"Fara abateri de la norma progresul nu este posibil."

Frank Zappa

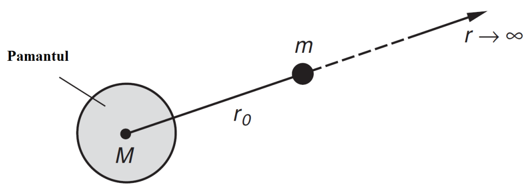
1

Integrale improprii

Motivatie:

◦ Folosind integrala definita putem integra functii continue pe intervale marginite. In practica suntem nevoiti uneori sa extindem notiunea de integrala pentru a putea manevra functii nemarginite sau intervale de integrare nemarginite.

◦ De exemplu, daca in campul gravitational al Pamantului se afla un corp de masa m la distanta r_0 (masurata fata de centrul Pamantului) care se deplaseaza continuu fata de acesta ($r \to \infty$).



Calculul lucrului mecanic realizat W, de catre forta care deplaseaza corpul, conduce la urmatoarea integrala:

$$W = \int_{r_0}^{\infty} G\frac{mM}{r^2}dr = GmM \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2}dr$$

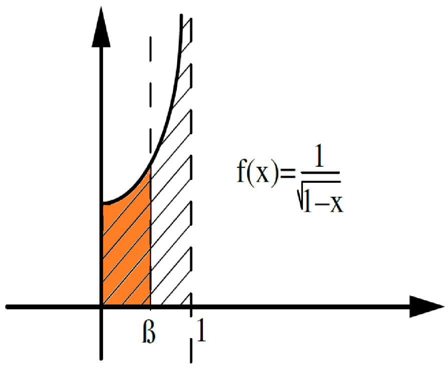
unde G-constanta gravitationala, M-masa Pamantului.

Introducere:

Sa consideram functia:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad 0 \le x < 1.$$

Evident are loc $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \infty$.



Putem calcula aria hasurata aflata sub grafic, cu toate ca functia creste necontrolat cand se apropie de capatul din dreapta a intervalului ? Dupa cum vedeti pe desen graficul functiei nu va atinge niciodata marginea din dreapta si intre margine si grafic se va forma o suprafata nemarginita in directia OY.

Strategie: Aflam aria suprafetei situata sub grafic dar marginita in dreapta de o bariera $\beta < 1$:

$$\text{Aria} = \int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^{\beta} = -2\sqrt{1-\beta} + 2$$

Interpretam aria hasurata ca fiind limita ariilor marginite la dreapta:

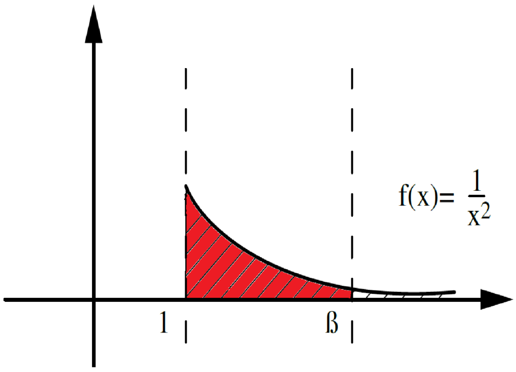
$$\text{Aria hasurata} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx := \lim_{\substack{\beta \to 1 \\ \beta < 1}} \int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$$

Alta situatie:

Sa consideram functia:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 1 \le x.$$

Putem afla aria suprafetei hasurate de sub grafic chiar daca intervalul de integrare necesar este nemarginit ?



Vom folosi aceeasi abordare. Integram pana la o margine superioara $\beta > 1$:

$$\int_1^\beta \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\beta = -\frac{1}{\beta} + 1$$

si ne imaginam aria suprafetei hasurate ca fiind limita unor astfel de arii:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx := \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Definitie: Integrala generalizata (impropríe) de tip I
Fie $-\infty < a < b \leq \infty$ si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua. Functia f se numeste integrabila generalizat pe $[a, b)$, atunci cand urmatoarea limita exista si este finita:

$$\lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}} \int_a^\beta f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Analog este tratat cazul $-\infty \leq a < b < \infty$:

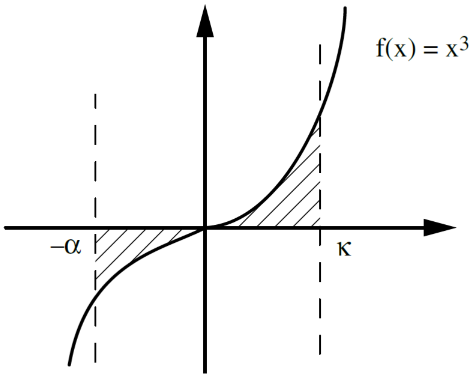
$$\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}} \int_\alpha^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Uneori se noteaza $\displaystyle\int_a^{b_-} f(x)dx$ sau $\displaystyle\int_{a_+}^{b} f(x)dx$ pentru o integrala generalizata (impropríe).

Tocmai cand credeai ca ai inteles:

Pentru functia $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ se poate construi o integrala cu limite simetrice:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 0$$



Si apoi sa trecem la limita:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} x^3 dx = 0.$$

In aceasta situatie valoarea gasita nu are sens sa o asociem unei arii. Mai mult de atat integralele care ar trebui sa masoare ariile suprafetelor dintre axa OX si graficul lui f si anume

$$\int\limits_{-\infty}^{0} x^3 dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{0} x^3 dx = +\infty$$

si

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^3 dx = \lim_{\kappa\to\infty}\int_{0}^{\kappa} x^3 dx = +\infty$$

nu exista.

Definitie: Integrala generalizata de tip II
Fie $-\infty \leq a < b \leq \infty$ si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua. Functia se numeste integrabila generalizat pe (a,b), atunci cand pentru un $c \in (a,b)$ exista si sunt finite integralele improprii:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}}\int_\alpha^c f(x)dx$$

si

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}}\int_c^\beta f(x)dx.$$

Vom defini:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Remarca:

Se poate observa ca valoarea $\int_a^b f(x)dx$ nu depinde de alegerea lui c.

Exemple fundamentale:

Fie $p > 0$ si $a, b > 0$, atunci:

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{convergenta,} & \text{daca } p > 1 \\ \text{divergenta,} & \text{daca } p \in (0,1] \end{cases}$$

si:

$$\int_0^{a} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{convergenta,} & \text{daca } \ p < 1 \\ \text{divergenta,} & \text{daca } \ p \geq 1 \end{cases}$$

Mai mult de atat avem:

$$\int_a^{b} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} \text{convergenta,} & \text{daca } \ p < 1 \\ \text{divergenta,} & \text{daca } \ p \geq 1 \end{cases}$$

si un rezultat similar:

$$\int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = \begin{cases} \text{convergenta,} & \text{daca } \ p < 1 \\ \text{divergenta,} & \text{daca } \ p \geq 1 \end{cases}$$

In final, $q > 0$:

$$\int_a^{\infty} q^x\,dx = \begin{cases} \text{convergenta,} & \text{daca } \ q < 1 \\ \text{divergenta,} & \text{daca } \ q \geq 1 \end{cases}$$

Analoaga integralei generalizate este urmatoarea notiune:

Definitie: Valoarea principala Cauchy

Fie $-\infty \leq a < b \leq \infty$ si $c \in (a,b)$ un numar real. Functia $f : (a,c) \cup (c,b) \to \mathbb{R}$ e integrabila Riemann. Daca exista limita:

$$p.v. \int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

vom numi $p.v. \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ valoare principala Cauchy.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie continua, atunci numim de asemenea valoare principala Cauchy limita (daca exista):

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

Cand integrala generalizata aspira la nemurire:

Daca integrala exista in sens generalizat atunci ea exista si in sensul valorii principale Cauchy si cele doua valori coincid. In schimb existenta integralei in sensul valorii principale Cauchy nu implica existenta in sensul generalizat. Asadar valoarea principala Cauchy este utila atunci cand functia nu este integrabila generalizat!

Functia $f(x) = \frac{1}{x-1}$ este discontinua in $x = 1$. Integrala generalizata $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ este divergenta, pentru ca:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\substack{\beta\to 1\\ \beta<1}} \int_0^{\beta} \frac{dx}{x-1} + \lim_{\substack{\alpha\to 1\\ \alpha>1}} \int_{\alpha}^3 \frac{dx}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{\beta\to 1\\ \beta<1}} \ln|x-1|\Big|_0^{\beta} + \lim_{\substack{\alpha\to 1\\ \alpha>1}} \ln|x-1|\Big|_{\alpha}^3 = \infty + \ln 2 - \infty$$

Niciuna dintre subintegrale nu exista ! In schimb exista valoarea principala Cauchy:

$$p.v. \int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (\ln\varepsilon + \ln 2 - \ln\varepsilon) = \ln 2.$$

Criteriile de convergenta ale integralelor generalizate vor semana foarte mult cu cele corespunzatoare seriilor numerice.

Criteriul comparatiei:
Fie $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ cu $a < b$ si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua. Exista un $c_0 \in (a, b)$ si functiile $g_1 : (a, c_0] \to (0, \infty)$ si $g_2 : [c_0, b) \to (0, \infty)$, astfel ca:

i) $\displaystyle\int_a^{c_0} g_1(x)dx$, $\displaystyle\int_{c_0}^{b} g_2(x)dx$ sunt convergente

ii) $|f(x)| \le g_1(x)$ pe $[a, c_0]$ iar $|f(x)| \le g_2(x)$ pe $[c_0, b]$

Atunci functia f este integrabila generalizat pe (a, b).

Functiile g_1 si g_2 se numesc majoranti ai lui f. Acelasi criteriu se poate utiliza pentru integralele generalizate de tip I.

Observatie utila:

Cand $f(x) \ge g(x) \ge 0$ si integrala $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este divergenta, atunci si integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ va fi divergenta.

Sa vedem criteriul la lucru:

Integrala $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ este convergenta deoarece $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$ iar integrala $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ este convergenta.

In schimb integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}dx$ este divergenta, deoarece $\dfrac{e^x}{x} \ge \dfrac{1}{x}$ si integrala improprie $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ e divergenta.

Mult mai practica este urmatoarea propozitie:

Criteriul limitei:
Fie $-\infty < a < b \leq \infty$. Daca functiile $f, g : [a, b)$ sunt continue si exista limita:

$$L = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

atunci:

i) Pentru $L \in (0, \infty)$, integrala $\int_a^b |f(x)|dx$ converge daca si numai daca $\int_a^b |g(x)|dx$ converge.

ii) Daca $L = 0$ si $\int_a^b g(x)dx$ este absolut convergenta, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergenta.

ii) Daca $L = \infty$ si $\int_a^b |g(x)|dx$ este divergenta, atunci $\int_a^b |f(x)|dx$ este divergenta.

Remarca:
Cand stim ca $f(x) \geq 0$ si $g(x) > 0$ subpunctul ii) devine:
ii) Daca $L = 0$ si $\int_a^b g(x)dx$ este convergenta, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergenta.

Consecinta practica:
Fie $I = \int_a^\infty f(x)dx$, $a > 0$, f continua si:

$$\lim_{x \to \infty} x^p f(x) = L$$

exista si este finita. Atunci:

$$\int_a^\infty f(x)\ dx = \begin{cases} \text{convergenta,} & \text{daca } p > 1 \\ \text{divergenta,} & \text{daca } p \in (0, 1] \end{cases}$$

Pentru o integrala $J = \int_a^b f(x)dx$, cu $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua si cu proprietatea ca:

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^p f(x) = L$$

exista si e finita:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \begin{cases} \text{convergenta}, & \text{daca} \;\; p < 1 \\ \text{divergenta}, & \text{daca} \;\; p \geq 1 \end{cases}$$

Analog, pentru $K = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, unde $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ continua, astfel ca:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} (x - a)^p f(x) = L$$

exista si e finita:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \begin{cases} \text{convergenta}, & \text{daca} \;\; p < 1 \\ \text{divergenta}, & \text{daca} \;\; p \geq 1 \end{cases}$$

Exista, evident, o relatie intre integralele improprii si seriile numerice:

Criteriul integral:

Fie $f : [k, \infty) \to [0, \infty)$ monoton descrescatoare. Atunci seria $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ este convergenta daca si numai daca integrala improprie $\displaystyle\int_k^{\infty} f(x)dx$ este convergenta.

Exemplu:

Sa consideram seria armonica generalizata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0$$

Astfel canditatul natural este functia:

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad p > 0$$

Dar:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \text{convergent}, & \text{pentru } p > 1 \\ \text{divergent}, & \text{pentru } p \in (0, 1] \end{cases}$$

asadar criteriul integral implica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{convergenta}, & \text{pentru } p > 1 \\ \text{divergenta}, & \text{pentru } p \in (0, 1] \end{cases}$$

Criteriul lui Dirichlet:
Fie $a < b \leq \infty$ si $f : [a, b) \to [0, \infty)$ continua, astfel ca $F(u) = \int_a^u f(x)dx$ este marginita . Pentru fiecare functie monotona $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x) = 0$ este integrala $\int_a^b f(x)g(x)dx$ convergenta.

Exemplu:

Studiem convergenta integralei:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

Avem descompunerea:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot 0 = 0$ va avea functia $h(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ o prelungire continua:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, & \text{daca } x \neq 0 \\ 0, & \text{daca } x = 0 \end{cases}$$

Deci prima integrala va fi convergenta si $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \tilde{h}(x)dx$.

Pentru a doua integrala notam $f(x) = \sin x$ si $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Functia g este monoton descrescatoare si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Pentru a aplica criteriul lui Dirichlet consideram functia:

$$F(u) = \int_0^u f(x) = \int_0^u \sin x dx = -\cos u + \cos 1 \in [-2, 2]$$

care va fi marginita. Prin urmare conform criteriului lui Dirichlet este a doua integrala convergenta, deci si $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ va fi convergenta.

Probleme rezolvate

Problema 1. *Studiati folosind doar definitia convergenta integralei:*

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$$

Solutie: Functia $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ este continua in punctul $a = -1$ si $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$. Consideram functia $F(u) = \displaystyle\int_{u}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx$ si conform definitiei integralei improprii va trebui sa calculam limita:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} F(u) &= \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \int_{u}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1+x)^2}\Big|_{u}^{7} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{(1+u)^2}) = 6.\end{aligned}$$

Prin urmare, integrala este convergenta si:

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx = 6$$

Problema 2. *Sa se studieze convergenta integralelor:*

$$i) \int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx \qquad ii) \int_{-1}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$$

Solutie: i) Prima integrala este generalizata pentru ca intervalul este nemarginit. Se observa ca:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \frac{x+1}{x^4+1} = 1.$$

Pentru a studia convergenta folosim consecintele practice ale Criteriului limitei pentru $p = 3 > 1$. Deci $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx$ este convergenta.

ii) Pentru a doua integrala integrandul $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ devine nemarginit cand se apropie de punctele $a = -1$ si $b = 3$. Alegem un punct intermediar, de exemplu 0, si descompunem:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx &= \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} dx\end{aligned}$$

Consecinta practica a criteriului limitei face din nou toti banii. Intrucat:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (x+1)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} = 1, \quad p = \frac{1}{2} < 1$$

si:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (3-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} = 5, \quad p = \frac{1}{2} < 1$$

sunt ambele integrale convergente.

Problema 3. *Demonstrati ca integrala:*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

este convergenta pentru $p > 0$.

Solutie: Deoarece ambele capete de integrare sunt critice, descompunem integrala in:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Pentru prima integrala utilizam pentru comparare functia $g(x) = x^{p-1}$. Stim ca $\int_0^1 x^{p-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}} dx$ este convergenta atunci cand $p > 0$. Alegand $f(x) = x^{p-1} e^{-x}$ se obtine:

$$L = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-x} = 1$$

Conform criteriului limitei i) integrala $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ este convergenta cand $p > 0$.

Pentru a doua integrala utilizam pentru comparare functia $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ (pentru a compensa cresterea functiei $x \to x^{p-1}$). Prin urmare:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{p-1} e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} x^{p-1} e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

Din criteriul limitei ii) obtinem convergenta $\int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ pentru toate valorile $p \in \mathbb{R}$, deoarece $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}} dx$ este absolut convergenta. In concluzie exista integrala $\Gamma(p)$ atunci cand $p > 0$.

Problema 4. *Studiati convergenta si calculati valoarea integralei:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

Solutie: Integrala este improprie deoarece integrandul este o functie nemarginita:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(\sin x) = -\infty.$$

Aratam ca integrala este convergenta folosind criteriul limitei. De remarcat ca avem nevoie de modul, intrucat integrandul este o functie negativa pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|\ln(\sin x)|}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\text{explicitare modul}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \sqrt{x} = 0$$

Asadar integrala $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$ este absolut convergenta conform criteriului limitei ii) $\Longrightarrow$ convergenta.

Calculul efectiv al integralei este destul de tehnic si este prezentat mai jos doar ca exemplu orientativ. In seminariile viitoare vom incerca sa prezentam metode de calcul al valorii integralelor improprii amintind aici asemanarea cu cazul seriilor numerice cand suma seriei se aproximeaza in practica prin metode numerice mai degraba decat folosind metode exacte de calcul.

Pentru inceput este nevoie de o schimbare de variabila: $x = \dfrac{\pi}{2} - y$ si avem:

$$x = \frac{\pi}{2} - y \implies dx = -dy$$

deci:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\cos y)(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos y)dy,$$

deoarece $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$

Folosind aceasta informatie putem obtine urmatoarea relatie:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx.$$

Vom arata acum prin schimbari succesive de variabila ca ultima integrala este de fapt egala cu I. Incepem prin $2x = y$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)dx$$

$$\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)dx.$$

O noua schimbare de variabila $y = \frac{\pi}{2} + x$ va demonstra ca ultima integrala este si ea egala cu I. In concluzie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I = I$$

Revenind la prima relatie de recurenta obtinuta in problema avem:

$$2I = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + I$$

$$I = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

Probleme propuse

Problema 1. *Studiati daca urmatoarele integrale improprii exista:*

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx.$

ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{2x}dx.$

iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin(\beta x)dx, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}.$

Indicatie: integrare prin parti

iv) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}dx$

v) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$

Problema 2. *Investigati care dintre urmatoarele integrale improprii sunt convergente:*

i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+1}dx.$

ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{-3}+x^{-\frac{1}{3}}}dx.$

iii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x^{\frac{1}{2}}}dx.$

iv) $\displaystyle\int_0^{1} \sin\frac{1}{x}dx.$

Problema 3. *Calculati, daca este posibil:*

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x \; dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x e^{-x} dx$

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$

iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg(x) \; dx$

Problema 4. *Reprezentati grafic integrandul fiecarei integrale (puteti folosi acest link) pe intervalul specificat. Incercati sa intuiti daca integrala improprie exista sau nu. Argumentati apoi riguros matematic convergenta/divergenta integralelor:*

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

iii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1 + e^{-x}}{x} dx$

iv) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

Indicatii: folositi ghidul pentru a scrie functiile dorite

Problema 5. *Studiati convergenta urmatoarelor integrale improprii:*

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 + x}{\sqrt[3]{5 + x^6}} dx$

b) $\displaystyle\int_{0,1}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}\sqrt{11 - x^2}}$

c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{4x^3 + 7}{2x^5 + 3x + 9} dx$

d) $\displaystyle\int_5^{11} \frac{dx}{x\sqrt[3]{11 - x}}$

Problema 6. *Studiati daca urmatoarele integrale sunt divergente. Precizati apoi pentru fiecare valoarea principala Cauchy.*

i) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^3} dx.$

ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} tg(x) dx$

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x dx$

Problema 7. *Este seria:*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$$

convergenta ?

Problema 8. *Este integrala:*

$$\int_a^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x^2} dx, \quad a > 0.$$

convergenta ? De ce ?

Problema 9. *Studiati convergenta integralelor, in functie de valoarea parametrilor.*

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}} dx, \quad s \in \mathbb{R}^*$

ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^\beta}{1+x^\alpha} dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$