"A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas."

Godfrey Harold Hardy

5

Descompunerea valorilor singulare

Compresia datelor

Transmiterea eficienta si stocarea unui volum mare de date au devenit o problema majora a lumii tehnologiei. In cele ce urmeaza vom prezenta o metoda de compresie a datelor in asa fel incat acestea sa poata fi transmise mai rapid si stocate pe mai putin spatiu. Reamintim ca rata de compresie a datelor se calculeaza cu formula:

$$\text{rata compresie} = \frac{\text{marime fisier necomprimat}}{\text{marime fisier comprimat}}$$

Astfel un fisier de 10 MB care este comprimat in unul de 2MB va avea o rata de compresie $5 : 1$.

Spre exemplu, o fotografie alb-negru poate fi scanata si apoi stocata ca o matrice A atasand fiecarui pixel o valoare numerica in functie de nivelul de gri al acestuia.. Daca folosim 256 nivele diferite de gri (0= alb, 255 = negru), atunci elementele matricei ar fi numere intregi cuprinse intre 0 si 255. Imaginea poate fi recuperata din matricea A afisand pixelii colorati in functie de nivelele lor de gri. Daca matricea este de tip $m \times n$ atunci am putea sa stocam toate cele $m \cdot n$ date individual. O alternativa consta in gasirea unei descompuneri a matricei pentru care sa fie nevoie de mai putine date. Spre exemplu, daca am avea o descompunere de tipul:

$$A = \sigma_1 \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{v_1^T} + \sigma_2 \boldsymbol{u_2} \cdot \boldsymbol{v_2^T} + \ldots + \sigma_r \boldsymbol{u_r} \cdot \boldsymbol{v_r^T}$$

unde $\mathbf{u_i} \in \mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{R})$, $\mathbf{v_i} \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ si $\sigma_i > 0$, atunci nu trebuie sa stocam decat rm date pentru cei r de u_i, rn date pentru cei r de v_i si r date pentru cei r de σ_i. In concluzie $r{+}rm{+}rn = r(m{+}n{+}1)$ date. Ce nu e suficient de evident la aceasta descompunere este ca fiecare termen este de fapt o matrice $m{\times}n$. Tinand cont de modul in care am modelat matematic stocarea fotografiei alb-negru o astfel de matrice adauga cateva nuante de gri fiecarui pixel al imaginii urmand ca toate impreuna sa realizeze reconstructia totala a acesteia. Sa presupunem acum ca unii dintre acesti σ_i sunt foarte mici atunci eliminand termenii corespunzatori lor vom obtine ceea ce numim o aproximatie de rang k a lui A:

$$A = \sigma_1 \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{v_1^T} + \sigma_2 \boldsymbol{u_2} \cdot \boldsymbol{v_2^T} + \ldots + \sigma_r \boldsymbol{u_k} \cdot \boldsymbol{v_k^T}, \quad k < r$$

In acest fel am putea stoca doar aceste $k(m + n + 1)$ date si vom obtine o aproximare a imaginii intiale, suficient de buna pentru scopul nostru. Spre exemplu o aproximare de rang 100 a unei imagini cu 1000×1000 pixeli are nevoie doar de $100(1000 + 1000 + 1) = 200.100$ date, astfel rezulta o compresie cu o rata de compresie de aproape $5 : 1$.

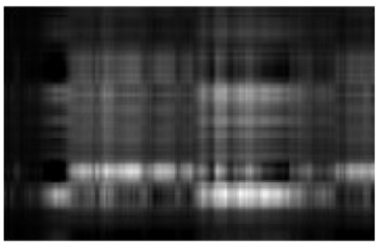
Mai jos aveti cateva aproximari ale versiunii alb-negru a imaginii de la inceputul capitolului:

Reconstructie folosind matricea intreaga

Reconstructie folosind o aproximare de rang 100

Reconstructie folosind o aproximare de rang 10

Reconstructie folosind o aproximare de rang 3



Mai jos aveti un cod Matlab care genereaza astfel de aproximari ale imaginii tigrului:

```
% Read the picture of the tiger, and convert to black and white.
tiger = rgb2gray(imread('tiger.jpg'));

% Downsample, just to avoid dealing with high-res images.
tiger = im2double(imresize(tiger, 0.5));

% Compute SVD of this tiger
[U, S, V] = svd(tiger);

% Plot the magnitude of the singular values (log scale)
sigmas = diag(S);
figure; plot(log10(sigmas)); title('Singular Values (Log10 Scale)');
figure; plot(cumsum(sigmas) / sum(sigmas)); title('Cumulative Percent of Total
Sigmas');

% Show full-rank tiger
figure; subplot(4, 2, 1), imshow(tiger), title('Full-Rank Tiger');

% Compute low-rank approximations of the tiger, and show them
ranks = [200, 100, 50, 30, 20, 10, 3];
for i = 1:length(ranks)
    % Keep largest singular values, and nullify others.
    approx_sigmas = sigmas; approx_sigmas(ranks(i):end) = 0;

    % Form the singular value matrix, padded as necessary
    ns = length(sigmas);
    approx_S = S; approx_S(1:ns, 1:ns) = diag(approx_sigmas);

    % Compute low-rank approximation by multiplying out component matrices.
    approx_tiger = U * approx_S * V';

    % Plot approximation
    subplot(4, 2, i + 1), imshow(approx_tiger), title(sprintf('Rank %d Tiger',
ranks(i)));
end
```

Amprente digitale

In 1924 FBI a inceput sa colecteze amprente digitale si acum are mai mult de 100 de milioane de astfel de amprente in fisierele sale. Pentru a reduce costul de depozitare, FBI a inceput sa lucreze cu Laboratorul National din Los Alamos, precum si cu alte grupuri, pentru a gasi metode de comprimare ale fisierelor, care contineau amprentele in forma electronica. In figura alaturata avem amprenta originala si reconstructia ei, dintr-un fisier comprimat la o rata 26 : 1, prin metoda descompunerii valorilor singulare.

Original Reconstructie

Sinteza teorie

• orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ poate fi descompusa sub forma:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \mid & u_2 \mid \ldots \mid u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ \vdots \\ v_r^t \end{pmatrix}$$

unde u_i si v_i sunt vectori coloana iar $\sigma_i > 0$ sunt numere reale pozitive numite valori singulare ale matricei.

• descompunerea de mai sus este echivalenta cu:

$$A = \sigma_1 \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{v_1^t} + \sigma_2 \boldsymbol{u_2} \cdot \boldsymbol{v_2^t} + \ldots + \sigma_r \boldsymbol{u_r} \cdot \boldsymbol{v_r^t}$$

si poarta numele de decompunerea valorilor singulare

Remarca:

Numarul r al valorilor singulare este de fapt rangul matricei A. Mai mult, daca asezam valorile singulare intr-o ordine descrescatoare:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$$

atunci aceste valori de dau de fapt distantele de la matricea A la multimile matricelor de rang mai mic:

$$\sigma_{k+1} = \min_{rang(B)=k} dist(A, B), \quad k < r = rang(A)$$

Aceasta relatie se interpreteaza in felul urmator: distanta de la A la cea mai "apropiata" matrice de rang k este σ_{k+1}. Distanta dintre doua matrice se calculeaza cu formula:

$$dist(A, B) = \max_{\|u\|=1} ||(A - B)u||$$

unde u este un vector coloana si norma lui $\|u\|$ este cea obisnuita. De remarcat ca spatiul matricelor este un spatiu metric, pe care putem defini distante extrem de utile in probleme de aproximare.

Algoritmul de obtinere a descompunerii SVD

• valorile singulare $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ se afla cu formulele:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1},\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sunt valorile proprii nenule ale matricei A^tA.

• vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sunt vectori proprii ortonormati corespunzatori valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$

$\Longrightarrow$ daca avem o valoare proprie multipla se aplica procedeul Gram-Schmidt pentru a obtine vectori proprii ortonormati corespunzatori acesteia

$\Longrightarrow$ pentru valorile proprii simple (ordine de multiplicitate 1) se imparte la norma sa un vector propriu corespunzator

• vectorii u se obtin cu formulele:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i, \qquad i = \overline{1,r}$$

Remarca:

De retinut ca matricea $A^t A$ este simetrica si orice matrice simetrica este diagonalizabila iar matricea care o diagonalizeaza poate fi aleasa cu coloane reprezentate de catre vectori ortonormati. Asadar algoritmul de mai sus va functiona intotdeauna si nu se pune problema ca dimensiunile subspatiilor proprii sa nu coincida cu multiplicitatile algebrice corespunzatoare.

Forme patratice

• daca $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ este un vector linie si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrica, numim expresia:

$$q_A(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}} \cdot A \cdot \bar{\mathbf{x}}^t$$

forma patratica asociata lui A, adica:

$$q_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 x_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

• o forma patratica q_A este pozitiv definita $\Longleftrightarrow q_A(\bar{\mathbf{x}}) > 0, \quad \forall\, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$
$\Longleftrightarrow$ A este pozitiv definita $\Longleftrightarrow$ toti minorii principali sunt strict pozitivi

• o forma patratica q_A este negativ definita $\Longleftrightarrow q_A(\bar{\mathbf{x}}) < 0, \quad \forall\, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$
$\Longleftrightarrow$ A este negativ definita $\Longleftrightarrow$ minorii principali alterneaza ca semn si primul este strict negativ

• daca P este matricea care diagonalizeaza pe A (adica $A = PDP^{-1}$) atunci prin transformarea $\bar{\mathbf{x}}^t = P\bar{\mathbf{y}}^t$ forma patratica devine:

$$q_D(\bar{\mathbf{y}}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

• o forma patratica este pozitiv definita $\Longleftrightarrow$ toate valorile proprii sunt strict pozitive

• o forma patratica este negativ definita $\Longleftrightarrow$ toate valorile proprii sunt strict negative

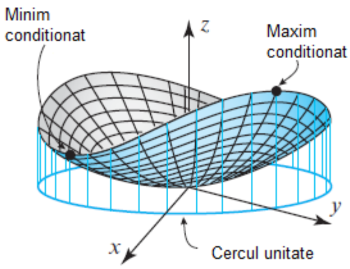
Teorema de extrem conditionat
Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrica a carui valori proprii sunt:

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$$

Atunci forma patratica $q_A(\bar{\mathbf{x}})$ atinge o valoare maxima si una minima pe multimea vectorilor $\bar{\mathbf{x}}$ pentru care $\|\bar{\mathbf{x}}\| = 1$.
Valoarea maxima este λ_n si este atinsa intr-un vector propriu corespunzator lui λ_n.
Valoarea minima este λ_1 si este atinsa intr-un vector propriu corespunzator lui λ_1.

Remarca:

Pentru a vizualiza geometric problema, in cazul $\bar{\mathbf{x}} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, forma patratica q_A poate fi reprezentata ca fiind o suprafata $z = \bar{\mathbf{x}} \cdot A \cdot \bar{\mathbf{x}}^t$ intr-un sistem de axe Oxyz. Acum $\|\bar{\mathbf{x}}\| = 1$ devine cercul unitate $x^2 + y^2 = 1$.



Geometric, problema aflarii minimului si maximului, relativ la conditionarea $\|\bar{\mathbf{x}}\| = 1$, se reduce la aflarea punctului aflat la cota z cea mai mare si respectiv cota z cea mai mica pe intersectia dintre suprafata si cilindrul drept format de cercul unitate

Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie pentru care derivatele partiale de ordin doi exista si sunt continue. Fie $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct critic al lui f. Atunci f are un punct de minim local in $\bar{\mathbf{a}}$ daca matricea Hessiana:

$$H(\bar{\mathbf{a}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_1}(\bar{\mathbf{a}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(\bar{\mathbf{a}}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(\bar{\mathbf{a}}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(\bar{\mathbf{a}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_2}(\bar{\mathbf{a}}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n}(\bar{\mathbf{a}}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(\bar{\mathbf{a}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2}(\bar{\mathbf{a}}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_n}(\bar{\mathbf{a}}) \end{pmatrix}$$

este pozitiv definita. Analog, f are un punct de maxim local in $\bar{\mathbf{a}}$ daca matricea Hessiana este negativ definita. Daca matricea $H(\bar{\mathbf{a}})$ are si valori proprii pozitive si negative atunci avem un punct sa.

Probleme rezolvate

Problema 1. *Aflati valorile singulare ale matricei:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si apoi determinati descompunerea valorilor singulare.

Solutie: Intai aflam valorile singulare care prin definitie sunt valorile proprii ale matricei $A^t A$. Avem:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic este:

$$p(\lambda) = \det(A^t A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

iar valorile proprii vor fi $\lambda_1 = 3$ si $\lambda_2 = 1$. Deci valorile singulare ale matricei A sunt:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$$

In continuare aflam subspatiile proprii corespunzatoare lui λ_1 si λ_2 :

$$S_{\lambda_1} = \{v : (A^t A - \lambda_1 I)v = \bar{0}\} = \left\{ v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Asadar $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ este un vector dintr-o baza a acestuia dar avem nevoie de un vector de norma 1 si prin urmare $v_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ este vectorul cautat Analog gasim:

$$S_{\lambda_2} = \{v : (A^t A - \lambda_2 I)v = \bar{0}\} = \left\{ v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

si prin urmare $v_2 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ este vectorul cautat.

Pentru a afla u_1 si u_2 aplicam formula $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ si gasim:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

respectiv:

$$u_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

In final descompunerea cautata este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Problema 2. *Aflati minimul si maximul formei patratice:*

$$q(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 4xy$$

atunci cand $x^2 + y^2 = 1$.

Solutie: Forma patratica poate fi exprimata in forma matriciala ca:

$$q(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 4xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se arata usor ca valorile proprii sunt $\lambda_1 = 7$ si $\lambda_2 = 3$. Un vector propriu corespunzator lui λ_1 este $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si unul corespunzator lui λ_2 este $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pentru a putea aplica teorema de extrem conditionat trebuie sa normalizam acesti vectori:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

In concluzie:
Maximul conditionat are valoarea 7 si se obtine in punctul $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
Minimul conditionat are valoarea 3 se se obtine in punctul $(x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Probleme propuse

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Aflati descompunerea valorilor singulare pentru matricele:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema B.2. *Sa se determine o baza ortonormata in care transformarea liniara* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de matrice* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ *are forma diagonala.*

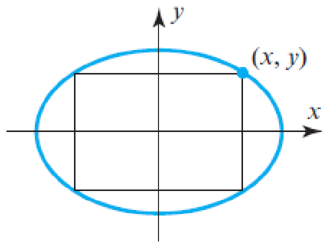
Problema B.3. *Aflati punctele critice ale functiei:*

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - 8xy + 3$$

si folositi valorile proprii ale Hessianei pentru a decide care dintre ele sunt puncte de minim local, maxim local sau puncte sa.

C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

Problema C.1. *Un dreptunghi este inscris in elipsa* $4x^2 + 9y^2 = 36$ *ca in figura. Folositi teoria formelor patratice pentru a afla valorile pozitive ale lui* x *si* y *pentru care dreptunghiul inscris are aria maxima.*



Problema C.2. *Fie matricea* $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$, *atunci aplicatia liniara indusa* $\bar{\mathbf{x}} \to A\bar{\mathbf{x}}$ *transforma sfera unitate* $\{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \|\bar{\mathbf{x}}\| = 1\}$ *din* $\mathbb{R}^3$ *intr-o elipsa din* $\mathbb{R}^2$*, la fel ca in figura. Aflati un vector unitate* $\bar{\mathbf{x}}$ *pentru care lungimea* $\|A\bar{\mathbf{x}}\|$ *este maxima si calculati aceasta lungime.*