"Ecuatiile sunt partea plictisitoare a matematicii. Eu incerc sa vad lucrurile intr-o maniera geometrica."

Stephen Hawking

6

Dreapta si planul in spatiu

Notiuni teoretice:

• componentele unui vector $\overline{AB}$ in raport cu baza unui sistem cartezian de coordonate sunt date de formula:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

• ecuatia parametrica a dreptei determinate de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si un vector director $\bar{d} = (\ell, m, n)$:

$$d: \begin{cases} x = x_A + t \cdot \ell \\ y = y_A + t \cdot m \\ z = z_A + t \cdot n \end{cases} , \qquad t \in \mathbb{R}$$

• ecuatia carteziana va fi:

$$d: \frac{x - x_A}{\ell} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n}$$

• ecuatia parametrica a dreptei determinata de doua puncte $A(x_A, y_A, z_A)$ si $B(x_B, y_B, z_B)$ este:

$$d: \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} , \qquad t \in \mathbb{R}$$

• ecuatia carteziana va fi:

$$d: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

• ecuatia planului care trece printr-un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si este paralel cu doua directii date $\bar{v}_1 = (\ell_1, m_1, n_1)$ si $\bar{v}_2 = (\ell_2, m_2, n_2)$:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

• ecuatia planului care trece prin trei puncte necoliniare $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ si $C(x_C, y_C, z_C)$:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

• ecuatia carteziana a planului determinat de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ si normala $\bar{n} = (a, b, c)$:

$$\alpha : \ a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

• daca stim unde este localizat punctul M pe segmentul AB, adica avem informatia

$$\overline{MA} = k \cdot \overline{MB}$$

atunci putem sa-i aflam coordonatele

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}, \quad y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}, \quad z_M = \frac{z_A - kz_B}{1 - k}$$

Distante si unghiuri in spatiu:

• produsul vectorial a doi vectori $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ este dat de formula:

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

• produsul mixt a trei vectori $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ este:

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

• unghiul θ format de doua drepte coplanare d_1 si d_2 este unghiul format de catre doi vectori directori $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ ai celor doua drepte:

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{d}_1, \bar{d}_2 \rangle}{\|\bar{d}_1\| \cdot \|\bar{d}_2\|} = \frac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

• distanta de la un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ la un plan $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ este:

$$dist(A, \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

• distanta de la un punct A la o dreapta d:

$$dist(A, d) = \frac{\|\bar{d} \times \overline{M_0 A}\|}{\|\bar{d}\|}$$

unde M_0 este un punct oarecare de pe dreapta si $\bar{d}$ este vector director al dreptei

• distanta dintre dreptele necoplanare d_1 si d_2:

$$dist(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{M_1 M_2}, \bar{d}_1, \bar{d}_2)|}{\|\bar{d}_1 \times \bar{d}_2\|}$$

unde $M_1 \in d_1$ si $M_2 \in d_2$ sunt puncte arbitrare de pe drepte iar $\bar{d}_1$ si $\bar{d}_2$ sunt vectori directori ai dreptelor

• unghiul θ dintre o dreapta d cu vectorul director $\bar{d}$ si un plan α cu normala $\bar{n}$ este obtinut din:

$$\sin\,\theta = \frac{\langle \bar{d}, \bar{n} \rangle}{\|\bar{d}\| \cdot \|\bar{n}\|}$$

unde $\bar{v}$ este un vector director al dreptei si $\bar{n}$ normala la plan

• unghiul θ format de catre doua plane cu normalele $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ este determinant prin formula:

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle}{\|\bar{n}_1\| \cdot \|\bar{n}_2\|}$$

Probleme rezolvate

Problema 1.

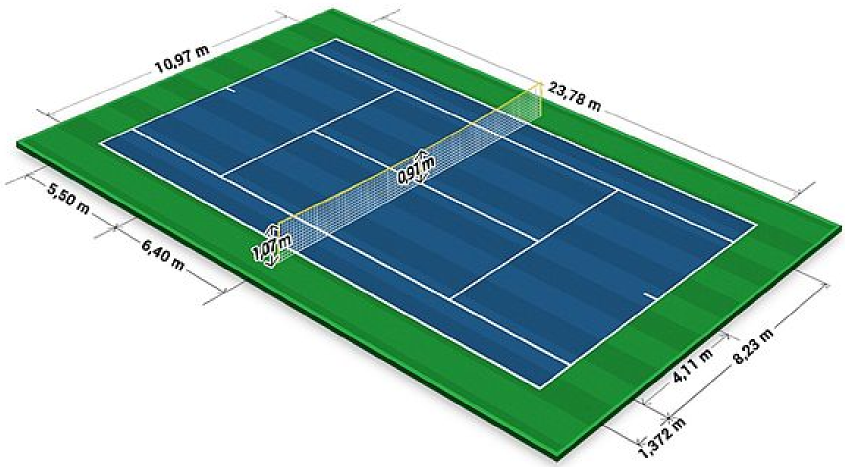
Soluţie:

Problema 2.

Soluţie:

Problema 3. *Un jucator de tenis serveste din coltul terenului: ridica mingea la* 2.50 *m si apoi in traiectoria sa mingea loveste banda de sus a fileului exact in mijlocul fileului. Daca nu intalnea fileul in calea sa mingea ar fi intrat in teren ? Estimati locul (punctul) in care ar fi aterizat mingea trimisa de jucator. Ce unghi formeaza cu planul terenului traiectoria mingii ?*

Solutie: Alegem un reper cartezian $OXYZ$ cu originea in coltul de unde serveste jucatorul si cu axele OX si OY cele doua linii de out care se intersecteaza acolo.



• Identificam punctele $J(0, 0, 2.5)$ si $F(4.11, 11.89, 0.91)$ ca fiind locul de unde jucatorul serveste si punctul unde mingea loveste fileul. Ecuatia planului terenului va fi:

$$\alpha: \ z = 0$$

• scriem ecuatia dreptei JF si aflam intersectia dreptei cu planul α al terenului, penntru a afla punctul $P(x_P, y_P, 0)$ unde mingea ar fi cazut in terenul advers:

$$JF: \ \frac{x - 4.11}{0 - 4.11} = \frac{y - 11.89}{0 - 11.89} = \frac{z - 0.91}{2.5 - 0.91}$$

• pentru a afla intersectia cu planul α al terenului cel mai simplu este sa trecem la ecuatia parametrica:

$$JF: \begin{cases} x = -4.11 \cdot t + 4.11 \\ y = -11.89 \cdot t + 11.89 \\ z = 1.59 \cdot t + 0.91 \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$$

• deoarece α are ecuatia $z = 0$ obtinem ca punctul P in care JF intersecteaza acest plan corespunde parametrului $t = -\frac{0.91}{1.59} = -0.57$ Prin urmare:

$$x_P = -4.11 \cdot (-0.57) + 4.11 \approx 6.45$$

$$y_P = -11.89 \cdot (-0.57) + 11.89 \approx 18.66$$

• mingea ar fi cazut in teren daca se obtin coordonatele:

$$x_P \leq 8,23 \ \text{ si } \ y_P \leq 23.78 \ \text{ (vezi dimensiunile terenului)}$$

$\Longrightarrow$ minge ar fi cazut in interiorul terenului

• se afla unghiul format de dreapta JF cu planul $z = 0$ folosind directia dreptei data prin vectorul $\bar{FJ} = (x_j - x_F, y_J - x_F, z_J - z_F) = (-4.11, -11.9, 1.59)$ si normala la planul terenului $\bar{n} = (0, 0, 1)$:

Folosind formula unghiului format de o dreapta cu un plan avem:

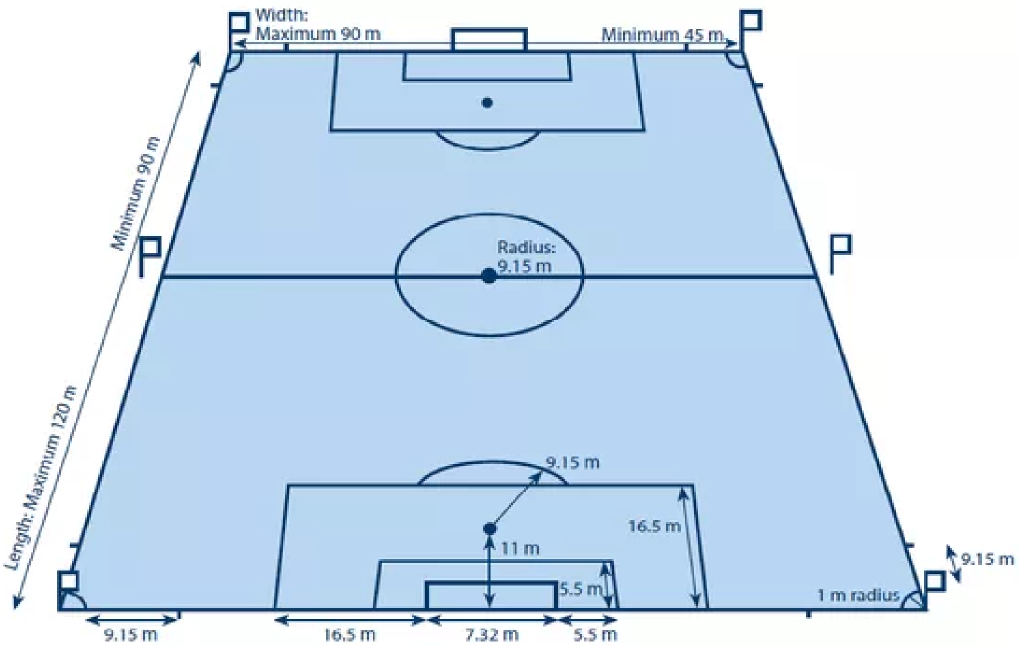
$$\sin\theta = \frac{(-4.11, -11.9, 1.59)\cdot(0,0,1)}{\|(-4.11,-11.9,1.59)\|\cdot\|(0,0,1)\|} = \frac{1.59}{12.68} = 0.125$$

iar din tabelele cu valorile functiei sinus gasim $\theta \approx 7^\circ$

Problema 4. *Spunem ca din punctul M vedem segmentul $[AB]$ sub un unghi de θ grade daca $m(\angle AMB) = \theta$. Mai jos aveti descris un teren de fotbal de dimensiuni $50\ m \times 100\ m$. Sub ce unghi vede un jucator de fotbal, avand inaltimea de $1.50\ m$, linia portii atunci cand acesta ajunge in coltul careului mare ?*

Soluţie:

Consideram un reper cartezian $OXYZ$ cu originea in coltul terenului, in locul indicat de unul dintre stegulete, astfel incat axa OX sa coincida cu linia portii si axa OY cu linia laterala de aut.



Se afla coordonatele punctului de unde priveste jucatorul $J(29.84, 16.5, 1.5)$ (am tinut cont de intaltimea sa si pozitionarea in spatiu) iar $A(46.34, 0, 0)$, $B(53.66, 0, 0)$ vor fi coordonatale punctelor in care poarta este fixata in sol. Apoi se determina vectorii:

$$\vec{JA} = (x_A - x_J, y_A - y_J, z_A - z_J)$$

si

$$\vec{JB} = (x_B - x_J, y_B - y_J, z_B - z_J)$$

care dau directiile dreptelor AJ si BJ.

Se afla unghiul cerut folosind formula $\cos\theta = \frac{\vec{JA}\cdot\vec{JB}}{\|\vec{JA}\|\cdot\|\vec{JB}\|}$

Probleme propuse

Problema 1. *Se dau punctele $A(1,1,2)$, $B(2,1,-1)$ si dreptele:*

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases} . \qquad d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Sa se scrie:

i) *Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei AB*

ii) *Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei d_1*

iii) *Ecuatiile carteziene si parametrice ale dreptei d care trece prin A si este paralela cu dreapta d_2*

Problema 2. *Se dau punctele $A(1,-1,0)$, $B(-1,0,-1)$, $C(-1,1,-1)$ si dreapta:*

$$d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

i) *Sa se scrie ecuatia planului care contine punctele A, B, C*

ii) *Ecuatia carteziana a planului care contine punctul A si este perpendicular pe dreapta d*

iii) *Ecuatia carteziana a planului care contine dreptele d si AB.*

Problema 3. *Sa se gaseasca coordonatele proiectiei ortogonale a punctului $M(1,2,-2)$ pe planul $\alpha : -2x + 2y - 3z + 1 = 0$. Sa se gaseasca coordonatele simetricului lui M fata de acest plan.*

Problema 4. *i)* *Sa se arate ca dreapta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ este paralela cu planul $3x - 3y + 2z - 5 = 0$*

ii) *Sa se calculeze distanta dintre dreptele:*

$$d_1 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2} \quad si \quad d_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}.$$

Problema 5. *Sa se determine distanta de la punctul $M(3,-1,2)$ la dreapta:*

$$d : \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Problema 6. *Sa se studieze pozitia relativa a dreptei:*

$$d: \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

fata de planul $\alpha : x - 2z + 2 = 0$. *Sa se gaseasca ecuatia proiectiei ortogonale a dreptei* d *pe planul* α

Problema 7. *Se dau dreptele:*

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2} \text{ si } d_2 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$$

Se cere:

i) Sa se scrie ecuatiile perpendicularei comune dreptelor d_1 *si* d_2

ii) Sa se calculeze distanta dintre dreptele d_1 *si* d_2

Problema 8. *Sa se gaseasca coordonatele simetricului punctului* $M(-1, 0, 2)$ *fata de dreapta:*

$$d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

Problema 9. *Sa se gaseasca unghiul dintre dreptele:*

$$d_1 : \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \quad si \quad d_2 : \quad \frac{x+1}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-2}{3}$$

apoi dintre:

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad si \quad d_2 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Problema 10. *Aflati unghiul dintre planele:*

$$\pi_1 : \quad x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad si \quad \pi_2 : \quad x + y + 1 = 0$$

si apoi dintre dreapta:

$$d : \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

si planul π_1.