Capitolul 1

Capitol introductiv

Studiul fenomenelor naturii i-a condus pe oamenii de ştiinţă la crearea unor modele matematice care să cuprindă într-o formulare abstractă principalele caracteristici ale acestora. Pentru fenomenele evolutive cel mai potrivit model s-a dovedit acela dat sub forma unei ecuaţii (sau sistem de ecuaţii) diferenţiale.

Într-o formulare aproximativă prin *ecuaţie diferenţială* se înţelege o ecuaţie în care necunoscuta este o funcţie de una sau mai multe variabile care apare (în ecuaţie) alături de derivatele sale până la un anumit ordin. Ordinul maxim al acestor derivate se numeşte *ordinul ecuaţiei*. Studiul ecuaţiilor diferenţiale într-o manieră sistematică beneficiază de o clasificare a acestora. Cea mai uzuală clasificare este cea dată de numărul de variabile independente de care depinde funcţia necunoscută. În cazul în care funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile independente, iar în ecuaţie apar efectiv derivatele funcţiei în raport cu aceste variabile, ecuaţia se numeşte *cu derivate parţiale*. Dacă însă funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă, ecuaţia se numeşte *ordinară*. Probabil cel mai cunoscut model de ecuaţie diferenţială ordinară este cel dat de *legea lui Newton*

$$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t)) \tag{0.1}$$

care exprimă legea de mişcare a unui punct material de masă m asupra căruia acţionează o forţă F. În relaţia de mai sus $x(t)$, $x'(t)$) şi $x''(t)$ reprezintă poziţia, viteza şi respectiv acceleraţia punctului material la momentul t.

Dacă, de exemplu, F este forţa de gravitaţie, atunci relaţia (0.1) se scrie sub forma

$$mx'' = -mg \tag{0.2}$$

care, prin integrare, conduce la

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,$$

C_1 şi C_2 fiind constante oarecare.

Aşadar, problema determinării legii de mişcare a unui punct material sub acţiunea unei forţe (care depinde de poziţia şi viteza punctului material) revine la aflarea unei funcţii care verifică o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea de forma

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)). \tag{0.3}$$

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n este

$$F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}t) = 0. \tag{0.4}$$

În anumite condiţii, ecuaţia (0.4) se poate scrie sub forma echivalentă

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}) \tag{0.5}$$

numită şi *forma normală*. Precizăm că pentru simplificarea expunerii, atunci când nu este pericol de confuzie, se renunţă la scrierea argumentului funcţiei necunoscute.

Prin *soluţie* a ecuaţiei diferenţiale ordinare (5) pe intervalul $(a, b) \subset \mathbb{R}$ înţelegem o funcţie $x(\cdot)$ pentru care există derivatele $x', x'', ..., x^{(n)}$ şi verifică relaţia (0.5) pe (a, b), adică

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(n-1)}(t)), \ \forall\, t \in (a, b).$$

Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale se numeşte *soluţie generală*.

Pentru a individualiza una dintre soluţii, sunt necesare informaţii suplimentare despre aceasta. Această problemă legată de condiţiile care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei unei ecuaţii diferenţiale ordinare a fost studiată pentru prima dată de matematicianul francez Augustin Cauchy (1789–1857) la începutul secolului al XIX-lea. Odată stabilit un rezultat de existenţă şi unicitate pentru o ecuaţie diferenţială, rămâne problema determinării efective a soluţiei. S-a demonstrat că de cele mai multe ori acest lucru este imposibil – clasa ecuaţiilor diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi (integrări) fiind foarte restrânsă. Tehnica de calcul foarte performantă permite aproximarea soluţiei unei ecuaţii diferenţiale cu o acurateţe suficient de bună, diminuând astfel interesul pentru găsirea soluţiei exacte.

Totuşi, exprimarea soluţiei printr-o formulă explicită rămâne un fapt incitant şi util, motiv pentru care am şi introdus un paragraf ce conţine câteva tipuri de ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi.

1.1 Ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin metode elementare

În acest capitol vom prezenta câteva tipuri clasice de ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii pot fi determinate prin operaţii de integrare.

Ecuaţii cu variabile separabile

O ecuaţie de forma

$$x' = f(t)g(x) \tag{1.1}$$

unde $f :]t_1, t_2[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $g :]x_1, x_2[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in]x_1, x_2[$ se numeşte *ecuaţie cu variabile separabile.*

Scriind ecuaţia (1.1) sub forma echivalentă

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt \tag{1.2}$$

şi integrând (1.2) de la t_0 la t ($t_0, t \in]t_1, t_2[$) obţinem

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds.$$

Dacă notăm $x(t_0) = x_0$ şi

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tau}{g(\tau)}, \quad x \in]x_1, x_2[,$$

având în vedere că ipotezele asupra lui g implică faptul că G este inversabilă pe mulţimea $G(]x_1, x_2[)$ rezultă că soluţia x a ecuaţiei (1.1) este dată de

$$x(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s) ds\right),\ t \in]t_1, t_2[. \tag{1.3}$$

Observaţie. Este evident că în (1.3) soluţia $x(\cdot)$ este definită pentru valorile lui t pentru care $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$ se află în domeniul de definiţie al funcţiei G^{-1}.

Exemplu. Să se integreze ecuaţia

$$(e^t + 1)^3 e^{-t} dx + (e^x + 1)^2 e^{-x} dt = 0.$$

Soluţie. Este o ecuaţie cu variabile separabile de forma $x'=f(t)g(x)$ unde $f,g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = -e^t(e^t+1)^3$, $g(x) = (e^x+1)^2 e^{-x}$ care se rezolvă obţinându-se relaţia

$$2(e^x+1)^{-1} + (e^t+1)^{-1} = C$$

de unde

$$x(t) = \ln\left(\frac{2}{C-(e^t+1)^{-2}} - 1\right).$$

Ecuaţii omogene

Ecuaţia

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right) \tag{1.4}$$

se numeşte *ecuaţie omogenă* deoarece funcţia $f(t,x) := h\left(\frac{x}{t}\right)$ este omogenă de gradul zero. Dacă presupunem că $h(u) \neq u$ pe domeniul său de definiţie, atunci, făcând substituţia $ut = x$, ecuaţia (1.4) devine

$$u' \equiv \frac{1}{t}[h(u) - u]$$

adică o ecuaţie cu variabile separabile care se tratează după modelul anterior.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}\cdot$$

Soluţie. Ecuaţia se mai scrie sub forma

$$x' = \frac{t}{x} + \frac{x}{t}$$

şi făcând substituţia $ut = x$ devine

$$u\,du = \frac{dt}{t}$$

de unde prin integrare găsim

$$\frac{1}{2}u^2 - \ln|t| = \frac{1}{2}C,$$

apoi, revenind la substituţia făcută, se obţine

$$x^2 = t^2 \ln t^2 + Ct^2.$$

Ecuaţii liniare

Ecuaţiile liniare sunt de forma

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1.5}$$

unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue şi reprezintă o clasă importantă de ecuaţii pentru care soluţiile pot fi găsite prin cuadraturi.

Dacă $b = 0$, ecuaţia (1.5) este cu variabile separabile şi are soluţia

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}, \tag{1.6}$$

unde $t_0, t \in I$ şi $C = x(t_0)$.

Pentru determinarea soluţiei în cazul general ($b \neq 0$) vom folosi metoda cunoscută sub numele de "variaţia constantelor", ce constă în înlocuirea constantei C în (1.6) cu o cantitate variabilă.

În cazul nostru, căutăm soluţia ecuaţiei (1.5) sub forma

$$x(t) = \varphi(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

de unde rezultă că φ este o funcţie derivabilă şi avem:

$$\varphi'(t) = x'(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} - x(t)a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}.$$

Deoarece am presupus că x este soluţie a ecuaţiei (1.5), rezultă

$$\varphi'(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}b(t)$$

de unde deducem

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau}b(s).$$

Dar $\varphi(t_0) = x(t_0)$ şi $x(t) = \varphi(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ de unde rezultă

$$x(t) = x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau}ds. \tag{1.7}$$

Exemplu. Să se integreze ecuaţia

$$x' = -2tx + e^{-t^2}.$$

Aceasta este o ecuaţie liniară cu $a(t) = -2t$, $b(t) = e^{-t^2}$. Aplicând formula (1.7) găsim

$$x(t) = x(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} 2\tau\, d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{-s^2} e^{-\int_{s}^{t} 2\tau\, d\tau} ds$$

unde $t_0, t \in \mathbb{R}$, sau

$$x(t) = e^{-t^2}(t + C)$$

unde $C = e^{t_0^2} x(t_0) - t_0$.

Ecuaţii de tip Bernoulli

Ecuaţia

$$x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha},$$

unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, iar $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, se numeşte *ecuaţie de tip Bernoulli*.

Prin substituirea $y = x^{1-\alpha}$ această ecuaţie se transformă în ecuaţie liniară

$$y'(t) = -(\alpha - 1)[a(t)y(t) + b(t)].$$

După rezolvarea acestei ecuaţii se revine la substituţie şi se obţine soluţia ecuaţiei iniţiale.

Exemplu. Ecuaţia diferenţială

$$x' = -\frac{1}{t}x + \frac{x^2}{t^2}, \quad x, t \neq 0$$

este de tip Bernoulli cu $a(t) = -\frac{1}{t}$, $b(t) = \frac{1}{t^2}$, $\alpha = 2$. Prin substituţia $y = x^{-1}$ obţinem ecuaţia

$$y' = \frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2},$$

care are soluţia generală $y = \frac{2Ct^2 + 1}{2t}$, $C \in \mathbb{R}$ şi deci soluţia ecuaţiei iniţiale este

$$x = \frac{2t}{2Ct^2 + 1}.$$

Ecuaţii de tip Riccati

Ecuaţia diferenţială

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{1.8}$$

unde $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, se numeşte *ecuaţie de tip Riccati*.

Facem menţiunea că în general o astfel de ecuaţie nu poate fi rezolvată prin cuadraturi afară de cazul când, printr-un mijloc oarecare, se cunoaşte o soluţie particulară a sa.

Într-adevăr, dacă φ este o soluţie paticulară a ecuaţiei (1.8), iar x o soluţie oarecare a sa, atunci $y = x - \varphi$ satisface ecuaţia Bernoulli ($\alpha = 2$)

$$y' = [b(t) + 2a(t)\varphi(t)]y + a(t)y^2.$$

Deci, funcţia y poate fi obţinută cu ajutorul ecuaţiei liniare asociate de unde va rezulta soluţia generală a ecuaţiei (1.8), $x = y + \varphi$.

Exemplu. Ecuaţia

$$x' = -x^2 - \frac{1}{t}x + \frac{4}{t^2}$$

este de tip Riccati cu $a = -1$, $b = -\frac{1}{t}$, $c = \frac{4}{t^2}$ şi are soluţia particulară $\varphi = \frac{2}{t}\cdot$

Substituţia $x = y + \frac{2}{t}$ transformă ecuaţia iniţială într-o ecuaţie de tip Bernoulli

$$y' = -\frac{5}{t}y - y^2,$$

care, la rândul său prin schimbarea de variabile $z = \frac{1}{y}$, se transformă în ecuaţie liniară

$$z' = \frac{5}{t}z + 1.$$

Soluţiile succesive ale acestor ecuaţii sunt:

$$z = \frac{Ct^5 - t}{4},\ y = \frac{4}{Ct^5 - t},\ x = \frac{2}{t} + \frac{4}{Ct^5 - t}\cdot$$

Ecuaţii cu diferenţiale totale exacte

Fie ecuaţia diferenţială

$$x' = \frac{g(t,x)}{h(t,x)} \tag{1.9}$$

unde $g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue pe mulţimea deschisă Ω iar $h \neq 0$ în Ω. Spunem că ecuaţia (1.9) este cu diferenţială exactă dacă există $F \in C^1(\Omega)$ astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -g(t,x), \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = h(t,x). \end{cases} \quad (t,x) \in \Omega$$

În aceste condiţii, ecuaţia (1.9) se scrie sub forma

$$dF(t, x(t)) = 0,$$

de unde rezultă că orice soluţie a ecuaţiei (1.9) verifică egalitatea

$$F(t, x(t)) = C, \tag{1.10}$$

C fiind o constantă reală. Are loc şi rezultatul reciproc: pentru orice constantă reală C, formula (1.10) defineşte (conform teoremei funcţiilor implicite, deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial x} = h \neq 0$ pe Ω) o funcţie $x = x(t)$ care pe un anumit interval este soluţie a ecuaţiei (1.9). Se pune întrebarea: cum putem identifica ecuaţiile care sunt cu diferenţiale exacte iar atunci când au această proprietate cum putem determina funcţia F?

Pentru aceasta dăm, fără demonstraţie, următorul rezultat.

Teoremă 1.1. *Dacă Ω este un domeniu simplu conex şi $\dfrac{\partial h}{\partial t}, \dfrac{\partial g}{\partial x} \in C^1(\Omega)$, atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia* (1.9) *să fie cu diferenţială exactă este ca*

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) \tag{1.11}$$

pentru orice $(t,x) \in \Omega$. În aceste condiţii, funcţia F este dată de

$$F(t,x) = -\int_{t_0}^{t} g(s,x)ds + \int_{x_0}^{x} h(t_0,\xi)d\xi = -\int_{t_0}^{t} g(s,x_0)ds + \int_{x_0}^{x} h(t,\xi)d\xi \tag{1.12}$$

unde (t_0, x_0) este un punct arbitrar în Ω.

Factor integrant

În unele cazuri, o ecuaţie de forma

$$h(t,x)dx - g(t,x)dt = 0 \tag{1.13}$$

care nu este cu diferenţială exactă poate fi adusă la această formă prin înmulţirea cu o funcţie $\rho(t,x)$, $\rho \in C^1(\Omega)$, $\rho \neq 0$, $(t,x) \in \Omega$, funcţie care mai poartă denumirea de *factor integrant*. Presupunând că o asemenea funcţie există, din teorema anterioară rezultă că ea satisface relaţia

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho g)}{\partial x}$$

sau

$$h\frac{\partial \rho}{\partial t} + g\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}\right), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{1.14}$$

Aşadar, dacă există o funcţie ρ care satisface (1.14), atunci prin înmulţirea cu ρ a ecuaţiei (1.13) (sau (1.9)), aceasta este redusă la o ecuaţie cu diferenţială exactă.

Prezentăm două situaţii în care funcţia ρ poate fi determinată:

(i) Presupunem că expresia

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \varphi(t) \text{ nu depinde de } x.$$

Atunci, putem determina funcţia $\rho = \rho(t)$ (independentă de x) ca soluţie a ecuaţiei

$$\rho' = \varphi(t)\rho.$$

(ii) Presupunem că expresia

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \psi(x) \text{ nu depinde de } t.$$

Atunci, putem determina funcţia $\rho = \rho(x)$ (independentă de t) ca soluţie a ecuaţiei

$$\rho' = \psi(x)\rho.$$

Exemplu. Fie ecuaţia diferenţială

$$x' = \frac{2(tx - x^3)}{6tx^2 - t^2}.$$

Această ecuaţie este de forma (1.9) cu $g(t,x) = 2(tx - x^3)$, $h(t,x) = = 6tx^2 - t^2$ care verifică relaţia (1.11) deci există funcţia F dată de formula (1.12)

$$\begin{aligned} F(t,x) &= 2\int_{t_0}^{t}(sx - x^3)ds + \int_{x_0}^{x}(t_0^2 - 6t_0\xi^2)d\xi = \\ &= t^2x - 2tx^3 - t_0^2x_0 + 2t_0x_0^3 \end{aligned}$$

iar soluţia ecuaţiei este dată sub formă implicită

$$t^2x - 2tx^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţii de tip Lagrange, Clairaut. Metoda parametrului

Ecuaţia de forma

$$x(t) = t\varphi(x'(t)) + \psi(x'(t)) \tag{1.15}$$

unde $\varphi, \psi \in C^1(I)$ ($\varphi(r) \neq r$ pentru orice $r \in \mathbb{R}$), I fiind un interval al axei reale se numeşte *ecuaţie de tip Lagrange.* Dacă $\varphi(x') = x'$, ecuaţia (1.15) este *de tip Clairaut.*

Pentru integrarea acestor tipuri de ecuaţii se foloseşte aşa numita *metodă a parametrului* care constă în următoarele:

Se notează în ecuaţia diferenţială (1.15) $x' = p$ şi se diferenţiază ecuaţia. Se obţine în acest fel o ecuaţie diferenţială liniară în care luăm pe t ca funcţie şi p ca variabilă. În urma integrării, găsim soluţia generală a ecuaţiei (1.15), în forma parametrică

$$\begin{cases} t = f(p, C) \\ x = g(p). \end{cases} \tag{1.16}$$

Relaţiile (1.16) dau reprezentarea parametrică a soluţiei generale a ecuaţiei (1.15).

În cazul ecuaţiei Clairaut, soluţia este dată de o familie de drepte a cărei înfăşurătoare este soluţia singulară a ecuaţiei.

Prin înfăşurătoarea unei familii de curbe se înţelege o curbă care, în fiecare punct al său, este tangentă la una din curbele familiei date şi diferă de acea curbă în orice vecinătate a punctului respectiv.

Exemplul 1.1. Ecuaţia

$$x(t) = -2tx'(t) - x'(t)^2$$

este de forma (1.15) cu $\varphi(x') = -2x'$, $\psi(x') = -x'^2$, deci este o ecuaţie de tip Lagrange.

Notăm $x' = p$ şi ecuaţia devine

$$x = -2tp - p^2$$

şi diferenţiind ambii membri ai ecuaţiei (ţinând cont că $x' = p$)

$$3p = -2t\frac{dp}{dt} - 2p\frac{dp}{dt}$$

sau

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{2t}{3p} - \frac{2}{3}$$

care este o ecuaţie liniară în t ca funcţie de p şi are soluţia

$$t = Cp^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}p,$$

de unde rezultă soluţia generală a ecuaţiei în forma parametrică

$$\begin{cases} t = Cp^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{5}p \\ x = -\dfrac{p^2}{5} - 2Cp^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Exemplul 1.2. Ecuaţia

$$x(t) = tx'(t) + \frac{1}{2}x'(t)^2,$$

este de tip Clairaut cu $\psi(x') = \dfrac{1}{2}x'^2$. Notând $x' = p$, ecuaţia devine (după diferenţiere)

$$p'(p + t) = 0$$

care conduce la soluţia generală

$$x = tC + \frac{1}{2}C^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

şi la soluţia singulară

$$x = -\frac{1}{2}t^2.$$

Micşorarea ordinului unei ecuaţii diferenţiale

Prezentăm două clase de ecuaţii diferenţiale de ordin superior care pot fi transformate în ecuaţii de ordin strict mai mic.

Ecuaţia de forma

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, ..., x^{(n)}) = 0 \quad (0 < k < n) \tag{1.17}$$

se transformă prin substituţia $y = x^{(k)}$ în ecuaţia

$$F(t, y, y', ..., y^{(n-k)}) = 0. \tag{1.18}$$

Dacă ecuaţia (1.18) se poate rezolva, atunci, revenind la substituţia făcută, ecuaţia (1.17) se rezolvă în urma a "k" integrări succesive.

Ecuaţiile de forma

$$F(x, x', ..., x^{(n)}) = 0$$

îşi reduc ordinul cu o unitate dacă facem substituţia $p = x'$ şi considerăm p, noua funcţie necunoscută de variabilă x.

În acest fel avem:

$$x'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot p \quad \text{ş.a.m.d.}$$

Exemplu. Să se integreze ecuaţia

$$tx'' + x' = 4t.$$

Soluţie. Notăm $x' = y$ şi obţinem ecuaţia

$$ty' + y = 4t$$

care este liniară şi are soluţia $y = 2t + \dfrac{C_1}{2t}$ şi, revenind la substituţie, găsim $x = t^2 + C_1 \ln t + C_2$.

Ecuaţii de tip Euler

O ecuaţie diferenţială de forma

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = f(t) \tag{1.19}$$

unde $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, iar $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte *ecuaţie de tip Euler.*

Cu ajutorul substituţiilor

$$\begin{cases} t = e^s \\ x(t) = y(s) \end{cases}$$

pentru $t \in \mathbb{R}_+^*$ şi $s \in \mathbb{R}$, ecuaţia (1.19) devine ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi de ordin n în necunoscuta y şi variabila s. Acest lucru se vede imediat din calculul diferenţialelor în (1.19)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{1}{t} = e^{-s}\,\frac{dy}{ds}$$

apoi în mod recurent găsim că

$$\frac{d^k x}{dt^k} = e^{-ks}\left(C_1 \frac{dy}{ds} + C_2 \frac{dy^2}{ds^2} + \cdots + C_k \frac{d^k y}{ds^k}\right), \quad k = 2, 3, ..., n.$$

Exemplu. Să se rezolve problema

$$\begin{cases} t^2 x'' - 2tx' + 2x = 2 \\ x(1) = x'(1) = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Făcând substituţia

$$\begin{cases} t = e^s \\ x(t) = y(s), \end{cases}$$

ecuaţia devine

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

care are soluţia $y(s) = e^{2s} - e^s + 1$, şi, revenind la ecuaţia iniţială, aceasta are soluţia $x = t^2 - t + 1$.

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul seriilor de puteri

În cele ce urmează, vom prezenta o metodă care constă în obţinerea soluţiei unei probleme Cauchy ca sumă a unei serii de puteri. Astfel de soluţii se mai numesc *analitice*. Fără a intra în detalii (pentru cei interesaţi recomandăm [49]), precizăm faptul că dacă funcţia f este analitică pe domeniul său de definiţie, atunci *problema Cauchy* asociată (cu x_0 din domeniul lui f)

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

are o soluţie analitică.

În continuare prezentăm, pentru ilustrare, trei probleme rezolvate pe această cale.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi. Metoda este eficientă mai ales pentru ecuaţii diferenţiale liniare şi constă în căutarea unei soluţii de forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t-t_0)^n. \tag{1.20}$$

Înlocuind x în ecuaţie, prin identificarea coeficienţilor puterilor egale ale lui t, rezultă o relaţie de recurenţă între aceştia.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x'' + tx' + x = 0. \tag{1.21}$$

Căutând o soluţie de forma (1.20) cu $t_0 = 0$ şi înlocuind-o în ecuaţia (1.21), obţinem relaţia:

$$(C_0 + 2C_2) + t(2C_1 + 6C_3) + t^2(3C_2 + 12C_4) + \cdots +$$
$$+t^n[(n+1)C_n + (n+1)(n+2)C_{n+2}] + \cdots = 0$$

de unde

$$C_0 + 2C_2 = 0,\ 2C_1 + 6C_3 = 0, ..., C_n(n+2)C_{n+2} = 0, ...$$

Astfel, am obţinut formula de recurenţă

$$C_{n+2} = -\frac{C_n}{n+2},$$

care dă

$$C_2 = -\frac{C_0}{2},\ C_4 = -\frac{C_2}{4} = \frac{C_0}{2\cdot 4},\ \cdots\ ,\ C_{2n} = \frac{(-1)^n C_0}{(2n)!!}, \cdots$$
$$C_3 = -\frac{C_1}{3},\ C_5 = \frac{C_1}{3\cdot 5},\qquad \cdots\ ,\ C_{2n+1} = \frac{(-1)^n C_1}{(2n+1)!!}, \cdots$$

Rezultă că

$$x(t) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-1}}{(2n+1)!!}\cdot$$

Se verifică imediat că cele două serii de puteri care apar în membrul drept sunt convergente pentru orice t. De asemenea, cei doi coeficienţi C_0 şi C_1 pot fi determinaţi dacă se prescriu condiţii de tip Cauchy pentru x, x' în $t = 0$.

Exemplul 2. Să se rezolve problema Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l}(4-t^2)x'' - 2tx' + 12x = 0\\ x(1) = -7,\ x'(1) = 3.\end{array}\right. \tag{1.22}$$

Vom folosi metoda seriilor de puteri şi vom lua, în relaţia (1.20), $t_0 = 1$, deci $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(t-1)^n$. De asemenea, dezvoltăm şi coeficienţii ecuaţiei (1.22) în serie de puteri în jurul lui $t_0 = 1$. Avem:

$$\begin{array}{l}4 - t^2 = 3 - 2(t-1) - (t-1)^2\\ -2t = -2 - 2(t-1)\\ 12 = 12\end{array}$$

şi ecuaţia (1.22) devine

$$\sum_{n=0}^{\infty}(12-n-n^2)C_n(t-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty}2n^2C_n(t-1)^{n-1} +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(3n^2-3n)C_n(t-1)^{n-2} = 0$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}[3(n+1)(n+2)C_{n+2} - 2(n+1)^2C_{n+1} - (n-3)(n+4)C_n](t-1)^n = 0$$

şi conduce la relaţia de recurenţă

$$C_{n+2} = \frac{2(n+1)^2C_{n+1} + (n-3)(n+4)C_n}{3(n+1)(n+2)} \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.23}$$

Din condiţiile Cauchy asupra lui x, x' în $t_0 = 1$ obţinem $C_0 = -7$, $C_1 = 3$ şi folosind (1.23) rezultă $C_2 = 15$, $C_3 = 5$, $C_n = 0$ $(n = 4, 5, ...)$ iar soluţia $x(t) = -12t + 5t^2$.

Dacă coeficienţii ecuaţiei nu sunt polinoame în t, atunci aceştia se dezvoltă în serie Taylor şi se procedează în continuare ca în Exemplul 1. Ilustrăm acest lucru în:

Exemplul 3. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x'' + (\sin t)x = e^{t^2} \tag{1.24}$$

Dezvoltăm $\sin t$ şi e^{t^2} în serie Taylor în jurul lui $t = 0$ şi căutăm o soluţie sub forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

Obţinem:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},\ e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$$

apoi, înlocuind în ecuaţia (1.24), obţinem (identificând coeficienţii)

$$x = C_0\left(1 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \cdots\right) + C_1\left(t - \frac{t^4}{12} + \cdots\right) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 + \cdots, \tag{1.25}$$

adică

$$x = C_0 x_1(t) + C_1 x_2(t) + x_3(t)$$

unde x_3 este o soluţie particulară. Se arată că seriile ce apar în (1.25) sunt convergente pentru orice t.

Observaţie. Cele mai multe ecuaţii diferenţiale nu se pot rezolva prin cuadraturi. În secţiunile anterioare am prezentat câteva tipuri de ecuaţii care pot fi rezolvate prin una din metodele standard. Dar o ecuaţie poate să aibă o formă diferită de cele prezentate anterior, însă, în anumite situaţii, printr-o schimbare de variabile inspirată, această diferenţă să dispară. Precizăm că nu există o regulă (sau algoritm) de determinare a unor astfel de substituţii. Totul ţine de îndemânarea şi experienţa rezolvitorului.

1.2 Inegalitatea lui Gronwall

Rezultatul pe care îl prezentăm în această secţiune este folosit în mod frecvent la demonstrarea mărginirii soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale. Presupunem că x, f, g sunt funcţii continue pe intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$ şi, în plus, $g(t) \geq 0$ pentru orice $t \in [a, b]$.

Lema 2.1. (Gronwall) *Dacă*

$$x(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)x(s)ds, \quad t \in [a, b] \tag{2.1}$$

atunci

$$x(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t g(\tau)d\tau\right)ds,\ \ \forall\, t \in [a,b], \tag{2.2}$$

unde exp(a)=e^a, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Facem notaţia $y(t) = \displaystyle\int_a^t g(s)x(s)ds$.

Deoarece funcţiile g şi x sunt continue, rezultă că funcţia y este derivabilă şi $y'(t) = g(t)x(t)$, care împreună cu (2.1) implică

$$y'(t) \leq g(t)f(t) + g(t)y(t).$$

Înmulţind ultima inegalitate cu $\exp\left(-\displaystyle\int_a^t g(s)ds\right)$, rezultă

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\exp\left(-\int_a^t g(s)ds\right)\right) \leq f(t)g(t)\exp\left(-\int_a^t g(s)ds\right),\ \ t \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Integrând inegalitatea (2.3) pe intervalul $[a,t]$ şi ţinând cont de (2.1) se obţine (2.2). ∎

Un caz particular interesant ce rezultă din Lema 2.1 corespunde situaţiei când f = constant.

Corolarul 2.1. *Dacă x satisface inegalitatea (2.1) cu $f = M =$ constant, atunci are loc*

$$x(t) \leq M\exp\left(\int_a^t g(s)ds\right),\quad t \in [a,b]. \tag{2.4}$$

Demonstraţie. Inegalitatea (2.4) se obţine imediat din (2.2), înlocuind f cu M şi integrând prin părţi al doilea termen din membrul drept. ∎

1.3 Modelarea matematică

Procesul reprezentării problemelor (fenomenelor) lumii reale în limbajul matematicii este cunoscut sub numele de *modelare matematică*. Primul pas în acest proces este transcrierea matematică a limbajului folosit pentru descrierea problemei. De obicei, pentru ca modelul matematic să fie suplu, acceptabil din punct de vedere al rezolvării (chiar cu ajutorul tehnicii de calcul) se renunţă la o parte din variabilele ce descriu problema iniţială. În acest fel, se obţine o structură logică ideală ce ascunde în ea o problemă concretă. În cazul nostru, această structură constă în una sau mai multe ecuaţii diferenţiale.

Oscilatorul armonic

Fie ecuaţia

$$mx'' + kx = 0. \tag{3.1}$$

Această ecuaţie reprezintă modelul matematic al fenomenului fizic dat de mişcarea unui punct material de masă m suspendat de un resort elastic.

Presupunem că resortul are lungimea ℓ. Dacă de resort suspendăm un corp de masă m, acesta va avea o elongaţie $\Delta\ell$ datorată forţei elastice dată de ecuaţia $mg = k\Delta\ell$ (greutatea corpului este anulată în efect de o forţă elastică statică $\vec{F}_{eo} = -k\Delta\vec{\ell}$), $k(> 0)$ fiind constanta elastică a resortului.

Fig. 3.1.

Putem considera ca origine de măsură a elongaţiei x punctul O din Figura 3.1.b. Scoţând sistemul din poziţia de echilibru, singura forţă necompensată rămâne forţa elastică $F_e = -kx$. Aplicând principiul II al dinamicii obţinem ecuaţia diferenţială a mişcării $ma = mx'' = -kx$, adică (3.1). Într-un model mai realist în care ţinem cont şi de forţele disipative (datorate vâscozităţii), ecuaţia principiului II al dinamicii se va scrie:

$$mx'' + \alpha x' + kx = 0.$$

Dacă, în plus, asupra sistemului acţionează şi o forţă exterioară $(F(t))$, ecuaţia devine

$$mx'' + \alpha x' + kx = F(t). \tag{3.2}$$

Spunem că sistemul are *oscilaţii libere* dacă $F \equiv 0$, în caz contrar el are oscilaţii forţate.

Circuitul RLC

Să considerăm circuitul din Figura 3.2 cunoscut şi sub numele de circuit RLC–serie. El este format dintr-un generator care, furnizând o tensiune de $V(t)$ volţi, este conectat în serie cu un rezistor de R-ohmi, un inductor de L henry şi un condensator de C farazi.

Fig. 3.2

Când comutatorul este închis, prin circuit trece un curent de intensitate $I = I(t)$ amperi.

Vrem să calculăm valoarea lui I ca funcţie de timp şi sarcina $Q = Q(t)$ (coulombi) în condensator la orice moment t. Prin definiţie

$$I = \frac{dQ}{dt}, \tag{3.3}$$

astfel că este suficient să calculăm doar Q.

După cum se ştie din fizică, curentul I produce o cădere de tensiune la bornele rezistorului egală cu RI, o cădere de tensiune în inductor egală cu $L(dI/dt)$ şi o cădere de tensiune în condensator egală cu $(1/C)Q$. Legea a II-a a lui Kirchhoff afirmă că tensiunea la bornele sursei este egală cu suma căderilor de tensiune pe circuit. Aplicând această lege circuitului din Fig. 3.2 (cu comutatorul închis), obţinem:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t). \tag{3.4}$$

Din (3.3) şi (3.4) rezultă

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t). \tag{3.5}$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi neomogenă. Pentru a găsi sarcina $Q(t)$ în condensator, trebuie să determinăm soluţia generală a ecuaţiei (3.5), soluţie care depinde de două constante arbitrare. Pentru a determina aceste constante se impun condiţiile iniţiale $Q(0) = Q_0$ şi $Q'(0) = I(0) = 0$. Condiţia a doua asupra lui Q' este naturală deoarece la momentul $t = 0$ nu este curent în circuit. Pentru a determina $I(t)$, putem folosi relaţia (3.3) sau ecuaţia diferenţială

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV(t)}{dt},$$

care se obţine din (3.3) prin diferenţiere.

Observaţie. Este uşor de observat faptul că, deşi modelează fenomene diferite, din punct de vedere matematic ecuaţiile (3.2) şi (3.5) reprezintă acelaşi lucru. Analogia dintre sistemele mecanice şi electrice (analizate) este pusă în evidenţă în tabelul următor.

Tabelul 1

Sisteme mecanice	**Sisteme electrice**
Masa m	Inductanţa L
Constanta de frecare α	Rezistenţa R
Modulul de elasticitate k	Inversa capacităţii $1/C$
Deplasarea x	Sarcina condensatorului Q
Forţa exterioară $F(t)$	Tensiunea electromotoare $V(t)$
Viteza x'	Intensitatea I

Ecuaţia van der Pol

Să considerăm un circuit de tip RLC unde în locul rezistorului se pune un semiconductor. Diferenţa dintre rezistor şi semiconductor este aceea că rezistorul disipează energia la toate nivelele, pe când semiconductorul pompează energia în circuit la nivele de jos şi absoarbe energia la nivele înalte. Presupunem că pe semiconductor are loc o cădere de tensiune dată de

$$V_S = I(I^2 - a)$$

unde I este intensitatea curentului iar a, o constantă pozitivă. În plus căderile de tensiune pe inductor şi condensator sunt date de: $V_L = L\dfrac{dI}{dt}$, respectiv $\dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{I}{C}$.

Din legile lui Kirchhoff rezultă

$$V_L + V_C + V_S = 0$$

care implică

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_L}{L} = -\frac{V_S + V_C}{L} = \frac{-I^3 + aI - V_C}{L}$$

de unde rezultă sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} I' = \dfrac{a}{L} I - \dfrac{V_C}{L} - \dfrac{I^3}{L} \\ V_C' = \dfrac{I}{C}. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Pentru simplificarea sistemului (1) se fac substituţiile

$$I = \alpha x,\ V_C = \beta y,\ t = \gamma s,$$

unde α, β, γ sunt aleşi astfel încât:

$$\alpha\gamma = \beta C \ \text{ şi } \ \alpha^2\gamma = L. \tag{$*$}$$

Revenind la sistemul (3.6) avem

$$\frac{\alpha x}{C} = \frac{I}{C} = \frac{dV_C}{dt} = \frac{d(\beta y)}{ds}\ \frac{ds}{dt} = \frac{\beta}{\gamma}\ \frac{dy}{ds},$$

şi

$$\frac{\alpha}{\gamma}\ \frac{dx}{ds} = \frac{d(\alpha x)}{ds}\ \frac{ds}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{a}{L} I - \frac{V_C}{L} - \frac{I^3}{L} = \frac{a\alpha}{L} x - \frac{\beta}{L} y - \frac{\alpha^3}{L} x^3$$

şi, având în vedere condiţiile $(*)$, sistemul (3.6) devine

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{ds} = \mu x - y - x^3 \\ \dfrac{dy}{ds} = x \end{array}\right.$$

unde $\mu = \dfrac{a\gamma}{L}$, sistem care este echivalent cu ecuaţia

$$y'' + y = \mu(1 - y^2)y'$$

cunoscută şi sub numele de *ecuaţia van der Pol* (B. van der Pol, 1889–1959).

Traiectorii ortogonale

Considerăm familia uniparametrică de curbe dată prin

$$F(x,y) = c. \tag{3.7}$$

Diferenţiind relaţia (3.7) obţinem

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

unde F_x şi F_y sunt derivatele parţiale ale lui F în raport cu x şi y. Rezultă că panta fiecărei curbe a familiei (3.7) este

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}\cdot$$

Vrem să determinăm o altă familie de curbe care să aibă proprietatea: fiecare curbă a noii familii taie fiecare curbă a familiei (3.7) într-un punct în care tangentele la cele două curbe sunt perpendiculare. Se spune că traiectoriile celor două familii sunt ortogonale. Evident, panta traiectoriei ortogonale unei curbe din (3.7) este dată de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}\cdot$$

Enumerăm câteva fenomene fizice în care apar traiectoriile ortogonale:

1. În câmpul electrostatic, liniile de forţă sunt ortogonale faţă de liniile de potenţial constant.
2. În curgerea bidimensională a fluidelor, liniile de curgere a fluidului, numite linii de curent, sunt ortogonale faţă de liniile de potenţial constant ale fluidului.
3. În meteorologie traiectoriile ortogonale ale izobarelor (curbe ce leagă suprafeţe de presiune barometrica egală) dau direcţia vântului: de la zone cu presiune atmosferică mare către cele cu presiune atmosferică mică.

Modelul pradă–răpitor

Acest model este din dinamica populaţiei. Fie $x(t)$ şi $y(t)$ numărul de indivizi la momentul t aparţinând la două specii, prima specie reprezentând prada iar a doua răpitorii. Cele două specii convieţuiesc în aceeaşi zonă. Pentru a construi modelul de interacţiune dintre specii, facem următoarele ipoteze:

(i) În absenţa răpitorilor, prada are o rată de creştere proporţională cu numărul de indivizi, adică: dacă $y(t) = 0$, $x'(t) = ax(t)$, $a > 0$ fiind o constantă.

(ii) În absenţa prăzii, răpitorii mor, au o rată de creştere proporţională cu numărul lor de indivizi, deci $y'(t) = -cy(t)$, $(c > 0)$, dacă $x(t) = 0$.

(iii) Numărul de întâlniri (ciocniri) dintre membrii celor două specii este proporţional cu produsul $x(t) \cdot y(t)$. Aceste întâlniri au ca efect descreşterea numărului indivizilor pradă şi influenţează pozitiv creşterea numărului prădătorilor.

Aceste ipoteze conduc la sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy, \end{array} \right. \tag{3.8}$$

a, b, c, d fiind constante pozitive.

Sistemul (3.8) mai este cunoscut sub numele de modelul Lotka–Volterra (A.J. Lotka (1880–1949); V. Volterra (1860–1940)), după numele celor care l-au introdus.

Menţionăm că sistemul (3.8) poate fi folosit pentru modelarea unei clase largi de probleme.

Dozajul medicamentelor

Este cunoscut din medicină că penicilina şi alte medicamente administrate unui pacient dispar din corpul acestuia după următoarea regulă: dacă $x(t)$ este cantitatea de medicament din corpul uman la momentul t, atunci viteza de eliminare $x'(t)$ a medicamentului este proporţională cu $x(t)$, adică x satisface ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = -kx(t) \tag{3.9}$$

unde $k > 0$ este o constantă ce depinde de medicament şi care se determină experimental.

Din (3.9) rezultă

$$x(t) = x_0 e^{-kt} \tag{3.10}$$

unde $x_0 = x(0)$ este doza administrată iniţial.

Din (3.10) se remarcă faptul că $x(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$. În practica medicală însă este necesar să se menţină o anumită concentraţie a medicamentului în corp pentru un timp mai îndelungat.

În acest scop se administrează pacientului o doză iniţială x_0, apoi la intervale egale de timp, τ ore de exemplu, se dă pacientului doza D de medicament. Dacă dorim ca în corpul pacientului la momentele $\tau, 2\tau, 3\tau...$ să se menţină doza iniţială x_0, atunci doza D care trebuie administrată în aceste momente se determină din relaţia

$$x_0 e^{-k\tau} + D = x_0$$

de unde

$$D = x_0(1 - e^{-k\tau}).$$

Menţionăm faptul că ecuaţia (3.9) caracterizează şi dezintegrarea radioactivă.

Poluarea apei în lacuri

Una din problemele create de industrializare este poluarea apei. Un râu poluat se va curăţa relativ repede întrucât curgerea apei atrage după sine şi poluantul. Purificara unui lac (de substanţe poluante), făcută doar prin scurgerea apei, este un proces dificil necesitând o cantitate foarte mare de apă. Prezentăm un model de purificare în timp a lacului, bazat pe scurgerea graduală a apei din lac. Pentru aceasta se fac următoarele ipoteze:

1. Ratele intrării (afluxului) şi scurgerea apei din lac au valori aproximativ egale (le notăm cu r).

2. Poluanţii sunt uniform distribuiţi în apă. Concentraţiile lor în apa ce intră în lac şi apa din lac sunt notate cu C_1 respectiv C_2.

3. Poluanţii sunt îndepărtaţi numai prin procesul natural al scurgerii apei din lac.

Din ipotezele de mai sus, în intervalul de timp Δt, modificarea poluării totale = cantitea de poluant intrată în lac – cantitatea de poluant scursă din lac, care conduce la expresia analitică

$$\Delta(VC_2) = (C_1 - C_2)r\Delta t + \theta(\Delta t) \tag{3.11}$$

unde V este volumul lacului, iar $\theta(\Delta t)/\Delta t \longrightarrow 0$ pentru $\Delta t \longrightarrow 0$. Cantitatea $\theta(\Delta t)$ se introduce deoarece atât C_1 cât şi C_2 depind de t.

Din relaţia (3.11) se obţine ecuaţia diferenţială

$$C_2' = \frac{(C_1 - C_2)}{V} r$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi şi are soluţia

$$C_2(t) = e^{-t/T} \left[C_2(0) + T^{-1} \int_0^t C_1(s) e^{s/T} ds \right] \tag{3.12}$$

unde $T = \dfrac{V}{r}$ este numărul de ani necesari pentru golirea lacului dacă rata scurgerii se menţine constantă iar sursa de poluare este stopată.

Dacă sursa de poluare este stopată ($C_1 = 0$) din (3.12), rezultă că timpul necesar pentru a reduce concentraţia poluantului din lac la jumătate este

$$t = T \ln 2.$$

1.4 Probleme

Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale:

Ecuaţii cu variabile separabile:

1. $x' = (x-1)(x-2)$; **2.** $x' = t^3 x^{-2}$; **3.** $x' = tx^2 + x^2 + tx + x$;

4. $\begin{cases} x' = \dfrac{t(x^2+3)}{(1+t^2)x} \\ x(1) = 3; \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x' = \dfrac{t(x^2-1)}{(t-1)x^3} \\ x(2) = 1. \end{cases}$

Ecuaţii omogene:

6. $x' = \dfrac{t-x}{t+x}$; **7.** $x' = \dfrac{x}{t} + \sin\dfrac{x-t}{t}$; **8.** $x' = \dfrac{4tx - x^2}{2t^2}$; **9.** $\begin{cases} x' = \dfrac{xt}{x^2+t^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$

Ecuaţii liniare:

10. $(t^2+1)x' = 2tx + t^3$; **11**. $x' = -2x + e^{-2t}$;

12. $t^2 x' = -tx + t + 1$; **13**. $x' = x\dfrac{\cos t}{\sin t} + 2t\sin t$;

14. $x' = 2tx - t^3 + t$; **15**. $x' = -\dfrac{t}{t^2+1}x + \dfrac{1}{t(1+t^2)}$.

Ecuaţii de tip Bernoulli:

16. $\begin{cases} x' = \dfrac{t}{2(t^2-1)}x + \dfrac{t}{2x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$; **17**. $tx' = 4x + t^2\sqrt{x}$.

Ecuaţii cu diferenţiale exacte:

18. $(2t + x^2)dt + (2tx + 1)dx = 0$;

19. $(x\cos t + x^2)dt + (\sin t + 2tx + 3x^2)dx = 0$;

20. $x^2(t - x)dt + (1 - tx^2)dx = 0$; **21**. $(t^2 + 2t + x^2)dt + 2xdx = 0$;

22. $2tx\,dt + (t^2 + \cos x)dx = 0$; **23**. $\begin{cases} (tx^2 - 1)dt + (t^2x - 1)dx = 0 \\ x(0) = 1. \end{cases}$

Ecuaţii rezolvabile cu ajutorul factorului integrant:

24. $x\,dx + t\,dt + (t^2 + x^2)t^2dt = 0 \ \left(\rho = e^{2t^3/3}\right)$;

25. $x\,dt + (3t - x + 3)dx = 0 \ (\rho = x^2)$.

Ecuaţii Lagrange:

26. $tx'^2 + (x - 3t)x' + x = 0$; **27.** $x = 2tx' - x'^3$.

Ecuaţii care admit reducerea ordinului:

28. $x' - tx'' + x''^3 = 0$; **29**. $x''^2 - 2tx'' - x' = 0$; **30**. $xx'' - x'^2 = 0$.

Ecuaţii rezolvabile prin serii de puteri:

31. $\begin{cases} xx'' + 3x'^2 = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \left(x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n\right)$

32. $\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(10) = 0,\ x'(10) = 1 \end{cases} \quad \left(x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t-10)^n\right)$

Ecuaţii rezolvabile cu ajutorul substituţiilor:

33. $x' = \sqrt{x + \sin t} - \cos t \quad \left(u = \sqrt{x + \sin t}\right)$;

34. $(t^2x^3 + 2tx^2 + x)dt + (t^3x^2 - 2t^2x + t)dx = 0 \quad (u = tx)$;

35. $xx'' = (x')^2 + 6tx^2 \quad \left(x = e^{\int y\,dt}\right)$;

36. $9xx' - 18tx + 4t^3 = 0 \quad (x = y^2)$;

37. $t^2x'' + tx' + \left(t^2 - \dfrac{1}{4}\right)x = 0 \quad \left(y = \sqrt{t}\,x\right)$;

38. $x(1 + 2tx)dt + t(1 - 2tx)dx = 0 \quad (u = 2tx)$.