

"Natura este scrisă în limbaj matematic ."

Galileo Galilei

1

Sisteme liniare

Nutritie

Un nutritionist trebuie sa creeze o dieta unei persoane care are un deficit de calciu, vitamina A si magneziu. In aceasta dieta are de gand sa includa laptele, sucul de portocale si broccoli-ul. Necesarul zilnic este de 105 mg de calciu, 30 mg de vitamina A si 300 mg magneziu. Mai jos avem continutul de calciu, vitamina A si magneziu raportat la 100 de grame din fiecare aliment mai sus amintit.



Continut mg/100 grame			
Lapte	75 Ca	20 vit. A	210 Mg
Suc	50 Ca	10 vit. A	130 Mg
Broccoli	25 Ca	40 vit. A	170 Mg

- Dupa ce formula va compune o dieta care sa acopere necesarul zilnic?
Daca o persoana are o usoara intoleranta la lactoza e de preferat sa nu consume mai mult de 100 de grame lapte intr-o zi.
- Cum realizeaza nutritionistul o dieta pentru astfel de persoane ?

Circuite electrice

Un circuit electric este o retea electrica in bucla inchisa ce include componente electrice realizandu-se astfel o cale inchisa (cu dus si intors) pentru curentul electric. Sistemele liniare pot fi folosite pentru a determina intensitatea curentului prin diverse ramuri ale unui circuit electric.

Legea lui Ohm:

Intr-un circuit intensitatea (I) curentului electric este direct proportionala cu tensiunea aplicata (U) si invers proportionala cu rezistenta (R) din circuit:

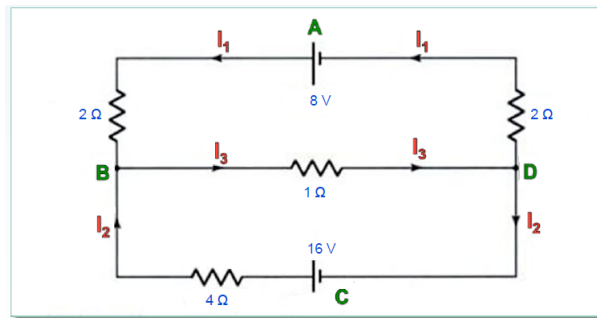
$$U = IR$$

Legile lui Kirchhoff:

1. Suma intensitatilor curentilor (continui) care intra într-un nod de retea este egala cu suma intensitatilor curentilor care ies din acelasi nod

2. Suma algebrica a tensiunilor electromotoare dintr-un ochi de retea este egala cu suma algebrica a căderilor de tensiune din acel ochi de retea.

Dorim sa determinam intensitatea curentilor in circuitul de mai jos:



Ideea este sa folosim cele trei legi de mai sus pentru a transforma problema intr-un sistem liniar. Sa notam cu I_1, I_2, I_3 intensitatile curentilor din ramurile circuitului. Vom aplica legea lui Kirchhoff in nodurile de retea:

$$B : I_1 + I_2 = I_3$$

$$D : I_3 = I_1 + I_2$$

Aceste doua relatii vor conduce la o singura ecuatie: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

In ochiurile de retea, tinand cont de sensul curentului, legea a doua ne spune ca:

$$ABDA : 2I_1 + I_3 + 2I_1 = 8$$

$$CBDC : 4I_2 + I_3 = 16$$

Astfel problema aflarii intensitatii curentilor se reduce la rezolvarea sistemului liniar:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 4I_1 + I_3 = 8 \\ 4I_2 + I_3 = 16 \end{cases}$$



O abordare geometrica a sistemelor liniare

• In cele ce urmeaza vom incerca sa "desenam" sistemele de ecuatii liniare in speranta ca o abordare grafica poate clarifica unele actiuni intreprinse in activitatea de rezolvare a acestora.

Incepem facand experimente, pentru ca capata un feeling al problemei:

• In cazul 2D un sistem cu doua ecuatii si doua necunoscute are forma:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

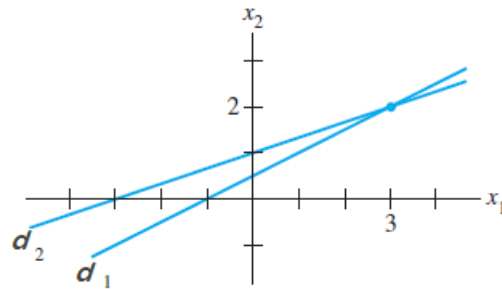
iar daca dorim sa interpretam geometric problema rezolvarii sistemului trebuie sa ne gandim la puncte $A(x, y)$ care se afla pe **obiectele geometrice descrise prin ecuatiile $x - 2y = -1$ si $-x + 3y = 3$** . Problema rezolvarii unui sistem de ecuatii se traduce geometric prin **problema aflarii intersectiei comune** (daca exista) a obiectelor descrise de ecuatiile sistemului. Cu cat sunt mai multe ecuatii (obiecte geometrice) cu atat este tot mai greu sa aiba o intersectie comuna.

Putem recunoaste usor ecuatia generala a unei drepte in plan:

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

De amintit aici ca a si b ofera informatii despre directia dreptei iar c despre distanta la originea $O(0, 0)$ a reperului XOY.

Asadar prima ecuatie spune de fapt ca $A(x, y) \in d_1$ unde $d_1 : x - 2y = -1$ iar a doua ca $A(x, y) \in d_2$ pentru $d_2 : -x + 3y = 3$. Prin urmare sistemul are o solutie daca si numai daca d_1 si d_2 se intersecteaza. O reprezentare grafica a celor doua drepte ofera:

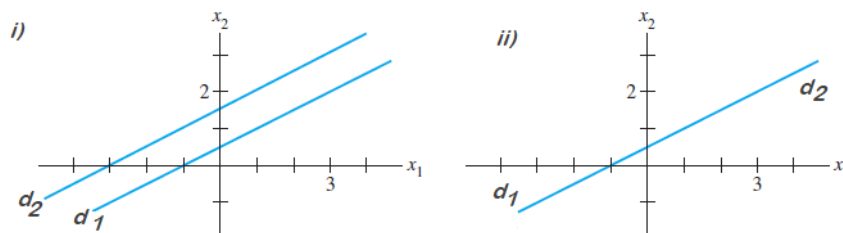


asadar dreptele se intersecteaza intr-un unic punct A . Prin calcul putem afla ca $x = 3$ si $y = 2$, asadar punctul de intersectie este $A(3, 2)$.

Sistemele

$$i) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

sunt reprezentate grafic prin dreptele:



Asadar primul sistem nu are solutie din moment ce dreptele nu se intersecteaza iar al doilea are o infinitate de solutii caci intersectia dreptelor este o intreaga dreapta.

- Sa consideram acum [cazul 3D](#) si vom porni cu sistemul:

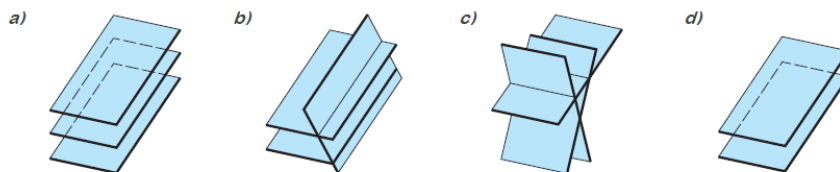
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2z + z = 4 \end{cases}$$

Crescand dimensiunea, vom cauta puncte $A(x, y, z)$ care sa apartina celor trei obiecte geometrice descrise prin ecuatiile sistemului. Ecuatia generala a unui plan este:

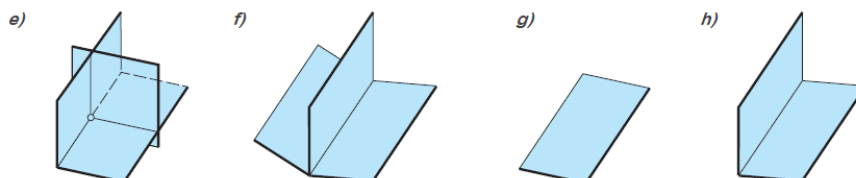
$$ax + by + cz = d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

asadar a rezolva sistemul inseamna a studia daca cele trei plane, descrise prin ecuatiile de mai sus, au o intersectie comuna.

Vom investiga mai jos toate situatiile posibile care pot aparea (pozitiile relative a trei plane):



In cazul **a)** planele descrise de cele trei ecuatii sunt paralele \implies nu exista puncte comune (sistem incompatibil). In cazul **b)** planele se intersecteaza doua cate doua dar nu au o interesectie comuna \implies sistem incompatibil. La fel si in cazul **c)**. In situatia descrisa in **d)** doua plane coincid iar al treilea este paralel cu cele doua \implies sistem incompatibil.



In cazul **e)** planele se intersecteaza intr-un unic punct. Este exact cazul care corespunde situatiei $\Delta \neq 0$, cand sistemul poate fi rezolvat prin metoda

Cramer. In situatia de la **f)** cele trei plane au o infinitate de puncte in intersectia lor comuna \implies **sistem compatibil nedeterminat**. La fel si in situatiile descrise la **g)** si **h)**

Care este diferenta dintre cazul **f)** si **g)** ? Se poate argumenta usor ca un sistem compatibil nedeterminat cu trei ecuatii si trei necunoscute nu poate avea decat o variabila secundara α sau doua variabile secundare α si β .

In primul caz toate necunoscutele x, y si z se vor exprima in functie de α , obtinand o infinitate de puncte, toate situate pe o dreapta. Ne putem imagina dreapta ca fiind traiectoria unei particule care se deplaseaza cu viteza constanta iar α reprezinta timpul. Precizand timpul scurs stim unde se afla particula pe dreapta (coordonatele x, y, z ale punctului)

In cazul in care avem doua variabile secundare, punctele comune A vor avea coordonatele depinzand de α si β si vor descrie un obiect 2-dimensional: un plan. Putem compara aceasta situatie cu cea a unui punct de pe globul pamantesc care poate fi exprimat prin coordonatele sale in spatiu (x, y, z) dar si prin latitudine si longitudine. Ne putem imagina α ca fiind latitudinea si β longitudinea.

- In cazul general n -dimensional un sistem de ecuatii liniare este o colectie de ecuatii de tipul:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

Acum din punct de vedere geometric fiecare ecuatie reprezinta de fapt ecuatia unui hiperplan in spatiul euclidian n -dimensional. Aceste hiperplane sunt imposibil de vizualizat de catre oameni (nu percepem decat trei dimensiuni), fiind generalizari multi-dimensionale ale planelor. Asadar pentru sisteme cu mai mult de trei variabile abordarea geometrica esueaza si algebra isi recastiga terenul pierdut.

Rezolvarea sistemelor liniare:

Sa revenim la sistemul considerat anterior:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2z + z = 4 \end{cases}$$

In practica, atunci cand culegem informatii despre un fenomen, pot aparea doua situatii:

① Unele ecuatii pot contine informatii redundante (nefolositoare) care pot fi recuperate din informatiile oferite de catre celelalte ecuatii ale sistemului

② Unele ecuatii pot contine informatii care contrazic informatiile codificate in celelalte ecuatii

Astfel abordarea naturala trebuie sa contina urmatoorii trei pasi:

Pas 1: Identificarea ecuatiilor independente informational (care contin informatii ce nu pot fi recuperate din celelalte ecuatii) si eliminarea ecuatiilor redundante

- determinantul unei matrice testeaza independenta informational a liniilor (coloanelor) matricei:

- ↳ daca $\det A \neq 0$ atunci liniile (coloanele) lui A sunt independente, fiecare contine informatii care nu pot fi recuperate din informatiile continute in celelalte

- ↳ daca $\det A = 0$ atunci liniile (coloanele) sunt dependente, cel putin una dintre ele va putea fi recuperata din continutul celorlalte

Revenind la sistemul dat vom stoca toate informatiile in matricea sistemului:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Fiecare linie corespunde unei ecuatii din sistem. Dorim sa testam daca exista ecuatii nefolositoare (redundante) si incepem prin a testa daca toate cele trei ecuatii sunt independente informational:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

deci cel putin una poate fi dedusa din celelalte. Vom testa acum cate doua dintre ecuatii. Alegem primele doua si formam determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +1 \neq 0$$

asadar primele doua linii sunt independente si a treia poate fi recuperata din informatiile codificate in acestea doua. Intradevar se poate observa ca:

$$L_3 = 3L_1 - L_2$$

Observatie: Daca am fi testat ultimele doua linii obtineam ca acestea sunt independente si prima linie poate fi recuperata din ele. De fapt oricare doua linii sunt independente si a treia va fi recuperata din informatiile codificate in acestea.

- rangul unei matrice = numarul maxim de linii (coloane) independente informational, prin urmare $\text{rang } A = 2$.

Folosind informatiile obtinute mai sus a treia ecuatie este redundanta si trebuie eliminata. Matricea cu determinant nenul de mai sus corespunde necunoscutelor x, y care vor fi numite necunoscute principale iar necunoscuta z ramasa va capata un rol secundar si va fi numita necunoscuta secundara. Pentru a evidenta acest lucru se renoteaza $z = \alpha$. Astfel din sistemul initial vom pastra doar sistemul redus care contine ecuatiile independente informational:

$$\begin{cases} x - y + \alpha = 1 \\ 2x - y + 2\alpha = -1 \end{cases}$$

Observatie: Sistemul redus obtinut la primul pas poate fi intotdeauna rezolvat folosind regula lui Cramer. Din aceasta cauza putem sa denumim intreaga metoda ca fiind: **metoda lui Cramer generalizata**.

Pasul 2: Inainte de a rezolva sistemul redus trebuie sa ne asiguram ca sistemul initial nu contine informatii contradictorii, adica este compatibil

- In acest moment exista riscul ca ecuatia eliminata sa contrazica informatiile continute in primele doua ecuatii.

Pentru a testa compatibilitatea trebuie sa apelam la rodul muncii unor matematicieni:

Kronecker-Capelli: sistemul este compatibil $\iff rang A = rang \bar{A}$

Acest rezultat poate fi exprimat mai elegant in modul urmator:

Rouché: sistemul este **compatibil** \iff **toti minorii caracteristici sunt zero**

- **Minor caracteristic**= determinant care se obtine din determinantul nenul gasit anterior (cel care decide rangul matricei A) prin lipirea de elemente **din coloana termenilor liberi**

In cazul nostru matricea extinsa este:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

Matricea care trebuie bordata este evidentiata cu **albastru** iar elementele din care putem alege sunt cele in **rosu** care corespund termenilor liberi.

Putem forma un singur minor caracteristic:

$$m_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Prin urmare sistemul este compatibil si putem trece la pasul urmator.

Pasul 3: Rezolvarea sistemului redus gasit

Sistemul redus gasit:

$$\begin{cases} x - y + \alpha = 1 \\ 2x - y + 2\alpha = -1 \end{cases}$$

are solutiile $x = -\alpha - 2$, $y = -3$, $z = \alpha$ si prin urmare multimea solutiilor sistemului este $S = \{(-\alpha - 2, -3, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Conform celor spuse intr-o sectiune anterioara multimea solutiilor sistemului contine punctele $A(-\alpha - 2, -3, \alpha)$ care **se vor situa toate pe o dreapta**, asadar cele trei plane descrise de ecuatiile sistemului se intersecteaza dupa o dreapta. Situatiia corespunzatoare acestui sistem este descrisa la pagina 4, varianta **f**).



Rezolvarea sistemelor liniare voluminoase:

- In practica studiul anumitor fenomene poate duce la sisteme cu foarte multe ecuatii si necunoscute. Pentru astfel de sisteme se recomanda o abordare diferita numita **metoda lui Gauss** (vezi sectiunea: Probleme rezolvate).

- in principiu Gauss si-a imaginat un caz particular in care sistemele sunt usor de rezolvat (tehnica obisnuita de problem-solving). Acest caz corespunde situatiei in care matricea extinsa a sistemului are doar zerouri sub diagonala principala:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & \vdots & * \\ 0 & * & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \vdots & * \end{pmatrix}$$

- orice sistem poate fi adus la forma superior triunghiulara de mai sus printr-o combinatie de **transformari elementare pe linie**:

1. schimbarea a doua linii intre ele
2. inmultirea unei linii cu un numar real nenul
3. adunarea unei linii inmultite cu un numar la o alta linie



Algoritm pentru metoda Gauss

In pseudocod o astfel de metoda se implementeaza in felul urmatoar:

```

h := 1 /* initializeaza linia pivotului */
k := 1 /* initializeaza colona pivotului */
while h ≤ m and k ≤ n
  /* gaseste al k-lea pivot: */
  i_max := argmax (i = h ... m, abs(A[i, k]))
  if A[i_max, k] = 0
    /* nu gaseste pivot pe coloana asta, trece la urmatoarea */
    k := k + 1
  else
    swap rows(h, i_max)
    /* pentru toate liniile de sub pivot: */
    for i = h + 1 ... m:
      f := A[i, k] / A[h, k]
      /* umple cu zerouri sub pivot: */
      A[i, k] := 0
      /* pentru toate elementele ramase de pe linia curenta: */
      for j = k + 1 ... n:
        A[i, j] := A[i, j] - A[h, j] * f
      /* creste linia si coloana pivotului */
    h := h + 1
    k := k + 1

```




Probleme rezolvate

Problema 1. Rezolvati problema dietei, propusa in Introducere

Solutie: Afisam din nou tabelul:

Continut mg/100 grame			
Lapte	75 Ca	20 vit. A	210 Mg
Suc	50 Ca	10 vit. A	130 Mg
Broccoli	25 Ca	40 vit. A	170 Mg

• Prima sarcina a nutritionistului este sa realizeze o dieta tinand cont de necesarul zilnic de Ca, Mg si vit. A. Notam cu x cantitatea de lapte raportata la 100 de grame. De exemplu 220 de grame va corespunde lui $x = 2,2$. Notam la fel y cantitatea de suc de portocale si cu z pe cea de broccoli, raportate la 100 de grame. Atunci obtinem urmatoarele ecuatii:

Necesarul de calciu:

$$105 = 75x + 50y + 25z$$

Necesarul de vitamina A:

$$30 = 20x + 10y + 40z$$

Necesarul de magneziu:

$$300 = 210x + 130y + 170z$$

Sistemul rezultat este:

$$\begin{cases} 75x + 50y + 25z = 105 \\ 20x + 10y + 40z = 30 \\ 210x + 130y + 170z = 300 \end{cases}$$

care va livra urmatoarea formula de calcul a dietei:

$$x = \frac{9}{5} - 7\alpha, \quad y = 10\alpha - \frac{3}{5} \quad \text{si} \quad z = \alpha.$$

• Pentru a tine cont de intoleranta la lactoza trebuie sa impunem conditia $x \leq 1$ (caci ne raportam la 100 de grame) care conduce la $\alpha \geq \frac{4}{35}$.

Problema 2. Rezolvati sistemul liniar de mai jos folosind metoda lui Gauss:

$$\begin{cases} y + z - 2t + 3 = 0 \\ x + 2y - 2 - z = 0 \\ 2x + 4y + z - 3t = -2 \\ x - 4y - 7z - t = -19 \end{cases}$$

Solutie: Intai aducem sistemul la forma standard in care variabilele sunt plasate in stanga semmului "=" iar termenii liberi in dreapta:

$$\begin{cases} y + z - 2t = -3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 4y + z - 3t = -2 \\ x - 4y - 7z - t = -19 \end{cases}$$

Vom inmagazina toate informatiile oferite de sistem in matricea extinsa a sistemului:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} \curvearrowright L_1 \\ \curvearrowright L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Schimba } L_1 \text{ cu } L_2 \text{ pentru ca prima} \\ \text{coloana sa aiba 1 pe diagonala} \\ \text{principala a matricei} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} -2L_1 + L_3 \rightarrow \\ -L_1 + L_4 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & \vdots & -21 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Realizeaza operatii elementare pe linii} \\ \text{astfel ca prima coloana sa contina doar} \\ \text{0-uri sub pivotul 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6L_2 + L_4 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -39 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Pentru a doua coloana avem deja 1 pe} \\ \text{diagonala principala si un 0 sub el, va} \\ \text{trebui sa mai obtinem unul pe } L_4 \end{array}$$

Motivul pentru care obtinem 1 pe diagonala principala este practic: vom aduna si scadea mai usor linia respectiva in dorinta de a forma 0-uri sub diagonala principala.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} \frac{1}{3}L_3 \rightarrow \\ -\frac{1}{13}L_4 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{In acest moment mai avem doar sa} \\ \text{transformam cele doua elemente, 3 si} \\ \text{-13, de pe diagonala (vezi deasupra)} \\ \text{in 1-uri} \end{array}$$

In final obtinem sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + z - 2t = -3 \\ z - t = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

care rezolvat de jos in sus conduce la solutia unica $x = -1, y = 2, z = 1$ si $t = 3$.

Observatie: Interpretarea rezultatelor reprezinta singura dificultate tehnica a acestei metode. Va trebui sa stim cum sa "citim" informatiile obtinute cu ajutorul metodei Gauss.



Exemple instructive:

- Daca o linie intreaga este formata din 0-uri dar termenul liber este nenul atunci sistemul este **incompatibil**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

Aceasta forma scara contine o ultima linie care conduce la ecuatia $0 = 5$, contradictie, deci sistemul este incompatibil

- Prezenta unei linii formata in totalitate din 0-uri inseamna o pierdere de informatii si conduce in general la necesitatea de a introduce **variabile secundare** pentru a fi in stare sa rezolvam sistemul.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Daca notam variabilele cu x, y, z, u, v, w observam ca din start avem insuficiente informatii si mai pierdem una in ultima linie.

Linia 3 ne livreaza informatia $w = \frac{1}{3}$ iar linia 2 inseamna $z + 2u = 0$ adica $z = -2u$ si apare necesitatea de a nota $u = \alpha$, asadar $z = -2\alpha$. Despre v nu avem in acest moment nicio informatie. Prima linie se traduce prin $x + 3y + 4u + 2v = 0$ si tot ce putem face este sa extragem pe x pentru a obtine:

$$x = -3y - 4u - 2v = -3y - 4\alpha - 2v$$

apoi sa notam $v = \beta$ si $y = \gamma$. Deci in final:

$$\begin{cases} x = -3\gamma - 4\alpha - 2\beta \\ y = \gamma \\ z = -2\alpha \\ u = \alpha \\ v = \beta \\ w = \frac{1}{3} \end{cases}$$

□

- Solutia exprimata mai sus poate varia ca forma. In ecuatia

$$x + 3y + 4u + 2v = 0$$

avem libertatea de a alege variabila pe care o vom extrage si implicit variabilele care vor capata un rol secundar. De exemplu $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}u - \frac{2}{3}v$ si se impune sa notam $x = \gamma, v = \beta$.



Probleme propuse

A. Consolidare cunostinte

Problema A.1. *Adevarat sau fals ?*

- *Daca numarul de ecuatii ale unui sistem liniar depaseste numarul de necunoscute atunci sistemul este incompatibil.*
- *O ecuatie liniara cu doua sau mai multe necunoscute are o infinitate de solutii*
- *O matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang 1 are liniile proportionale*
- *Daca matricea extinsa a sistemului \bar{A} are mai multe coloane decat linii atunci sistemul este compatibil*
- *Un sistem omogen cu mai multe variabile decat ecuatii are o infinitate de solutii*

B. Tehnica de calcul

Problema B.1. *Rezolvati sistemele liniare:*

i)

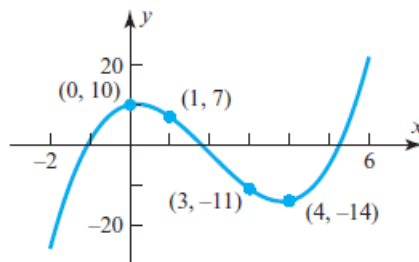
$$\begin{cases} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 = 9 \\ I_1 - 2I_3 + 7I_4 = 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 = 8 \\ -I_1 + 2I_2 + 2I_3 - I_4 = 1 \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} 2 \sin \alpha - \cos \beta + 3 \operatorname{tg} \gamma = 3 \\ 4 \sin \alpha + 2 \cos \beta - 2 \operatorname{tg} \gamma = 2 \\ 6 \sin \alpha - 3 \cos \beta + \operatorname{tg} \gamma = 9 \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$.

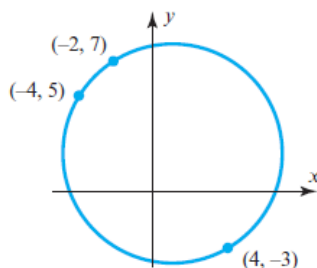
Problema B.2. *Aflati coeficientii a, b, c, d pentru care curba de ecuatie $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ traverseaza punctele afisate in figura de mai jos:*



Problema B.3. Studiați compatibilitatea sistemului a cărui matrice extinsă este:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -6 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 2 & \vdots & -0.5 \\ 0 & 1.5 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & \vdots & 10 \end{pmatrix}$$

Problema B.4. Intrucat orice cerc este unic determinat de trei puncte distincte ale sale, aflați ecuația cercului afișat în figura de mai jos:



Indicație: Ecuația generală a unui cerc este $x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$

Problema B.5. Matricea de mai jos este matricea extinsă a unui sistem liniar:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$$

Pentru ce valori ale lui a și b :

- i) sistemul are o soluție unică ?
- ii) sistemul este compatibil și are o necunoscută secundară ?
- iii) sistemul este compatibil și are două necunoscute secundare ?
- iv) sistemul este incompatibil ?

C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

Problema C.1. Aflati intensitatile curentilor in circuitele de mai jos:

