $f$  se numeste **liniara** daca exista constantele complexe  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , astfel incat:

$$f(z) = az + b, \quad z \in \mathbb{C}.$$



### Remarca:

- Pentru  $a = 1$  se obtine ceea ce in geometrie numim **translatie** in directia indicata de  $b$ :

$$f(z) = z + b, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- Cand  $a \in \mathbb{R}_+$  si  $b = 0$  obtinem o **scalare** cu factorul de scalare  $a > 0$ :

$$f(z) = az, \quad z \in \mathbb{C}.$$

adica modulul lui  $z$  va fi **marit** ( $a > 1$ ) sau **micsorat** ( $0 < a < 1$ ).

- Daca  $a \in \mathbb{C}$  astfel ca  $|a| = 1$  si  $b = 0$  atunci obtinem o **rotatie** in jurul originii, in sens pozitiv trigonometric, de unghi  $\theta = \text{Arg}(a)$ :

$$f(z) = (\cos \theta + i \sin \theta)z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

### Structura unei aplicatii liniare:

Orice aplicatie liniara  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se descompune in:

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

unde cele trei functii reprezinta:

- 1)  $f_1(z) = (\cos \theta + i \sin \theta)z$  o rotatie in jurul originii
- 2)  $f_2(z) = |a|z$  o scalare
- 3)  $f_3(z) = z + b$  o translatie de "vector"  $b$

In continuare vom incepe sa studiem varianta complexa a unor functii elementare. Unele astfel de extinderi nu conduc la functii propriu-zise ci la ceea ce vom numi functii multivalente: adica functii care asociaza unui numar  $z$  mai multe posibile valori.

### Functia exponentiala complexa:

**Functia exponentiala**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  este definita prin:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} := e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Se observa usor ca de fapt  $|e^z| = e^x$  si  $\arg(z) = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

#### Proprietatile functiei exponentiale:

i) functia exponentiala este o functie  $2\pi i$ -periodica:

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ii)  $e^z e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C},$

iii)  $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

iv)  $(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

#### Logaritmul complex:

Funcția multivalentă:

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln |z| + i \cdot \arg(z) = \ln |z| + i \cdot (\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi)$$

se numeste **logaritm complex**  $\operatorname{Ln} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  si reprezinta solutia ecuatiei:

$$e^w = z.$$

#### Proprietatile logaritmului complex:

Pentru orice  $z, w \neq 0$  au loc:

i)  $\operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w) = \operatorname{Ln}(zw)$

ii)  $\operatorname{Ln}z - \operatorname{Ln}(w) = \operatorname{Ln}\left(\frac{z}{w}\right)$

iii)  $\operatorname{Ln}(z^n) = n \cdot \operatorname{Ln}(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Egalitatile de mai sus trebuie interpretate ca identitati intre multimi si nu intre numere complexe, caci functia multivalenta complexa returneaza ca valoare o multime de numere si nu un numar.

#### ”Funcția” putere:

Putem defini ridicarea la putere complexa cu ajutorul logaritmului complex:

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln |z| + i \arg(z))}$$

unde  $\alpha \in \mathbb{C}$  este o constanta complexa.

Funcția putere definită mai sus este tot **multivalentă** deci nu e propriu-zis o funcție. Insa expresia  $e^{\alpha(\ln|z|+i\text{Arg}(z))}$  numita **valoare principala a functiei putere**  $f(z) = z^\alpha$  este o **funcție complexă** de  $z$  (atribuie o unica valoare fiecarui număr  $z$ ).



**Remarca:**



Proprietatile algebrice obisnuite ale functiei putere nu se aplica variantei complexe. Regula  $z^\alpha \cdot w^\alpha = (zw)^\alpha$ , de exemplu, **nu e valabila pentru orice**  $z, w \in \mathbb{C}^*$  si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Spre exemplu, tinand cont de definitia functiei multivalente putere:

$$\begin{aligned} (-1)^i \cdot (-1)^i &= e^{i(0+i\text{arg}(-1))} e^{i(0+i\text{arg}(-1))} \\ &= e^{-(\pi+2k\pi)} e^{-(\pi+2k\pi)} = \frac{1}{e^{2\pi+4k\pi}} \end{aligned}$$

dar si:

$$[(-1) \cdot (-1)]^i = 1^i = e^{i(0+i\text{arg}(1))} = e^{-(0+2k\pi)} = \frac{1}{e^{2k\pi}}$$

**Funcțiile trigonometrice si hiperbolice complexe:**

Urmatoarele functii sunt extinderi ale functiilor reale corespunzatoare:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

Aceste functii sunt continue si derivabile **pe  $\mathbb{C}$**  !

**Proprietati elementare :**

Pentru orice  $z \in \mathbb{C}$  :

i)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$     si     $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

ii)  $\cosh(iz) = \cos z$     si     $\sinh(iz) = i \sin z$

iii) in  $\mathbb{C}$  au loc, la fel ca in  $\mathbb{R}$ , regulile:

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

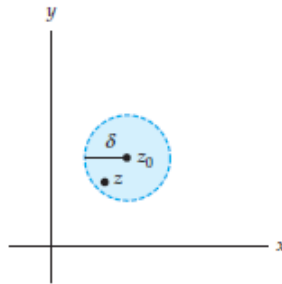
## Complex versus real

In planul complex distanta se calculeaza prin:

$$d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Tinand cont de aceasta putem sa vizualizam o vecinatate deschisa in jurul lui  $z_0$  ca fiind un disc centrat in  $z_0$  si de raza  $\delta$ , adica multimea:

$$D(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}.$$



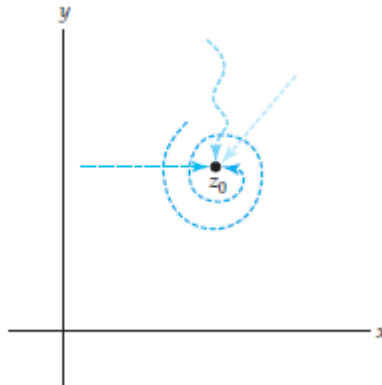
### Siruri convergente:

Fie  $(z_n)_n$  un sir de numere complexe si  $z \in \mathbb{C}$ . Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

$$z_n \rightarrow z, \text{ cand } n \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(z_n) \rightarrow \text{Re}(z) \text{ si } \text{Im}(z_n) \rightarrow \text{Im}(z), \text{ cand } n \rightarrow \infty$$

In  $\mathbb{C}$  o functie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  are **limita  $L$**  in punctul  $z_0$  daca si numai daca pentru toate sirurile  $(z_n)_n$ , care converg la  $z_0$ , sirul  $f(z_n)$  converge la  $L$ .

**Diferenta dintre cazul complex si cel real** este ca in  $\mathbb{C}$  sirurile nu se apropie de limita doar dintr-o directie ci se pot apropia dintr-o infinitate de directii sau trajectorii:



In cazul sirurilor reale apropierea de limita se face doar pe o traiectorie orizontala (axa  $Ox$ ). In complex convergenta este mai greu de realizat dupa cum arata urmatorul exemplu.

 **Ilustrare:**

Limita  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{2z}$  nu exista !

Consideram un sir  $(z_n)_n$ , care converge pe directia axei  $Ox$  la 0, de exemplu  $z_n = \frac{1}{n}$ . Atunci vom avea:

$$f(z_n) = \frac{\bar{z}_n}{2z_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Dar pentru un alt sir  $(w_n)_n$ , care converge pe directia axei  $Oy$  la 0, de exemplu  $w_n = \frac{1}{n}i$ , va rezulta:

$$f(w_n) = \frac{\bar{w}_n}{2w_n} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{2i}{n}} = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Deci o contradictie cu criteriul lui Heine. □

**Limita unei functii complexe:**

Fie  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  si  $L = a + ib$ , atunci  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  daca si numai daca:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \text{und} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b.$$

 **Exemplu:**

Calculam limita  $\lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 + 1)$ . Fie  $z = x + iy$ , ca de obicei. Atunci:

$$f(z) = z^2 + 1 = (x + iy)^2 + 1 = x^2 - y^2 + (2xy + 1)i$$

Pentru a aplica ultima teorema, consideram  $u(x, y) = x^2 - y^2$  si  $v(x, y) = 2xy + 1$ . Aici  $z_0 = 1 + i$ , deci  $x_0 = 1$  si  $y_0 = 1$ .

Atunci:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 - y^2) = 0$$

si:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (2xy + 1) = 3$$

si limita exista si e  $L = \lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 + 1) = 0 + 3i$ .

**Continuitatea functiilor complexe:**

Fie  $D \subset \mathbb{C}$  o vecinatate deschisa a lui  $z_0 = x_0 + iy_0$ . O functie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  :

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

este **continua** in  $z_0$ , daca functiile reale  $u, v$  sunt continue in  $(x_0, y_0)$ .

Functia exponentiala  $f(z) = e^z$  este continua pe  $\mathbb{C}$ , caci  $u(x, y) = e^x \cos y$  si  $v(x, y) = e^x \sin y$  sunt ambele produse de functii reale continue.

**Derivabilitatea functiilor complexe:**

Fie  $D \subset \mathbb{C}$  un **domeniu**. O functie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  se numeste **derivabila complex** in  $z_0 \in D$ , daca exista limita:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Numarul complex  $f'(z_0)$  se numeste derivata lui  $f$  in  $z_0$ .

O functie se numeste **olomorfa** in  $z_0 \in \mathbb{C}$  cand este definita intr-o vecinatate deschisa a acestuia  $D(z_0, \delta) \subset \mathbb{C}$  si este derivabila complex in toate punctele vecinatatii.

**Exemplu:**

Functia  $f(z) = x + 4iy$  nu este derivabila complex in niciun punct  $z_0$  !

Sa consideram  $z_0 = x_0 + iy_0$  si sa formam limita:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{(x - x_0) + i(4y - 4y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Daca ne apropiem de  $(x_0, y_0)$  vertical, adica prin siruri  $(x_0, y_n)$  cu  $y_n \rightarrow y_0$  obtinem:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{(x - x_0) + i(4y - 4y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_0 - x_0) + i(4y_n - 4y_0)}{(x_0 - x_0) + i(y_n - y_0)} = 4$$

□

Derivabilitatea complexa este ceva mai pretentioasa decat simpla derivabilitate a componentelor  $u$  si  $v$  dupa cum arata teorema **Looman-Menchoff**:

**Derivabilitate complexa vs. derivabilitate reala:**

Fie functia  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  definita prin  $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ , atunci cand  $z = x + iy$  si sunt indeplinite urmatoarele conditii:

- i)  $f$  este **continua intr-o vecinatate** a lui  $z_0 \in D$ .
- ii) derivatele partiale  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  si  $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  **exista intr-o vecinatate** a lui  $z_0$ .
- iii) functiile  $u, v$  satisfac **intr-o vecinatate** a lui  $z_0$  **conditiile Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Atunci functia  $f$  este **derivabila complex** in  $z_0$  (chiar olomorfa).

**Exemplu:**

Vom studia olomorfia functiei  $f(z) = \cos z$  intr-un punct oarecare notat  $z_0 = x_0 + iy_0$

□

**Reguli de derivare pentru functii olomorfe (ca si in cazul real):**

- i) **liniaritate:**  $(\alpha f(z) + \beta g(z))' = \alpha f'(z) + \beta g'(z)$
- ii) **regula produsului:**  $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- iii) **regula catului:**  $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$
- iv) **derivarea functiilor compuse:**  $f(g(z))' = f'(g(z))g'(z)$

## Integrarea functiilor complexe

Integrala Riemann a unei functii cu valori complexe se defineste in mod natural prin:

**Integrala Riemann:**

Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  o functie continua. Definim integrala lui  $f$  pe  $[a, b]$  prin:

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$$



**Exemplu:**

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos t + i \cdot \sin t dt &= \int_0^\pi \cos t dt + i \cdot \int_0^\pi \sin t dt = \sin t \Big|_0^\pi + i \left( -\cos t \Big|_0^\pi \right) \\ &= 0 + i \cdot 2 = 2i. \end{aligned}$$

□

Pentru a defini insa integrala unor functii complexe este nevoie de un studiu amanuntit al curbelor si al unor clase de multimi in planul complex.

### Curbe in planul complex:

Prin **curba** in planul complex vom intelege o aplicatie continua:

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad a < b,$$

intre un interval compact si multimea numerelor complexe. Orice curba va avea o reprezentare:

$$c(t) = x(t) + i \cdot y(t), \quad t \in [a, b]$$

O curba se numeste **neteda** daca este derivabila cu derivata continua.



**Exemplu:**

• Fie  $z_1 = x_1 + y_1 i$  si  $z_2 = x_2 + y_2 i$ . Segmentul dintre punctele  $A(x_1, y_1)$  si  $B(x_2, y_2)$  reprezinta de fapt o curba  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$c(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = x(t) + i \cdot y(t), \quad t \in [0, 1],$$

unde  $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$  si  $y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1)$ .

• Un cerc de raza  $R$  si centru  $M(x_0, y_0)$  poate fi interpretat ca fiind o curba  $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$c(t) = (x_0 + R \cos t) + i \cdot (y_0 + R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

□

### Curbe netede pe portiuni :

O curba se numeste **neteda pe portiuni** daca exista o partitie:

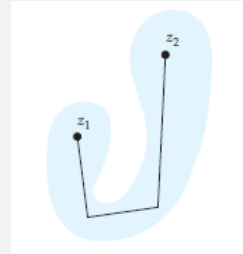
$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

astfel ca  $c$  sa fie neteda pe fiecare interval  $(a_k, a_{k+1})$ ,  $0 \leq k < n - 1$ .



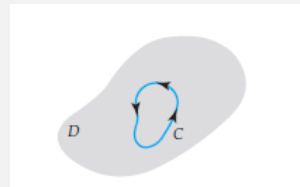
### Domeniu:

Multimea  $D \subset \mathbb{C}$  se numeste domeniu daca este deschisa si pentru orice  $z_1, z_2 \in D$  exista o curba  $c \subset D$  care uneste  $z_1$  cu  $z_2$ .



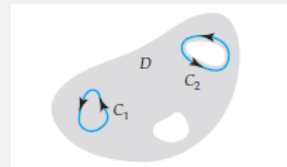
### Domeniu simplu conex:

$D$  este un domeniu si curba inchisa  $\gamma$  aflata in  $D$  poate fi contractata pana devine un punct al multimii respective. (nu are gauri)



### Domeniu multiplu conex:

Un domeniu care nu este simplu conex se numeste multiplu conex. (are gauri)



### Integrala in planul complex:

Fie  $D \subset \mathbb{C}$  un domeniu,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  o functie continua si  $c : [a, b] \rightarrow D$  o curba neteda. Atunci definim integrala curbilinie complexa a lui  $f$  pe curba  $c$  prin:

$$\int_c f(z) dz = \int_a^b f(c(t)) \cdot c'(t) dt$$

Cand  $c$  este doar neteda pe portiuni definim:

$$\int_c f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z) dz.$$

pentru partitia corespunzatoare.



### Exemplu:

Calculam:

$$\int_c \frac{1}{z} dz,$$

unde  $c$  este **cercul unitate**.

Pentru inceput curba  $c$  are reprezentarea parametrica:

$$c(t) = \cos t + i \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Conform definitiei:

$$\begin{aligned} \int_c \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (\cos t + i \sin t)' dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos t - i \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

□

### Proprietati elementare ale integralelor complexe:

- i)  $\int_c \alpha f(z) + \beta g(z) dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$
- ii)  $\int_{c_1 \cup c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz,$



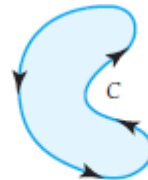
### Remarca:

- Integrala complexa **nu depinde** de parametrizarea curbei.
- Integrala complexa curbilinie **depinde de orientarea** curbei! Daca notam prin  $c^-$  curba  $c$  data cu orientarea inversa, atunci:

$$\int_{c^-} f(z) dz = - \int_c f(z) dz.$$



**Orientare pozitiva**



**Recuperarea unui rezultat clasic:**

Fie  $D \subset \mathbb{C}$  deschisa si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  continua. O **primitiva** a lui  $f$  este o functie olomorfa  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  pentru care  $F' = f$ . Atunci pentru orice curba neteda pe portiumi  $c$  aflata in  $D$  are loc:

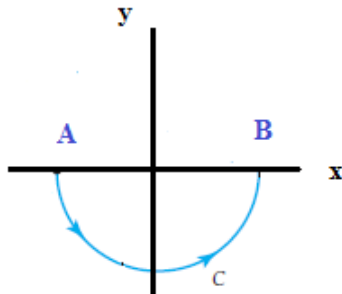
$$\int_c f(z)dz = F(c(b)) - F(c(a)).$$

 **Exemplu:**

Funcția  $f(z) = z$  are primitiva:

$$F(z) = \frac{z^2}{2}.$$

Fie acum  $c$  semicercul cercului unitate (considerat cu orientarea pozitiva) situat intre punctele  $A(-1, 0)$  si  $B(1, 0)$ . Acest semicerc considerat ca fiind o curba admite parametrizarea  $c(t) = \cos t + i \sin t$  pentru  $t \in [\pi, 2\pi]$ , deoarece  $z_A = -1 + 0i = \cos \pi + i \sin \pi$  si  $z_B = 1 + 0 \cdot i = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$ .



$$\int_c z dz = F(c(2\pi)) - F(c(\pi)) = (1 + i \cdot 0)^2 - (-1 + i \cdot 0)^2 = 1 - 1 = 0$$

Pe de alta parte:

$$\begin{aligned} \int_c z dz &= \int_{\pi}^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(\cos t + i \sin t)' dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(2t) + i \sin(2t) dt = \frac{\cos(2t)}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} - i \frac{\cos(2t)}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

□

### Dezvoltari in serii de puteri in jurul lui 0

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

### Serii de puteri in jurul unui $z_0$ oarecare:

In general pentru functii olomorfe are loc formula de dezvoltare in serie Taylor:

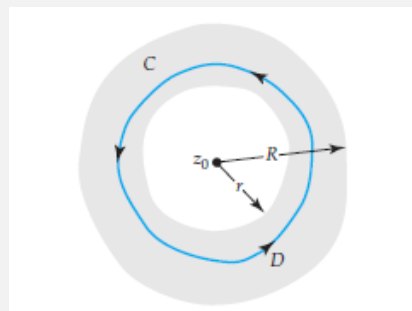
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

in jurul lui  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

### Dezvoltarea in serie Laurent:

Fie  $f$  o functie olomorfa in coroana circulara  $r < |z - z_0| < R$ . Atunci ea poate fi dezvoltata in serie Laurent in punctele acestei multimi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n.$$



Coeficientii dezvoltarii sunt dati prin:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

unde  $c$  este o curba inchisa simpla, pozitiv orientata, care este situata in totalitate in  $r < |z - z_0| < R$  si contine punctul  $z_0$  in interiorul sau.



### Exemplu:

Consideram functia  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$  pe care dorim sa o dezvoltam in serie Laurent in jurul lui  $z_0 = 0$  si putem considera  $z$  ca facand parte din coroana circulara  $0 < |z| < \infty$ .

Cu ajutorul dezvoltarii in serie Taylor:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

obtinem dezvoltarea in serie Laurent in jurul lui  $z_0 = 0$ :

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots$$

deci  $a_n = 0$  pentru  $n < -1$ ,  $a_{-1} = 1$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -\frac{1}{3!}$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = \frac{1}{5!}$  si asa mai departe. □

#### Singularitati izolate:

Fie  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$  si  $F : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Atunci numim  $z_0$  **singularitate izolata** a lui  $f$ .

In cele ce urmeaza vom dori sa clasificam singularitatile izolate ale unei functii.

#### Caracterizarea singularitatilor izolate prin intermediul seriilor Laurent:

Functia  $f$  posedea in  $z_0 \in \mathbb{C}$  o singularitate izolata. Atunci numim  $z_0$ :

- i) o **singularitate aparenta** a lui  $f$ , daca in dezvoltarea in serie Laurent in jurul lui  $z_0$  toti  $a_n$  cu  $n < 0$  sunt nuli:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

- ii) un **pol de ordinul  $m$**  al lui  $f$ , daca in dezvoltarea in serie Laurent  $a_n = 0$  pentru  $n < -m$ :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

- iii) o **singularitate esentiala**, cand dezvoltarea Laurent admite o infinitate de termeni cu exponent negativ:

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

**Teorema de caracterizare a polilor:**

Funcția  $f$  are în  $z_0$  un pol de ordin  $m$  dacă și numai dacă există o funcție  $g$  olomorfa în  $z_0$  astfel ca  $g(z_0) \neq 0$  iar într-o vecinătate a lui  $z_0$  avem:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

**Consecința**

Dacă funcția  $f$  are în  $z_0$  un pol, atunci:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$$

**Exemplu:**

$f(z) = \frac{\cos z}{(z - i)^2}$  are în  $z_0 = i$  un pol de ordin 2, verificăm ușor că  $\cos(i) \neq 0$  iar  $\cos z$  este olomorfa în orice punct din  $\mathbb{C}$ .

**Teorema de caracterizare a singularităților aparente:**

Singularitatea  $z_0$  este o singularitate aparentă dacă și numai dacă **limita**  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  **există** în  $\mathbb{C}$ .

**Exemplu:**

Funcția  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  are o singularitate aparentă în  $z_0 = 0$ . Dacă încercăm să aplicăm teorema de caracterizare a polilor observăm că  $\sin 0 = 0$  deci nu se poate aplica. În schimb fie dezvoltăm în serie Laurent în jurul lui  $z_0$  și folosind deja menționata dezvoltare:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

vedem că:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

și prin urmare nu avem termeni cu exponent negativ deci  $z_0$  este singularitate aparentă conform definiției.

În același timp putem observa că

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

deci aplicand teorema de caracterizare ajungem la acelasi rezultat.  $\square$

**Teorema de caracterizare a singularitatilor esentiale:**

Singularitatea  $z_0$  este o singularitate esentiala daca si numai daca **limita**  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  **nu exista** iar  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq \infty$ .

 **Exemplu:**

Functia  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  are in  $z_0 = 0$  o singularitate esentiala.

**Metoda 1:** Limita  $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$  nu exista si  $\lim_{z \rightarrow 0} |e^{\frac{1}{z}}| \neq \infty$ .

Pentru prima limita alegem  $z_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  si  $w_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Atunci  $f(z_n) = e^n$  si  $f(w_n) = e^{-n}$  dar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n)$$

Pentru a argumenta relatia  $\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| \neq \infty$  putem considera aceleasi siruri. Atunci  $|e^z| = e^x$ , pentru  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  si prin urmare:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(w_n)|.$$

**Metoda 2:** Pe de alta parte putem sa dezvoltam in serie Laurent functia  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  in jurul punctului  $z_0 = 0$ . Pornim din nou de la dezvoltarea in serie Taylor, de data aceasta a lui  $e^z$  in  $z_0 = 0$ :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

De unde rezulta:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Aceasta ultima identitate arata ca dezvoltarea Laurent a lui  $f$  in jurul lui  $z_0 = 0$  **are o infinitate de termeni cu exponent negativ**.

**Reziduul unei functii:**

Fie  $D \subset \mathbb{C}$  deschisa,  $z_0 \in D$ ,  $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa si  $\varepsilon > 0$ , astfel ca  $D(z_0, \varepsilon) \subset D$ . Atunci numim:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz$$

reziduul lui  $f$  in  $z_0$ .

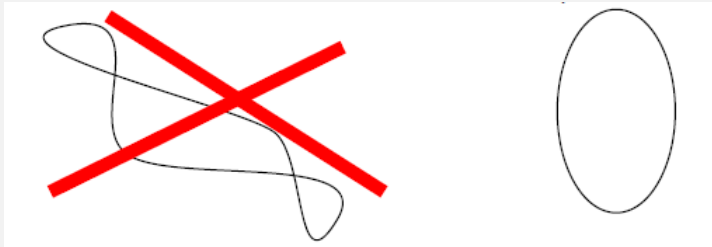


**Remarca:**

- Reziduul nu depinde de alegerea razei  $\varepsilon$ .
- $z_0$  nu trebuie sa fie in mod obligatoriu o singularitate dar cand nu este singularitate reziduul va fi 0.

**Curba inchisa simpla:**

O curba inchisa  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  se numeste **simpla**, atunci cand pe intervalul  $[a, b)$  este injectiva. Din punct de vedere geometric asta inseamna ca nu are **puncte de auto-intersectii**.

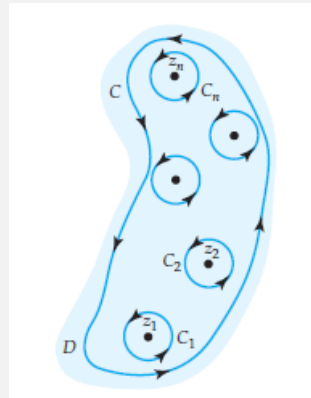


**Teorema reziduurilor:**

Fie  $D \subset \mathbb{C}$  un domeniu,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  puncte distincte in  $D$  si  $f : D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  **olomorfa**.

Atunci pentru orice curba neteda pe portiuni, **inchisa simpla** si **pozitiv orientata**  $c$ , care se afla in totalitate in  $D$  si contine in interior punctele  $z_1, z_2, \dots, z_n$  avem relatia:

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$



**Remarca:**

Pentru o curba  $c$  **orientata negativ** se obtine:

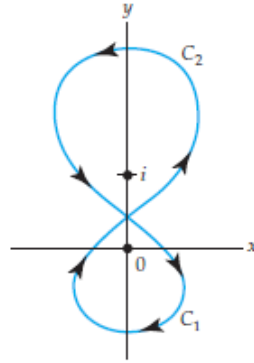
$$\int_c f(z)dz = -2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$



 **Exemplu:**

Vom evalua urmatoarea integrala:

$$\int_c \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz$$



unde  $c$  este curba din desenul alaturat:

Se observa usor ca  $c = c_1 \cup c_2$  si  $c_2$  este orientata pozitiv iar  $c_1$  este orientata negativ. Functia  $f(z) = \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2}$  are o singularitate izolata in  $c_1$  in punctul  $z_1 = 0$  si alta in  $c_2$  in punctul  $z_2 = i$ .

Pentru inceput avem:

$$\int_{c_1 \cup c_2} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = \int_{c_1} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz + \int_{c_2} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz$$

Apoi conform teoremei reziduurilor:

$$(\star) \int_{c_1} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = -2\pi i \cdot \text{Res} \left( \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2}, 0 \right)$$

si

$$(\star\star) \int_{c_2} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = 2\pi i \cdot \text{Res} \left( \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2}, i \right).$$

□

Din moment ce reziduurile devin instrumente importante in calculul integralelor avem nevoie de metode mai rapide de evaluare a acestora.

**Calculul reziduurilor:**

i) Daca functia olomorfa  $f$  are in punctul  $z_0$  un pol de ordin  $m$ ,  $m \geq 1$ , atunci:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z))$$

Pentru un pol simplu ( $m = 1$ ) avem:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z).$$

### Calculul reziduurilor:

ii) In general:

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1},$$

unde  $a_{-1}$  este coeficientul lui  $\frac{1}{z - z_0}$  dezvoltarea Laurent a lui  $f$  in jurul punctului  $z_0$ .



### Formulele integrale ale lui Cauchy

$\implies$  Fie  $G$  un domeniu simplu conex si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Atunci pentru orice curba inchisa neteda pe portiuni  $c$  din  $D$  are loc:

$$\int_c f(z) dz = 0,$$

deoarece  $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0$  pentru o functie olomorfa in  $z_0$ .

$\implies$  Fie  $G$  un domeniu si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Atunci pentru o multime  $D(z_0, \varepsilon) \subset\subset D$ :

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

deoarece  $z_0$  este un pol pentru functia din interiorul integralei si:

$$\text{Res} \left( \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, z_0 \right) = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n}{dz^n} \left( (z-z_0)^{n+1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

pentru orice functie olomorfa  $f$ .



### Exemplu:

In ultimul exemplu ambele singularitati sunt poli, deoarece:

$$f(z) = \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} = \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}$$

si notand  $g(z) = \frac{z^3+3}{(z-i)^2}$  avem scrierea  $f(z) = \frac{g(z)}{z}$ , iar  $g$  este olomorfa in  $z_1 = 0$  si  $g(0) \neq 0$ .

Din teorema de carcterizare a polilor rezulta ca  $f$  are in  $z_1 = 0$  un **pol simplu**. Din aceasta cauza:

$$\text{Res} \left( \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2}, 0 \right) = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 + 3}{(z-i)^2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Prin urmare:

$$(*) \int_{c_1} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = -2\pi i \cdot (-3) = 6\pi i.$$

Pe de alta parte:

$$f(z) = \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} = \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}$$

si  $h(z) = \frac{z^3+3}{z}$  este olomorfa si are proprietatea  $h(i) \neq 0$ . Asadar  $f$  are in  $z_2 = i$  un pol de **ordinul doi**. Deci:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left( \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2}, i \right) &= \lim_{z_0 \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( (z-i)^2 \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} \right) \\ &= \lim_{z_0 \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^3 + 3}{z} \right) = \lim_{z_0 \rightarrow i} \frac{3z^2 \cdot z - (z^3 + 3)}{z^2} \\ &= \frac{-2i - 3}{-1} = 2i + 3. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (**) \int_{c_2} \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = 2\pi i \cdot (2i + 3) = -4\pi + 6\pi i$$

si in concluzie:

$$\int_c \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz = 6\pi i + -4\pi + 6\pi i = -4\pi + 12\pi i.$$

□

### Teorema semireziduurilor:

Fie  $D \subset \mathbb{C}$  un domeniu simplu conex si  $c$  o curba simpla inchisa, neteda pe portiumi in domeniul  $D$ . Consideram o functie  $f$  care admite in interiorul curbei  $c$  un numar finit de singularitati izolate  $z_1, z_2, \dots, z_n$  si un numar finit de **poli simpli**  $w_1, w_2, \dots, w_p$  **situati pe curba  $c$**  astfel ca:

$$f : D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, w_1, w_2, \dots, w_p\} \rightarrow \mathbb{C}$$

este olomorfa. Atunci:

i) daca  $c$  admite o **tangenta unica** in  $w_1, w_2, \dots, w_p$  atunci:

$$\int_c f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rez}(f, z_k) + \pi i \sum_{j=1}^p \text{Rez}(f, w_j)$$

ii) daca  $\alpha_j$  este **unghiul dintre semitangentele** in  $w_j$  la  $c$ :

$$\int_c f dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rez}(f, z_k) + i \sum_{j=1}^p (\pi - \alpha_j) \text{Rez}(f, w_j)$$

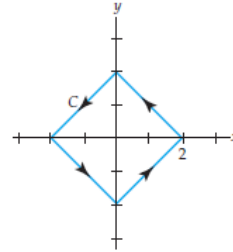


### Exemplu:

Vom calcula integrala:

$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)} dz,$$

unde  $c$  este curba alaturata. Se observa usor ca cele doua singularitati ale integrandului sunt  $z_1 = 0$  si  $z_2 = 2$  ambele fiind poli simpli iar ultima fiind siuitata pe curba.



In punctul  $z_2$  curba nu admite o tangenta unica iar unghiul format de semitangente va fi  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Conform teoremei semireziduurilor avem:

$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)} dz = 2\pi i \operatorname{Rez}(f, 0) + i(\pi - \frac{\pi}{2}) \operatorname{Rez}(f, 2)$$

Pentru poli simpli avem formulele:

$$\operatorname{Rez}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{e^z}{z(z-2)} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Rez}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{e^z}{z(z-2)} = \frac{e^2}{2}.$$

In concluzie:

$$\int_c \frac{e^z}{z(z-2)} dz = -\pi i + i \frac{\pi}{2} \frac{e^2}{2}$$

□



### Probleme propuse

**Problema 1.** *Demonstrati ca:  $\sinh z = 0$  daca si numai daca  $z = n\pi i$  si  $\cosh z = 0$  daca si numai daca  $z = (\frac{1}{2} + n)\pi i$ .*

**Problema 2.** *Scriti urmatoarele numere complexe in forma polara:*

$$z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \quad z_2 = 1 - i.$$

i) *Aflati argumentul principal  $\operatorname{Arg}(z_1)$  si apoi calculati  $(-\sqrt{3} - i)^{50}$ .*

ii) *Pentru numerele complexe  $z_1 = -1, z_2 = 5i$ , verificati ca au loc:*

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$$

in schimb:

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2). \end{aligned}$$

**Problema 3.** Aratati ca  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$  si  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ . Demonstrati identitatea:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}), \quad z, w \in \mathbb{C}$$

si inegalitatea triunghiului  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

**Problema 4.** Schitati multimea punctelor  $z$ , in planul complex, care satisfac urmatoarele conditii:

- i)  $1 < |z - 1 - i| \leq 2$
- ii)  $|z - i| = |z - 1|$
- iii)  $|\operatorname{Arg}(z)| < \frac{\pi}{4}$
- iv)  $\operatorname{Re}((1 + i)z - 1) = 0$
- v)  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ .

**Problema 5.** Rezolvati in  $\mathbb{C}$  ecuatiile:

$$\begin{aligned} \sin z &= 2 \\ \cos z &= -3 + i \end{aligned}$$

**Problema 6.** Rezolvati in  $\mathbb{C}$  ecuatiile:

$$\begin{aligned} z^6 &= 1 + i \\ z^2 + z + 1 &= 0 \\ z^4 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Calculati apoi  $\sqrt{3 + \sqrt{3}i}$ .

**Problema 7.** Aratati ca urmatoarele functii sunt olomorfe in  $z_0 = 0$ :

$$f(z) = \cos z, \quad g(z) = \sinh z, \quad h(z) = e^z.$$

**Problema 8.** Demonstrati identitatile:

$$\begin{aligned} \cos(z + w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \\ \sin(2z) &= 2 \sin z \cos z \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \end{aligned}$$

pentru orice  $z, w \in \mathbb{C}$ .

**Problema 9.** Calculati reziduurile funcțiilor de mai jos în punctele specificate

i)  $f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^3}$ ,  $\operatorname{Rez}(f, 0) = ?$

ii)  $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ ,  $\operatorname{Rez}(f, 0) = ?$

iii)  $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$ ,  $\operatorname{Rez}(f, 0) = ?$

iv)  $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$   $\operatorname{Rez}(f, 0) = ?$

**Problema 10.** Calculati integralele:

i)  $I = \int_c \frac{dz}{z^5 + 1}$ , unde  $c : x^2 + y^2 = 2x$

ii)  $J = \int_c \frac{z - e}{z^4 + 6}$  unde  $c : |z| = 3$

iii)  $K = \int_{|z+2|=5} \frac{3i + z^4}{(z + 3)^3} dz$

iv)  $\int_{|z|=3} e^{z^{-1}} z^3 dz$

**Problema 11.** Calculati integrala:

$$\int_c \frac{2z - 1}{z^2(z^3 + 1)} dz$$

unde  $c$  este dreptunghiul definit de  $x = -2$ ,  $x = 1$ ,  $y = -\frac{1}{2}$  și  $y = 1$ .

**Problema 12.** Calculati integrala:

$$\int_c \frac{1}{z^6 + 1} dz$$

unde  $c$  semicercul definit de  $y = 0$  și  $y = \sqrt{4 - x^2}$ .

**Problema 13.** Calculati integrala:

$$\int_c z^2 e^{\frac{1}{z}} + \frac{ze^z}{z^4 - \pi^4} dz$$

unde  $c$  este curba  $4x^2 + y^2 = 16$

## Bibliografie

- [1] D. G. Zill, P. D. Shanahan. A First Course in Complex Analysis with Applications, *Jones and Bartlett Publishers, Inc.*, 2003.
- [2] C. I. Hedrea. Notite de curs: Matematici speciale, 2016.
- [3] R. Negrea. Notite curs: Matematici speciale, 2020
- [4] K. Fritzsche. Grundkurs Funktionentheorie: Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen, *Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg*, 2009.

