"Matematica nu este despre numere, ecuatii, calcule si algoritmi. Matematica este despre intelegere."

William Thurston, medaliat Fields

6
Calcul vectorial

Actiune, motor, se filmeaza !

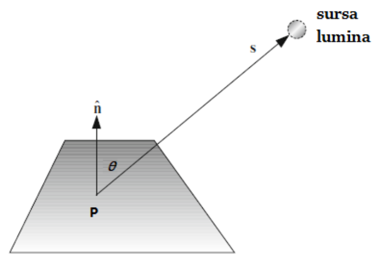
• Legea lui Lambert spune ca intensitatea iluminarii la nivelul unei suprafete difuze este proportionala cu cosinusul unghiului dintre normala la suprafata si directia sursei de lumina:

$$E = \frac{I}{R^2} \cos\theta$$

In aceasta relatie E reprezinta iluminarea suprafetei (unitate de masura lux-ul), I intensitatea luminoasa a izvorului punctiform de lumina (unitate de masura candela) si R distanta dintre sursa izvorului si punctul iluminat de pe suprafata.

O astfel de situatie este descrisa in figura de mai jos unde o sursa de lumina este localizata la $S(20, 20, 40)$ si punctul iluminat este $P(0, 10, 0)$. In aceasta situatie suntem interesati sa calculam *cos* θ, care multiplicat cu intensitatea sursei de lumina, va da intensitatea luminii incidente pe suprafata. Sa incepem prin a considera ca suprafata este un plan si $\bar{\mathbf{n}}$ este normala (vector perpendicular) la plan. Sa presupunem ca $\bar{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Directia sursei de lumina este definita de catre un vector $\mathbf{s}$. Tinand cont de coordonatele extremitatilor acestui vector avem:

$$s = \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

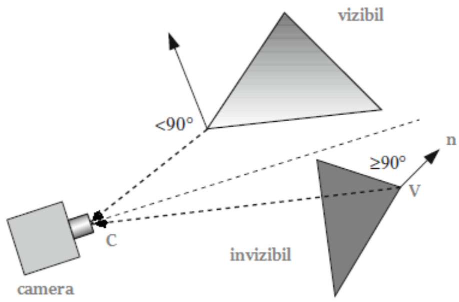


Obtinem usor lungimea vectorului director $\|\mathbf{s}\| = \sqrt{20^2 + 10^2 + 40^2} \approx 45.826$ precum si al celui normal $\|\bar{\mathbf{n}}\| = 1$. Folosind formula de calcul al unghiului format de catre doi vectori:

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{\mathbf{n}}, \boldsymbol{s} \rangle}{\|\bar{\mathbf{n}}\| \cdot \|\mathbf{s}\|} = \frac{0 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 40}{1 \cdot 45.826} \approx 0.218$$

Asadar intensitatea luminii in punctul $(0, 10, 0)$ este atenuata cu un coeficient 0.218 fata de intensitatea luminii in punctul initial $(20, 20, 40)$.

• • O modalitate de a face identificarea fata/spate a unui obiect (poligon) consta in calcularea unghiului dintre normala la suprafata obiectului si linia vizuala a camerei. Daca unghiul este strict mai mic decat $90°$ (adica $\cos\theta > 0$) atunci fata poligonului este vizibila iar daca este mai mare decat $90°$ (adica $\cos\theta \leq 0$) atunci fata este invizibila.



In practica sunt usor de recunoscut fata sau spatele unui obiect dar in grafica computerizata, spre exemplu, este nevoie de o descriere matematica a situatiei.

Sa presupunem ca avem o camera situata in $C(0,0,0)$ si unul dintre varfurile poligonului este $V(10,10,40)$. Sa presupunem ca vectorul normal la fata poligonului este $\mathbf{n} = (5,5,-2)$. Directia liniei vizuale a camerei este data de vectorul $\overrightarrow{VC}$:

$$\overrightarrow{VC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -40 \end{pmatrix}$$

iar $\|\bar{\mathbf{n}}\| = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-2)^2} \approx 7.348$ si $\|\overrightarrow{VC}\| \approx 42.426$. Folosind formula de calcul al unghiului dintre cei doi vectori gasim:

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{\mathbf{n}}, \overrightarrow{VC} \rangle}{\|\bar{\mathbf{n}}\| \cdot \|\overrightarrow{VC}\|} \approx -0.0634 < 0$$

deci $\theta = \arccos(-0.0634) \approx 93^\circ$ si poligonul dat are fata invizibila pentru camera virtuala situata in punctul C.

Unghiul de reintrare in atmosfera

O situatie similara este intampinata in aeronautica, de catre inginerii NASA. Pentru o nava spatiala (sonda) este extrem de important unghiul sub care nava reintra in atmosfera. Reglajele se fac in functie de vectorii de pozitie ai diversilor senzori de localizare aflati la bordul navei.

Daca unghiul de reintrare este prea abrupt, fortele de deceleratie (efectul de franare datorat frecarii cu atmosfera) vor deveni prea mari si nava spatiala se poate rupe in doua. In plus, cu cat unghiul de reintrare este mai abrupt, cu atat este mai mare fluxul de caldura la care este expusa nava putand duce la supraincalzirea navei.

Reciproc, daca unghiul de reintrare este un pic prea mic alte lucruri neplacute pot aparea. De exemplu, deceleratia va fi prea mica si astfel nava va calatori mai departe decat a fost calculat. Se poate intampla ca nava sa aterizeze pe un teren accidentat, altul decat cel planificat, ceea ce este dezastruos in special daca nava este conceputa doar pentru a ateriza pe apa. Chiar daca fluxul de caldura va fi acum mai mic pot aparea probleme termice, deoarece scutul termic va fi expus caldurii o perioada prea mare.

Daca unghiul de reintrare este mult prea mic, se poate intampla ca nava sa nu "cada in atmosfera" la fel ca o piatra plata care sare intr-una pe suprafata apei unui lac.

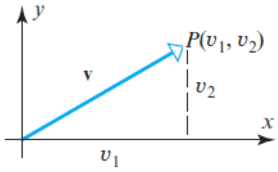
"Listen, listen, listen! They gave us too much Delta V, had us burn too long. At this rate, we're gonna skip right off of the atmosphere, and we're never gonna get back!"

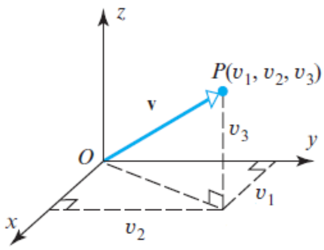
(Jack Swigert in filmul Apollo 13)

? Ce trebuie sa stii deja

Pentru a putea face parte din audienta trebuie ca stii:

• cum se afla coordonatele unui vector si cum se reprezinta un vector 2-dimensional $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ in plan, respectiv unul 3-dimensional $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in spatiu:



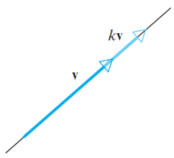


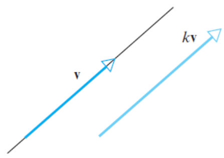
• notiunile vector de pozitie si segment orientat

• regula triunghiului si regula paralelogramului

• cum se aduna algebric doi vectori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dar si cum se inmulteste un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

• doi vectori a caror drepte suport sunt paralele (sau coincid) difera printr-o constanta:



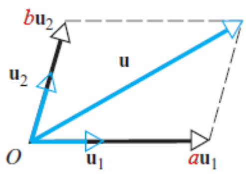


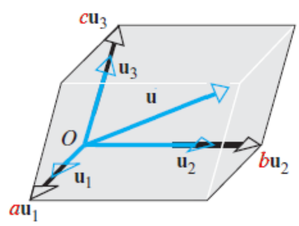
• coordonatele vectorului obtinut dintr-un segment orientat

vectorul $\overrightarrow{AB}$ obtinut din segmentul orientat $[AB]$ are in plan coordonatele date de $(x_B - x_A, y_B - y_A)$, iar in spatiu acestea sunt $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

• oricare doi vectori necoliniari $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ din plan formeaza o baza vectoriala a planului si prin urmare orice alt vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ poate fi descompus sub forma

$$\mathbf{u} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$$





• oricare trei vectori necoplanari $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ din spatiu formeaza o baza vectoriala a spatiului si orice vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ se poate descompune sub forma:

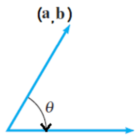
$$\mathbf{u} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3$$

Produsul scalar. Vectori perpendiculari

Din seminarul despre aplicatii liniare stim ca rotatia de unghi θ a unui vector $v = (a, b)$ realizata in sensul acelor de ceasornic (negativ trigonnometric), in jurul originii O, este obtinuta prin inmultire cu matricea $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Mai exact noile coordonate se obtin prin:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

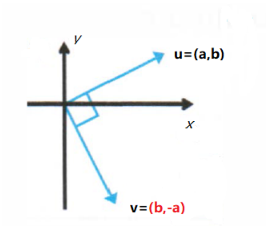


In acest fel daca rotim vectorul de coordonate $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ cu un unghi de $90°$ se obtine vectorul de coordonate $(\mathbf{b}, -\mathbf{a})$, caci:

$$\begin{pmatrix} \cos(90°) & \sin(90°) \\ -\sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix}.$$

Se poate acum observa ca in cazul celor doi vectori perpendiculari construiti anterior coordonatele lor satisfac urmatoarea relatie:

$$a \cdot b + b \cdot (-a) = 0$$



De fapt, pentru orice vectori perpendiculari $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vom avea o relatie asemanatoare:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0.$$

Apare astfel natural sa introducem un produs intre vectori cu scopul declarat de a testa perpendicularitatea (ortogonalitatea) vectorilor. Acest produs va fi denumit **produs scalar** si se defineste in felul urmator:

Produsul scalar al vectorilor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ este:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Analog, in cazul 3-dimensional, produsul scalar al vectorilor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ este:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Regula anterioara se generalizeaza usor pentru vectori n-dimensionali si prin urmare doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sunt perpendiculari daca si numai daca produsul lor scalar este 0:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Proprietatile produsului scalar:

1) Produsul scalar este distributiv fata de adunare.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

si

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

Regula de mai sus poate fi vizualizata usor daca notam produsul scalar prin $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$, atunci apare:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$$

si

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$$

2) Produsul scalar este simetric.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \qquad\qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

Egalitatea este evidenta daca tinem cont de definitia produsului scalar. Vom lega in curand produsul scalar de problema aflarii unghiului dintre doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Din aceasta perspectiva proprietatea de mai sus devine foarte naturala caci unghiul dintre $\mathbf{u}$ si $\mathbf{v}$ trebuie sa fie egal cu unghiul dintre $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u}$.

3) Produsul scalar se comporta bine cu scalarile:

$$\langle k \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, k \cdot \mathbf{v} \rangle = k \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \qquad k \in \mathbb{R}$$

Exemplu:

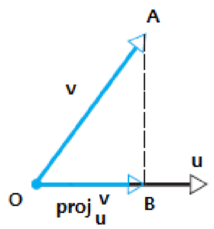
De remarcat cum vom combina in aplicatii proprietatea 1) si 3):

$$\langle 2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - 3\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

□

Proiectia ortogonala a unui vector

Prima aplicatie a produsului scalar va consta in aflarea proiectiei unui vector $\mathbf{v}$ pe un vector $\mathbf{u}$ dat.



Sa consideram desenul de mai sus in care vectorul $v = \overline{OA}$ este proiectat ortogonal pe vectorul $\mathbf{u}$. Proiectia, identificata in desen prin vectorul $\overline{OB}$, o vom nota prin $\text{proj}_u v$:

$$\text{proj}_u v = \overline{OB}.$$

Sa observam pentru inceput ca vectorul proiectie $\overline{OB}$ este coliniar cu vectorul $\mathbf{u}$. Prin urmare va exista un $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overline{OB} = \alpha\mathbf{u}$. Vom determina expresia proiectiei $\overline{OB}$ pornind de la relatia de perpendicularitate care o defineste:

$$\overline{AB} \perp \mathbf{u}.$$

Aplicand regula triunghiului obtinem $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \alpha\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Conform celor spuse anterior doi vectori sunt perpendiculari daca si numai daca produsul lor scalar este nul:

$$\overline{AB} \perp \mathbf{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \overline{AB}, \mathbf{u} \rangle = 0$$

Obtinem astfel ecuatia $\langle \alpha\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ si la pasul urmator aplicand proprietatile produsului scalar gasim $\alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$. In concluzie $\alpha = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ si astfel am obtinut formula proiectiei:

Vectorul obtinut prin proiectarea ortogonala a unui vector $\mathbf{v}$ pe un vector dat $\mathbf{u}$ este dat prin formula:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \cdot \mathbf{u} \qquad \text{pentru} \ \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Norma unui vector. Distanta dintre doi vectori

Inca din timpul liceului se afla ca lungimea (norma) vectorului $\mathbf{v} = (a, b)$ este data prin formula:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

si respectiv $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ in cazul 3-dimensional.

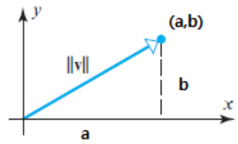
Acum vom putea interpreta aceasta formula din punctul de vedere al produsului scalar:

Norma unui vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ este data de relatia:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

Formula de mai sus este evidenta caci, spre exemplu, in cazul particular $\mathbf{v} = (a, b)$ se gaseste prin calcul:

$$\langle (a,b),(a,b) \rangle = a^2 + b^2 \quad \text{si}$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle (a,b),(a,b) \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



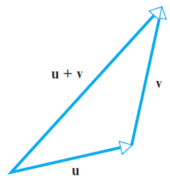
Abordarea initiala pentru aflarea lungimii $\|\mathbf{v}\|$ a vectorului $\mathbf{v}$ presupunea aplicarea teoremei lui Pitagora in triunghiul din figura.

Proprietatile normei:

1) Inegalitatea triunghiului.

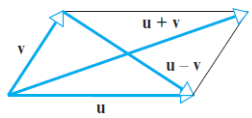
Pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ are loc inegalitatea

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$



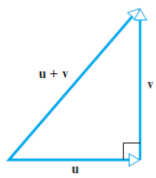
2) Identitatea paralelogramului.

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$



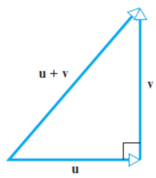
3) Teorema lui Pitagora in $\mathbb{R}^n$. Daca $\mathbf{u}$ este perpendicular pe $\mathbf{v}$ atunci:

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$$



4) Norma unui vector scalat.

$$\|k\mathbf{u}\| = |k| \cdot \|\mathbf{u}\|, \qquad k \in \mathbb{R}$$



Tinand cont de faptul ca un vector $\mathbf{v} = (a, b)$ poate fi interpretat ca vector de pozitie al punctului $\mathbf{A}(a, b)$, este natural sa discutam despre distanta dintre doi vectori n-dimensionali.

Distanta euclidiana dintre vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ este:

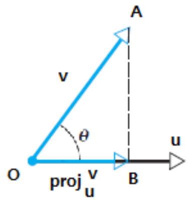
$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Redescoperim astfel in cazul 2-dimensional formula clasica a distantei dintre puncte:

$$\text{dist}((a,b),(c,d)) = \|(a,b)-(c,d)\| = \|(a-c, b-d)\| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

Unghiul format de doi vectori

Daca unghiul θ dintre vectorii $\mathbf{u}$ si $\mathbf{v}$ este ascutit atunci putem sa folosim desenul anterior



Prin definitia functiei cosinus ($\frac{\text{cateta alaturata}}{\text{ipotenuza}}$) obtinem:

$$\cos\theta = \frac{\|\overline{OB}\|}{\|\overline{OA}\|}$$

Putem utiliza proprietatile normei pentru a rescrie numaratorul sub forma

$$\|\overline{OB}\| = \|\text{proj}_u v\| = \left\|\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u\right\| = \left|\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\right|\cdot\|u\| = \frac{|\langle v,u\rangle|}{\|u\|^2}\cdot\|u\| = \frac{|\langle v,u\rangle|}{\|u\|}$$

Deoarece numitorul este $\|\overline{OA}\| = \|v\|$ se ajunge la:

$$\cos\theta = \frac{\frac{|\langle v,u\rangle|}{\|u\|}}{\|v\|} = \frac{|\langle v,u\rangle|}{\|u\|\|v\|}$$

Daca unghiul θ dintre vectorii $\mathbf{u}$ si $\mathbf{v}$ este obtuz atunci unghiul dintre vectorii $-\mathbf{u}$ si $\mathbf{v}$ va fi $\pi - \theta$ si aplicand din nou formula de mai sus obtinem:

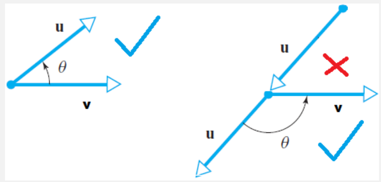
$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|\langle -u, v\rangle|}{\|-u\|\cdot\|v\|}$$

adica $\cos\theta = -\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\cdot\|v\|}$

Putem sa reunim cele doua cazuri investigate anterior intr-o singura formula, tinand cont de semnul functiei cosinus si definitia modulului unui numar real.

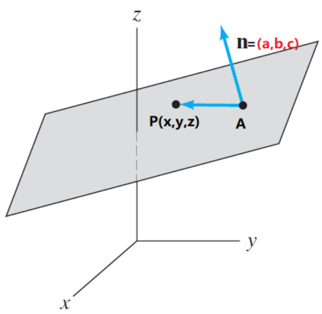
Unghiul θ dintre vectorii $\mathbf{u}$ si $\mathbf{v}$ este dat de formula:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$



Ecuatia planului in spatiu

Putem sa ne folosim de produsul scalar pentru a obtine intr-un mod cat se poate de firesc ecuatia unui plan care trece printr-un punct $\mathbf{A}(x_A, y_A, z_A)$ si este perpendicular pe o directie $\mathbf{n} = (a, b, c)$ data. Directia perpendiculara la un plan este unica si se numeste directie normala la plan



Sa consideram un punct oarecare $\mathbf{P}(x, y, z)$ din plan. Se observa ca vectorul $\overline{AP}$ este perpendicular pe $\mathbf{n}$, deci

$$\overline{AP} \perp \mathbf{n} \quad \Longrightarrow \langle \overline{AP}, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Coordonatele lui $\overline{AP}$ sunt $(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ deci ultima relatie se transforma in ecuatia:

$$\langle (x - x_A, y - y_A, z - z_A), (a, b, c) \rangle = 0$$

si astfel gasim:

Ecuatia planului care trece printr-un punct $\mathbf{A}(x_A, y_A, z_A)$ si este perpendicular pe directia $\mathbf{n} = (a, b, c)$ este:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

• Vom afisa mai jos ecuatia planului care trece prin $A(0, -1, 1)$ si este perpendicular pe directia $(-2, 3, 1)$:

$$-2(x - 0) + 3\big(y - (-1)\big) + 1(z - 1) = 0$$

adica:

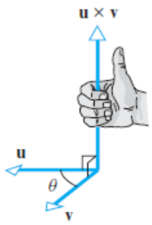
$$-2x + 3y + 3 + z - 1 = 0$$
$$-2x + 3y + z + 2 = 0$$

Produsul vectorial

Produsul vectorial a doi vectori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ este:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Produsul vectorial ofera o metoda de a crea un vector perpendicular pe doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dati, sensul vectorului $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ fiind obtinut prin asa-zisa regula a mainii drepte.



Exemplu:

Intrucat formula de calcul a vectorului $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ este putin formala, vom arata intr-un exemplu cum trebuie manevrata definitia. Ne propunem asadar sa calculam produsul vectorial al vectorilor $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ si $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{k} + \mathbf{j} - \mathbf{k} - 3 \cdot \mathbf{j} - 2 \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Rezultatul este livrat in functie de versorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ai reperului $XYZO$ si ceea ce va trebui sa facem intotdeauna va fi sa interpretam rezultatul ca fiind un vector 3-dimensional si sa recuperam coordonatele sale in felul urmator:

$$a \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j} + c \cdot \mathbf{k} \quad \rightsquigarrow \quad (a, b, c)$$

In felul acesta vectorul $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ va fi:

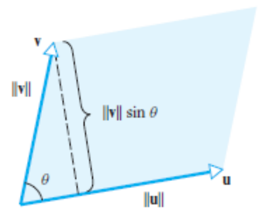
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} = (1, -2, 1)$$

$\square$

Aria unui paralelogram:

O alta aplicatie practica consta in posibilitatea de a calcula aria paralelogramului determinat de catre vectorii $\mathbf{u}$ si $\mathbf{v}$. Lungimea vectorului $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, adica $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$, coincide cu aceasta arie:

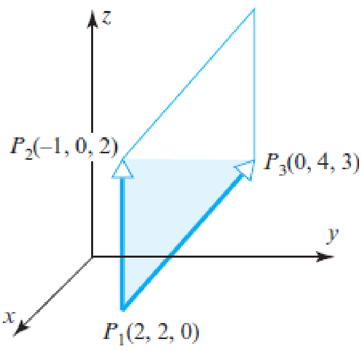
$$\mathcal{A}_{paralelogram} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\theta$$



unde θ este unghiul dintre acestia

Exemplu:

Putem sa folosim aceeasi idee pentru a calcula aria unui triunghi generat de catre doi vectori. Fie punctele $P_1((2,2,0), P_2(-1,0,2)$ si $P_3(0,4,3)$. Putem considera ca triunghiul $\Delta P_1P_2P_3$ este generat de vectorii $\overline{P_1P_2}$ si $\overline{P_1P_3}$



□

Se observa pe desen ca aria triunghiului $P_1P_2P_3$ este jumatate din aria paralelogramului format de catre vectorii $\overline{P_1P_2}$ si $\overline{P_1P_3}$:

$$Aria_{\Delta P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \cdot Aria_{paralelogram} = \frac{\|\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}\|}{2}$$

Dar vectorul $\overline{P_1P_2}$ are coordonatele $(-1-2, 0-2, 2-0)$ si $\overline{P_1P_3} = (-2,2,3)$, prin urmare:

$$Aria_{\Delta P_1P_2P_3} = \frac{\|(-3,-2,2) \times (-2,2,3)\|}{2}$$

Vom calcul separat produsul vectorial:

$$(-3,-2,2) \times (-2,2,3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = (-10,5,-10)$$

Acum putem inlocui in formula ariei pentru a gasi:

$$Aria_{\Delta P_1P_2P_3} = \frac{\|(-10,5,-10)\|}{2} = \frac{\sqrt{(-10)^2 + 5^2 + (-10)^2}}{2} = \frac{15}{2}$$

Proprietatile produsului vectorial:

1) Produsul vectorial este distributiv fata de adunare.

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

2) Produsul vectorial nu este comutativ:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

Egalitatea este usor de vizualizat daca folosim regula mainii drepte, atunci cand $\mathbf{v}$ este deplasat inspre $\mathbf{u}$, conform regulii, degetul mare va indica in sens opus fata de situatia cand $\mathbf{u}$ este deplasat inspre $\mathbf{v}$.

Aceeasi regula va implica faptul ca $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \bar{0}$, pentru orice vector $\mathbf{u}$ 3-dimensional.

3) Produsul vectorial se comporta bine cu scalarile

$$(k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v}) = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

4) Legatura dintre produsul scalar si cel vectorial

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2$$

Oricat de abstracta ar parea la prima vedere, identitatea de mai sus se bazeaza pe un principiu usor de inteles. Daca trecem termenul cu minus in stanga obtinem:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$$

Sa nu uitam ca $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$ si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$, unde θ este unghiul dintre vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. In consecinta:

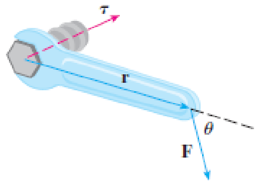
$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \sin^2\theta + \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

Asadar relatia are la baza banala identitate $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Momentul fortei

Momentul fortei $\mathbf{F}$ este o marime fizica vectoriala ce exprima cantitativ capacitatea fortei de a roti un rigid in jurul unei drepte ce trece printr-un punct si este perpendiculara pe planul format de dreapta suport a fortei si punctul respectiv. Este important in functionarea unor aparate de zbor, ca de exemplu elicopterul.

Sa consideram o forta $\mathbf{F}$ care actioneaza asupra unui corp rigid intr-un punct care e dat printr-un vector de pozitie $\mathbf{r}$. De exemplu daca strangem un surub aplicand o forta $\mathbf{F}$ unei chei obtinem un efect de rotire.



Momentul fortei τ (in jurul centrului surubului) este definit ca fiind produsul vectorial al vectorului de pozitie $\mathbf{r}$ (al cheii) cu vectorul care da forta $\mathbf{F}$:

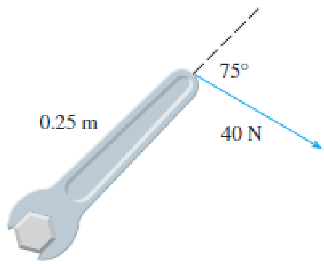
$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

si masoara tendinta cheii de a se roti in jurul acestui centru.

De exemplu, daca aplicam o forta de 40 N unei chei de 25 cm (adica 0.25 m) si unghiul sub care care aplicam aceasta forta este $\theta = 75°$, atunci marimea momentului fortei $\mathbf{F}$ in jurul centrului surubului va fi:

$$\|\tau\| = \|\mathbf{r} \times \mathbf{F}\| = \|\mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{F}\| \cdot \sin\theta = 0.25 \cdot 40 \cdot \sin(75°) \approx 9.66$$

unitatea de masura fiind $N \cdot m$.



Produsul mixt

Produsul mixt a trei vectori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ este dat de formula:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

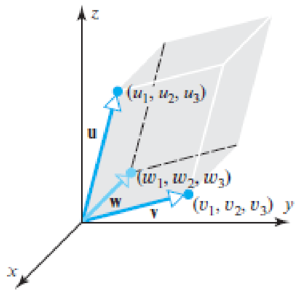
De remarcat ca acest produs este definit doar pentru vectori 3-dimensionali, fiind de interes practic datorita legaturii sale cu produsul scalar si cel mixt:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

Volumul unui paralelipiped

Volumul paralelipipedului cu muchiile date de catre vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ este egal cu modulul produsului mixt al vectorilor

$$V_{paralelipiped} = |(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|$$

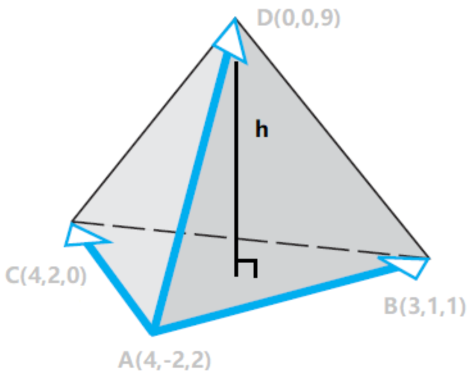


Putem folosi produsul mixt pentru a testa coplanaritatea vectorilor 3-dimensionali

vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sunt coplanari $\Longleftrightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$

Exemplu:

Se dau punctele $A(4, -2, 2)$, $B(3, 1, 1)$, $C(4, 2, 0)$ si $D(0, 0, 9)$. Sa se calculeze distanta de la punctul D la planul determinat de punctele A, B, C.



Calculam inaltimea $\mathbf{h}$ folosind formula invatata in clasa a 8-a pentru volumul unui tetraedru:

$$V_{ABCD} = \frac{\mathbf{h} \cdot \mathcal{A}_{ABC}}{3}$$

unde $\mathcal{A}_{ABC}$ este aria triunghiului ΔABC.

Pentru a determina necunoscuta $\mathbf{h}$ din aceasta ecuatie trebuie aflam volumul tetraedrului ABCD si aria triunghiului ABC.

• Volumul tetraedrului este $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului determinat de catre vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$V_{paralelipiped} = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$

si pentru a aplica aceasta formula avem nevoie de coordonatele vectorilor implicati.

Astfel:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-1, 3, -1)$$

si analog $\overrightarrow{AC} = (0, 4, -2)$, $\overrightarrow{AD} = (-4, 2, 7)$, deci produsul mixt este:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -24$$

si volumul cautat va fi $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |-24| = 4$

• Pentru a calcula aria triunghiului ABC vom folosi aria paralelogramului din care face parte

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \qquad \text{jumatate din aria paralelogramului}$$

Prin calcul se obtine:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & 3\bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - 2\bar{j} - 4\bar{k}$$

si $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{6}$

Asadar:

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

Folosind formula din prima parte gasim:

$$\mathbf{h} = \frac{3 \cdot V_{ABCD}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

□

Bibliografie:

[1] *http://blogs.esa.int/rocketscience/2015/02/05/the-facts-on-reentry-accurate-navigation-is-everything/*

[2] David Lay, *Linear Algebra and its applications*, Addison-Wesley, 2012.

[3] Howard Anton, Chirs Rorres, *Elementary linear algebra*, Willey, 2014.

[4] James Stewart, *Calculus*, Cengage Learning, 2016.

[5] Susan Jane Colley, *Vector Calculus*, Pearson, 2012.