"The key to growth is the introduction of higher dimensions of consciousness into our awareness."

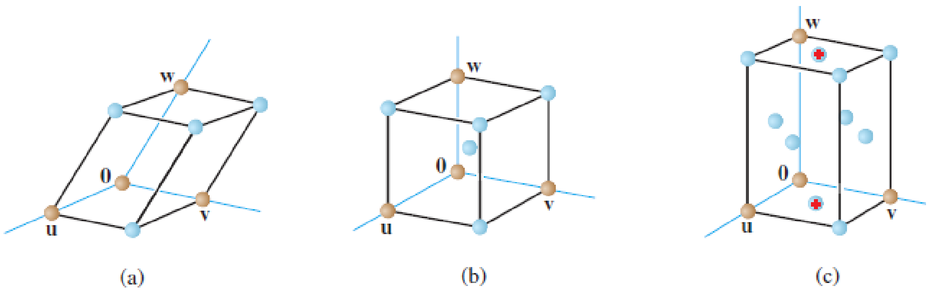
Lao Tzu

2

Calcul vectorial

Cristalografie

O structura cristalina este o aranjare (dispunere) generala unica a atomilor sau moleculelor unei substanțe solide sau lichide cristaline. O structura cristalina este compusa din blocuri sau grupuri model de atomi (sau molecule), dispusi (dispuse) intr-un mod particular si o rețea tridimensional extinsa incluzand respectivele blocuri tipice, retea ce prezintă general, ordonare și simetrie. Blocurile model (cristalele) sunt astfel structurate in nodurile rețelei incat se formează un sistem ordonat matricial tridimensional.



In cristalografie, descrierea unei latice cristaline se face prin alegerea unei baze $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, din $\mathbb{R}^3$, care corespunde unor muchii adiacente ale unei "celule unitate" a cristalului. O latice completa se obtine prin lipirea a mai multor astfel de celule unitate. Sunt 14 posibile celule unitate si trei dintre ele sunt prezentate mai sus. Un atom este localizat dupa coordonatele sale relativ la baza laticei. Spre exemplu, atomul aflat in centrul fetei de sus a celulei **(c)** are coordonatele $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ iar cel din centrul fetei de jos este localizat la $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Vectori in $\mathbb{R}^n$

• vom defini pe multimea $\mathbb{R}^n$ a vectorilor n-dimensionali $\bar{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ doua operatii:

Adunarea vectoriala: $\oplus$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

↳ grafic, in 2D si 3D suma se obtine prin regula paralelogramului

Scalarea vectoriala: $\odot$

$$\alpha \odot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

• impreuna cu aceste doua operatii spunem ca $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ este spatiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$ (multimea scalarilor)

• adunarea si scalarea vectoriala sunt notate in general cu "+" si "·" chiar daca exista un pericol de confuzie

• un sistem de vectori $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p\}$ din $\mathbb{R}^n$ se numeste liniar independent daca:

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_p \bar{v}_p = \theta \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

↳ practic, S este un sistem liniar independent daca niciun vector din S nu se poate exprima ca o combinatie liniara de vectori din S.

↳ in relatia de mai sus $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ este vectorul nul

Mod practic de studiu al liniar independentei:

Pentru stabilirea liniar independentei unui sistem de p vectori:

$$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p\}$$

se formeaza matricea matricea A pentru care acesti vectori reprezinta coloanele sau liniile sale. Daca:

$$\mathrm{rang}(A) = \text{numar de vectori ai sistemului S} = p$$

atunci S este liniar independent.

• un sistem de vectori $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p\}$ din $\mathbb{R}^n$ se numeste sistem de generatori al spatiului vectorial $\mathbb{R}^n$ daca pentru orice vector $v \in \mathbb{R}^n$ exista scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ astfel ca:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_p \bar{v}_p.$$

↳ adica orice vector din $\mathbb{R}^n$ se poate exprima ca o combinatie liniara a vectorilor sistemului S.

Mod practic de studiu al sistemelor de generatori:
Pentru a stabili daca un sistem de p vectori:

$$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p\}$$

este sistem de generatori ai lui $\mathbb{R}^n$ se formeaza matricea A pentru care acesti vectori reprezinta coloanele sau liniile sale. Daca:

$$\text{rang}(A) = \text{dimensiunea spatiului vectorial } \mathbb{R}^n = n$$

atunci S este sistem de generatori.

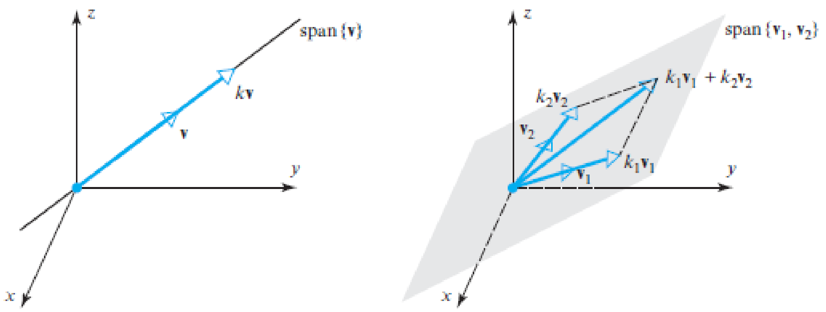
Remarca:

Multimea generata de un sistem de vectori se noteaza cu:

$$span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = \{k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_p\bar{v}_p \;:\; k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{R}\}$$

si se numeste subspatiul vectorial generat de sistemul de vectori $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

In $\mathbb{R}^3$ putem vizualiza usor cum arata cateva astfel de subspatii. De exemplu $span\{v\} = \{kv : \; k \in \mathbb{R}\}$ este o dreapta prin originea reperului Oxyz cu directia data de vectorul v. In schimb pentru doi vectori necoliniari v_1, v_2 multimea $span\{v_1, v_2\} = \{k_1v_1 + k_2v_2 : \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$ este un plan care contine originea si doi vectori de directie v_1 si v_2.



Baza a spatiului vectorial $\mathbb{R}^n$= sistem lin. independent+sistem de generatori

Remarca:

Mai sus am prezentat $\mathbb{R}^n$ ca fiind un prototip al unei structuri algebrice numite spatiu vectorial. Folosind acest prototip putem extinde toate afirmatiile de mai sus la alte multimi de obiecte pe care le vom numi tot "vectori", atata vreme cat avem definita o adunare a obiectelor si o scalare.

Pe multimea $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \;: a, b, c \in \mathbb{R}\}$ a polinoamelor de grad cel mult 2 putem defini o adunare a polinoamelor si o scalare (inmultire cu un numar real). Astfel $\mathbb{R}_2[X]$ devine spatiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. O baza canonica a spatiului $\mathbb{R}_2[X]$ este formata din "vectorii":

$$e_1 = X^2, \quad e_2 = X, \quad e_3 = 1.$$

Analog multimea $M_2(\mathbb{R})$ a matricelor de ordin doi devine spatiu vectorial cu operatiile de adunare a matricelor si de inmultirea cu un numar real. O baza canonica a spatiului $M_2(\mathbb{R})$ este formata din "vectorii":

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O baza canonica a spatiului $\mathbb{R}^3$ este formata din vectorii:

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \bar{e}_3 = (0, 0, 1)$$

dimensiune a spatiului vectorial=numar de vectori dintr-o baza a sa

• se observa ca dim $\mathbb{R}^3 = 3$, dim $\mathbb{R}_2[X] = 3$ si dim $M_2(\mathbb{R}) = 4$

• este suficient sa discutam de acum doar de prototipul $\mathbb{R}^n$ al structurii algebrice spatiu vectorial deoarece are loc urmatorul rezultat fundamental:

Orice spatiu vectorial real (peste corpul $\mathbb{R}$) care are dimensiunea n se poate identifica cu $\mathbb{R}^n$.

Remarca:

De exemplu $\mathbb{R}_2[X]$ se identifica cu $\mathbb{R}^3$ in felul urmator:

$$p = aX^2 + bX + c \quad \rightsquigarrow \quad v = (a, b, c)$$

adica identificam un polinom cu vectorul coeficientilor sai.

Oarecum asemanator identificam $M_2(\mathbb{R})$ cu $\mathbb{R}^4$ prin:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad v = (a, b, c, d)$$

• daca relativ la o baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a lui $\mathbb{R}^n$ avem scrierea:

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

numim $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ coordonate ale vectorului v relativ la baza B si notam:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

• daca $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ si $B_2 = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ sunt baze in $\mathbb{R}^n$ si:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

adica exprimam vectorii bazei B_2 in functie de cei ai lui B_1

se numeste matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 matricea:

$$T_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• daca $T_{B_1B_2}$ este matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 atunci au loc relatiile:

$$T_{B_1B_2} = T^{-1}_{B_2B_1}$$

$$T_{B_1B_2} = T^{-1}_{B_cB_1} \cdot T_{B_cB_2}$$

unde B_c este baza canonica din $\mathbb{R}^n$

• coordonatele unui vector relativ la o baza B se pot obtine cu ajutorul matricei de trecere T_{B_cB}:

$$[v]_B = T^{-1}_{B_cB} \cdot [v]_{B_c}.$$

• in general au loc formulele:

$$[v]_{B_2} = T^{-1}_{B_1B_2} \cdot [v]_{B_1} \quad \text{sau} \quad [v]_{B_1} = T_{B_1B_2} \cdot [v]_{B_2}.$$

Matrice. Un punct de vedere liniar independent

- matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

poate fi interpretata ca o colectie de vectori linie:

$$A = \begin{pmatrix} (1 \quad 2 \quad -1) = \ell_1 \\ (0 \quad 0 \quad 2) = \ell_2 \\ (-1 \quad -2 \quad 3) = \ell_3 \\ (2 \quad 4 \quad 0) = \ell_4 \end{pmatrix}$$

sau de vectori coloana:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

rang(A) = nr. de linii liniar independente = nr. de coloane liniar independente

↳ $rang(A) = 2$ si se poate verifica ca primele doua linii ℓ_1 si ℓ_2 sunt liniar independente iar $\ell_3 = -\ell_1 + \ell_2$ sau $\ell_4 = 2\ell_2 + \ell_3$

↳ oricare trei linii sunt liniar dependente si exista doua linii liniar independente, de exemplu ℓ_1, ℓ_2

↳ acelasi rezultat are loc pentru coloanele c_1, c_2, c_3.

Structura matricelor de rang 1. Daca $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ are rangul 1 atunci exista $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ si $v = (b_1 \; b_2 \; \dots \; b_n)$ astfel ca:

$$A = u \cdot v$$

Determinanti in geometrie:

• avem posibilitatea de a calcula aria unui triunghi in conditiile in care stim coordonatele varfurilor sale:

Aria triunghiului format de punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ si $C(x_C, y_C)$ este:

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left| det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Avem nevoie de modul naintea determinantului pentru a ne asigura ca aria este tot timpul pozitiva.

Ce ascunde liniar dependenta ?

• daca determinantul de mai sus este nul stim ca liniile sunt liniar dependente, asadar va exista o linie care sa fie o combinatie liniara de celelalte, sa presupunem de exemplu $\ell_3 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$, adica:

$$(x_C \quad y_C \quad 1) = \alpha \cdot (x_A \quad y_A \quad 1) + \beta \cdot (x_B \quad y_B \quad 1)$$

• observam ca relatia de mai sus implica $1 = \alpha + \beta$ si prin urmare:

$$\begin{cases} x_C = \alpha \cdot x_A + (1-\alpha) \cdot x_B \\ y_C = \alpha \cdot y_A + (1-\alpha) \cdot y_B \end{cases}$$

care conduce la:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = 1 - \alpha$$

adica punctul C se afla pe dreapta AB.

• asadar determinatul este nul daca si numai daca punctele sunt coliniare:

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \text{ coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Volumul tetraedrului format de punctele $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ si $D(x_D, y_D, z_D)$ este dat de formula:

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}\left| det \begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{pmatrix} \right|$$

• printr-un rationament asemanator liniar dependenta liniilor conduce la conditia de coplanaritate a punctelor:

$$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C) \text{ si } D(x_D, y_D, z_D) \text{ sunt coplanare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Liniar independenta functiilor: Functiile $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sunt liniar independente daca si numai daca wronskian-ul lor $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este nenul:

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \ldots & f_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

• stim deja ca polinoamele $f_1 = 1$, $f_2 = X$ si $f_3 = X^2$ sunt liniar independente, putem verifica acelasi rezultat si pentru functiile polinomiale atasate $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ si $f_3(x) = x^2$:

$$W(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Probleme rezolvate

Problema 1. *Putem forma o baza a lui $\mathbb{R}^3$ care sa contina vectorii:*

$$v_1 = (1, 2, 3) \quad \text{si} \quad v_2 = (1, 1, 0) \quad ?$$

Solutie: Spatiul vectorial $\mathbb{R}^3$ are dimensiunea 3 si vom avea nevoie de trei vectori pentru a forma o baza a sa. Daca dorim ca acesti doi vectori sa faca parte din aceasta baza (pe care trebuie sa o construim) atunci v_1 si v_2 trebuie sa fie liniar independenti. Verificam liniar independenta acestora folosind criteriul practic de studiu al liniar independentei .

Vectorii dati se colecteaza in matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece rang $A = 2 =$ numar de vectori $\Longrightarrow$ v_1, v_2 sunt liniar independenti.

Lema: Orice sistem de vectori liniar independenti poate fi completat la o baza a spatiului vectorial.

Vom afla vectorul lipsa notandu-l $v_3 = (a, b, c)$. Daca dorim ca v_1, v_2 si v_3 sa formeze o baza aceasti vectori trebuie sa formeze impreuna un sistem liniar independent si in acelasi timp un sistem de generatori. Oricare dintre aceste doua conditii se traduc, datorit criteriilor enuntate anterior in fisa seminarului, prin:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix} \neq 0$$

caci doar astfel rangul matricei este 3=numar de vectori=dimensiunea spatiului.

Gasim destul de usor ca pentru $a = 1, b = 0, c = 0$ se obtine un determinant nenul. Asadar putem completa cu $v_3 = (1, 0, 0)$ cei doi vectori pentru a forma baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Problema 2. *Vectorul $v \in \mathbb{R}^3$ are relativ la baza:*

$$B = \{w_1 = (1, 1, 0), w_2 = (1, 0, 0), w_3 = (1, 1, 1)\}$$

coordonatele $(-1, 2, 1)$.
Care sunt coordonatele sale relativ la baza canonica din $\mathbb{R}^3$?
Care sunt coordonatele sale relativ la baza:

$$B_1 = \{u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, \sqrt{2}, 1), u_3 = (1, -\sqrt{2}, 1)\} \quad ?$$

Soluţie: Din enunt deducem ca:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

prin urmare, avem reprezentarea:

$$v = -1(1, 1, 0) + 2(1, 0, 0) + 1(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

Asadar vectorul v este de fapt vectorul $(0, 0, 1)$ din $\mathbb{R}^3$. Intrucat, in mod natural, vectorii din $\mathbb{R}^3$ sunt reprezentati relativ la baza canonica, avem:

$$[v]_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Metoda 1:

Putem afla coordonatele lui v relativ la baza B_1 si direct, folosind definitia coordonatelor relativ la o baza vectoriala. Vom presupune ca aceste coordonate sunt α, β si γ si prin definitie v se poate scrie relativ la vectorii din B_1 ca:

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

Daca inlocuim vectorii prin coordonatele lor relativ la baza canonica obtinem:

$$(0,0,1) = \alpha(1,0,-1) + \beta(1,\sqrt{2},1) + \gamma(1,-\sqrt{2},1)$$

Facand operatiile de adunare vectoriala si scalare vectoriala se obtine:

$$(0,0,1) = (\alpha+\beta+\gamma, \sqrt{2}\beta - \sqrt{2}\gamma, -\alpha+\beta+\gamma)$$

Astfel identificand componentele celor doi vectori se obtine urmatorul sistem liniar:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \sqrt{2}\beta - \sqrt{2}\gamma = 0 \\ -\alpha+\beta+\gamma = 1 \end{cases}$$

Dupa rezolvarea sistemului liniar se obtin coordonatele α, β, γ ale lui v relativ la B_1, adica $[v]_{B_1}$.

Metoda 2:

Pentru a afla coordonatele lui v relativ la baza B_1 putem sa utilizam fie coordonatele sale relativ la baza B fie relativ la baza B_c. Relatiile de schimbare a coordonatelor la o schimbare a bazei sunt:

$$[v]_{B_1} = T_{B_1 B}[v]_B = T_{B_1 B_c} T_{B_c B}[v]_B = T^{-1}_{B_c B_1} T_{B_c B}[v]_B$$

deci

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Putem folosi coordonatele relativ la baza canonica si atunci:

$$[v]_{B_1} = T_{B_1 B_c}[v]_{B_c} = T^{-1}_{B_c B_1}[v]_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarca:

Motivul pentru care matricea de trecere de la o baza la alta se obtine trecand coordonatele vectorilor pe coloane tine de cele doua moduri in care putem scrie relatia de mai sus. Daca dorim sa exprimam $[v]_{B_1}$ sub forma unei matrice linie $[v]_{B_1} = (a, b, c)$ atunci in matricea de trecere de la o baza la alta nu trebuie sa asezam coordonatele pe coloane si obtinem relatii de tipul urmator:

$$[v]_{B_1} = [v]_{B_c} T_{B_1 B_c} = [v]_{B_c} T^{-1}_{B_c B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

In ambele cazuri obtinem:

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Putem verifica faptul ca:

$$v = (0, 0, 1) = -\frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} u_2 + \frac{1}{4} u_3$$

Remarca:

Putem sa discutam despre perpendicularitatea vectorilor (ortogonalitate) daca introducem un produs scalar intre vectorii unui spatiu vectorial. De exemplu pentru doi vectori $\bar{v} = a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3$ si $\bar{w} = a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3$ putem defini:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

In felul acesta spunem ca doi vectori $\bar{v}, \bar{w}$ sunt ortogonali $\iff$ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$
Prin calcul se poate observa ca vectorii bazei B_1 sunt ortogonali doi cate doi. La fel si vectorii bazei canonice.

Problema 3. *Teoria curbelor Bezier, folosita in animatia 3D, se bazeaza pe ideea ca urmatoarele polinoame, numite polinoame Bernstein:*

$$p_k = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}$$

formeaza o baza pentru multimea $\mathbb{R}_n[X]$ a polinoamelor de grad cel mult n. Verificati daca:

$$p_0 = (1-X)^2, \quad p_1 = 2X(1-X) \quad p_2 = X^2,$$

formeaza o baza in $\mathbb{R}_2[X]$.

Soluţie:

Putem sa consideram functiile polinomiale asociate celor trei polinoame: $p_0(x) = (1-x)^2$, $p_1(x) = 2x(1-x)$, $p_2(x) = x^2$. Pentru a arata ca cele trei functii obtinute sunt liniar independente aratam ca wronskianul asociat este nenul:

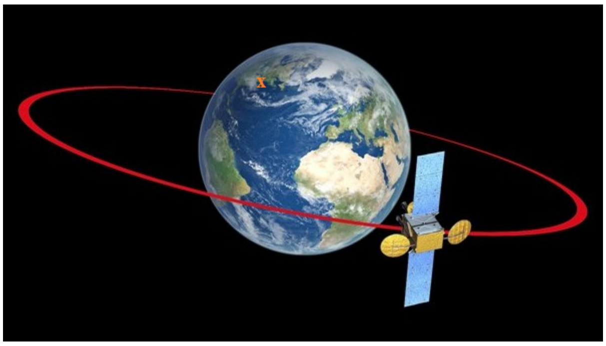
$$W(p_0, p_1, p_2)(x) = \begin{vmatrix} p_0(x) & p_1(x) & p_2(x) \\ p_0'(x) & p_1'(x) & p_2'(x) \\ p_0''(x) & p_1''(x) & p_2''(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$W(p_0, p_1, p_2)(x) = \begin{vmatrix} (1-x)^2 & 2x(1-x) & x^2 \\ -2(1-x) & -2x+2(1-x) & 2x \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Folosim apoi urmatorul rezultat:

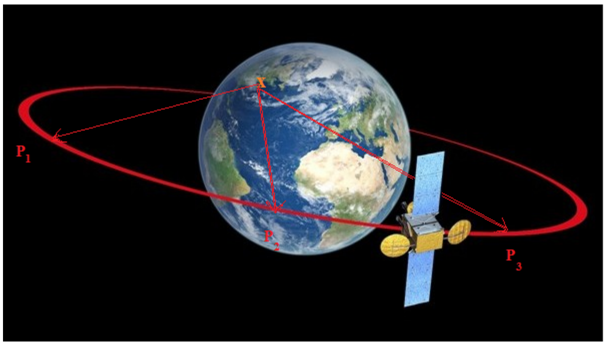
Lema: Intr-un spatiu vectorial n-dimensional orice sistem de n vectori liniar independenti formeaza o baza a sa.

Problema 4. *Un satelit de spionaj este plasat pe o orbita de forma eliptica situata in planul ecuatorului. Pozitia sa este inregistrata de catre un senzor aflat la Cape Canaveral, notat in figura cu X. In trei momente diferite de timp cercetatorii NASA au inregistrat urmatorii vectori de pozitie $v_{t_1} = (1, -3, 2)$, $v_{t_2} = (1, 1, 1)$ si $v_{t_3} = (-1, -9, 1)$ ai satelitului, dupa care au tras concluzia ca sistemul de navigatie al acestuia este avariat. De ce ? Justificati !*



Solutie: Ideea problemei este sa utilizam interpretarea geometrica a liniar independentei. Daca n vectori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n$ sunt liniar independenti atunci ei genereaza prin combinatii liniare un spatiu vectorial n-dimensional. Oricare doi vectori $\bar{v}, \bar{w}$ cu originea comuna, liniar independenti, genereaza un plan ($span\{\bar{v}, \bar{w}\}$), acesta fiind un spatiu vectorial 2-dimensional.

Notam cu P_1, P_2, P_3 cele trei pozitii ale satelitului observate pe traiectoria sa eliptica.



Cei trei vectori de pozitie sunt $v_{t_1} = \overrightarrow{XP_1}(1,-3,2), v_{t_2} = \overrightarrow{XP_1}(1,1,1)$ si $v_{t_3} = \overrightarrow{XP_3}(-1,9,1)$. Se verifica usor ca acestia sunt liniar dependenti:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deci exista α si β astfel ca:

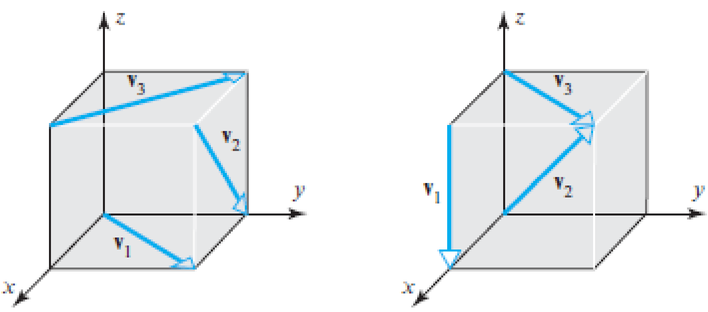
$$v_{t_3} = \alpha \cdot v_{t_1} + \beta \cdot v_{t_2}$$

Insa doi vectori v_{t_1} si v_{t_2} cu originea comuna, liniar independenti, genereaza prin combinatii liniare un plan. Prin urmare v_{t_3} se afla in acelasi plan cu acestia! Asadar punctele X, P_1, P_2, P_3 sunt coplanare. Dar un plan, care nu contine elipsa (Cape Canaveral nu se afla pe ecuator), intersecteaza elipsa in cel mult doua puncte. Contradictie ! Punctele P_1, P_2, P_3 nu pot fi toate pe elipsa, deci satelitul nu se deplaseaza dupa cum a fost programat. Asadar sistemul de navigatie este defect.

Probleme propuse

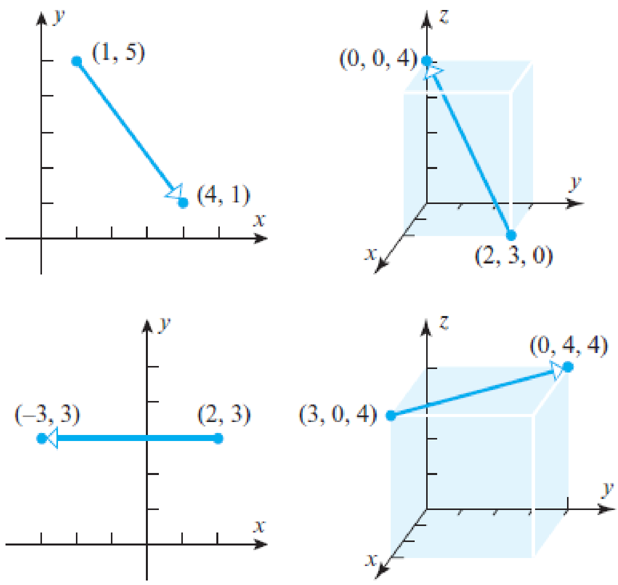
A. Consolidare cunostinte

Problema A.1. *Sunt vectorii v_1, v_2, v_3 liniar independenti ? Discutati cele doua cazuri prezentate mai jos.*



(a) (b)

Problema A.2. *Aflati componentele vectorilor din figurile de mai jos:*



B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Sa se studieze daca urmatoarele sisteme de vectori sunt liniar independente. In caz contrar, sa se determine un subsistem S' maximal liniar independent, precum si dependenta liniara a acestora:*

a) $S = \{p_1 = (-1, 7, 8),\ \ p_2 = (-1, 3, 2),\ \ p_3 = (1, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $S = \{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1.0, 2), v_3 = (0, 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$

Problema B.2. *Sa se studieze care din sistemele de vectori date sunt sisteme de generatori pentru spatiile mentionate:*

a) $S = \{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0), v_4 = (2, 2, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $S = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, -1, 0), v_3 = (2, -1, 2), v_4 = (2, -2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3.$

Problema B.3. *Fie sistemele de vectori:*

$$B_1 = \{f_1 = (1, 1, 0), \quad f_2 = (1, 0, 0), \quad f_3 = (1, 1, 2)\}$$

$$B_2 = \{g_1 = (1, 1, 3), \quad g_2 = (1, 1, 2), \quad g_3 = (3, 2, 4)\}.$$

a) Aratati ca B_1 si B_2 sunt baze ale spatiului vectorial $\mathbb{R}^3$

b) Aflati matricea de trecere $T_{B_1 B_2}$

c) Sa se determine coordonatele vectorului v relativ la baza B_1 daca acesta este dat prin $v = -2g_1 + g_2 + 3g_3$.

Problema B.4. *Sa se arate ca urmatorii vectori* $v_1 = (1, -1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ *si* $v_3 = (1, 0, 0)$ *formeaza o baza pentru* $\mathbb{R}^3$ *si sa se determine coordonatele vectorului* $u = (1, 2, 3)$ *in aceasta baza.*

C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

Problema C.1. *Spatiul vectorial* $H = span\{1, cos^2 t, \cos^4 t, \cos^6 t\}$ *contine functiile:*

i) $f(t) = 1 - 8\cos^2 t + 8\cos^4 t$

ii) $g(t) = -1 + 18\cos^2 t - 48\cos^4 t + 32\cos^6 t.$

Studiati graficele lui f *si* g *pe* $0 \leq t \leq 2\pi$ *si incercati sa gasiti o formula simpla pentru aceste doua functii.*

Indicatie: puteti folosi site-ul acesta pentru a trasa grafice.

Problema C.2. *In figura de mai jos este prezentata laticea cristalina pentru titaniu, care are forma hexagonala prezentata in stanga. Vectorii reprezentati in dreapta* $\boldsymbol{u} = (2.6, -1.5, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 3, 0)$ *si* $\boldsymbol{w} = (0, 0, 4.8)$ *formeaza o baza pentru celula prezentata in stanga. Unitatea de masura prezentata aici este Angstrom-ul (1 A=* 10^{-8} *cm). In aliaje de titaniu pot aparea diversi atomi in celula unitate, formand retele octaedrale sau tetraedrale, dupa cum apare in imaginea din stanga.*

Un atom aflat in reteaua octaedrala are coordonatele $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ *relativ la baza* $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ *a laticei cristaline. Aflati coordonatele sale relativ la baza canonica din* $\mathbb{R}^3$*. Aceeasi problema pentru un atom din reteaua tetraedrala care este localizat la* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ *relativ la baza laticei.*