*"Natura este scrisă în limbaj matematic ."*

Galileo Galilei

# 1 Sisteme liniare

## *Nutritie*

Un nutrionist trebuie sa creeze o dieta unei persoane care are un deficit de calciu, vitamina A si magneziu. In aceasta dieta are de gand sa includa laptele, sucul de portocale si broccoliul. Necesarul zilnic este de 105 mg de calciu, 30 mg de vitamina A si 300 mg magneziu. Mai jos avem continutul de calciu, vitamina A si magneziu raportat la 100 de grame din fiecare aliment mai sus amintit.

| Continut mg/100 grame | | | |
|---|---|---|---|
| Lapte | 75 Ca | 20 vit. A | 210 Mg |
| Suc | 50 Ca | 10 vit. A | 130 Mg |
| Broccoli | 25 Ca | 40 vit. A | 170 Mg |

• Dupa ce formula va compune o dieta care sa acopere necesarul zilnic?

Daca o persoana are o usoara intoleranta la lactoza e de preferat sa nu consume mai mult de 100 de grame lapte intr-o zi.

• Cum realizeaza nutritionistul o dieta pentru astfel de persoane ?

## *Circuite electrice*

Un circuit electric este o retea electrica in bucla inchisa ce include componente electrice realizandu-se astfel o cale inchisa (cu dus si intors) pentru curentul electric. Sistemele liniare pot fi folosite pentru a determina intensitatea curentului prin diverse ramuri ale unui circuit electric.

Legea lui Ohm:

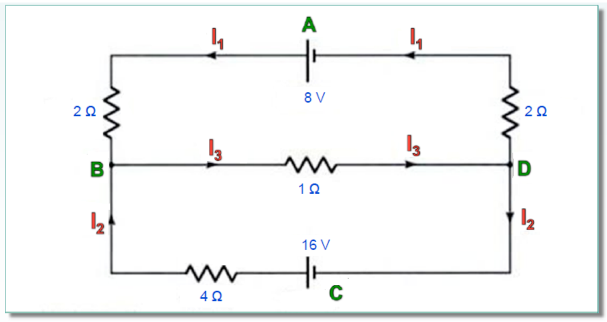
Intr-un circuit intensitatea (I) curentului electric este direct proportionala cu tensiunea aplicata (U) si invers proportionala cu rezistenta (R) din circuit:

$$U = IR$$

Legile lui Kirchhoff:

1. Suma intensitatilor curentilor (continui) care intra într-un nod de retea este egala cu suma intensitatilor curentilor care ies din acelasi nod
2. Suma algebrica a tensiunilor electromotoare dintr-un ochi de retea este egala cu suma algebrica a căderilor de tensiune din acel ochi de retea.

Dorim sa determinam intensitatea curentilor in circuitul de mai jos:




Ideea este sa folosim cele trei legi de mai sus pentru a transforma problema intr-un sistem liniar. Sa notam cu $I_1, I_2, I_3$ intensitatile curentilor din ramurile circuitului. Vom aplica legea lui Kirchhoff in nodurile de retea:

$$B: \quad I_1 + I_2 = I_3$$

$$D: \quad I_3 = I_1 + I_2$$

Aceste doua relatii vor conduce la o singura ecuatie: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

In ochiurile de retea, tinand cont de sensul curentului, legea a doua ne spune ca:

$$ABDA: \quad 2I_1 + I_3 + 2I_1 = 8$$

$$CBDC: \quad 4I_2 + I_3 = 16$$

Astfel problema aflarii intensitatii curentilor se reduce la rezolvarea sistemului liniar:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 4I_1 + I_3 = 8 \\ 4I_2 + I_3 = 16 \end{cases}$$

## O abordare geometrica a sistemelor liniare

• In cele ce urmeaza vom incerca sa "desenam" sistemele de ecuatii liniare in speranta ca o abordare grafica poate clarifica unele actiuni intreprinse in activitatea de rezolvare a acestora.

Incepem facand experimente, pentru ca capata un feeling al problemei:

• In cazul $2D$ un sistem cu doua ecuatii si doua necunoscute are forma:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

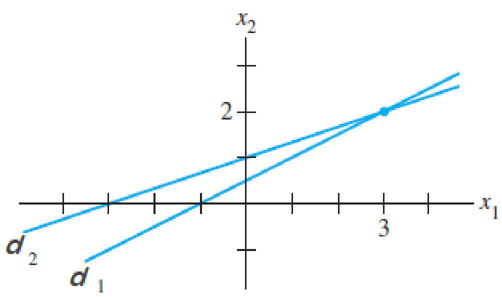
iar daca dorim sa interpretam geometric problema rezolvarii sistemului trebuie sa ne gandim la puncte $A(x, y)$ care se afla pe obiectele geometrice descrise prin ecuatiile $x - 2y = -1$ si $-x + 3y = 3$. Problema rezolvarii unui sistem de ecuatii se traduce geometric prin problema aflarii intersectiei comune (daca exista) a obiectelor descrise de ecuatiile sistemului. Cu cat sunt mai multe ecuatii (obiecte geometrice) cu atat este tot mai greu sa aiba o intersectie comuna.

Putem recunoaste usor ecuatia generala a unei drepte in plan:

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

De amintit aici ca $a$ si $b$ ofera informatii despre directia dreptei iar $c$ despre distanta la originea $O(0, 0)$ a reperului XOY.

Asadar prima ecuatie spune de fapt ca $A(x, y) \in d_1$ unde $d_1 : \ x - 2y = -1$ iar a doua ca $A(x, y) \in d_2$ pentru $d_2 : \ -x + 3y = 3$. Prin urmare sistemul are o solutie daca si numai daca $d_1$ si $d_2$ se intersecteaza. O reprezentare grafica a celor doua drepte ofera:

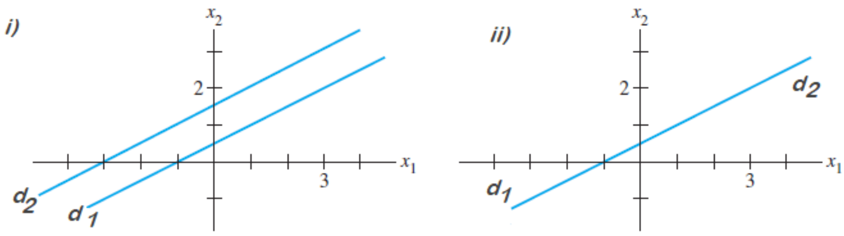



asadar dreptele se intersecteaza intr-un unic punct $A$. Prin calcul putem afla ca $x = 3$ si $y = 2$, asadar punctul de intersectie este $A(3, 2)$.

Sistemele

$$i) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

sunt reprezentate grafic prin dreptele:




Asadar primul sistem nu are solutie din moment ce dreptele nu se intersecteaza iar al doilea are o infinitate de solutii caci intersectia dreptelor este o intreaga dreapta.

• Sa consideram acum cazul $3D$ si vom porni cu sistemul:

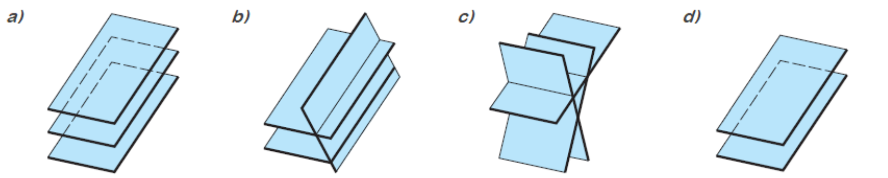
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2z + z = 4 \end{cases}$$

Crescand dimensiunea, vom cauta puncte $A(x, y, z)$ care sa apartina celor trei obiecte geometrice descrise prin ecuatiile sistemului. Ecuatia generala a unui plan este:

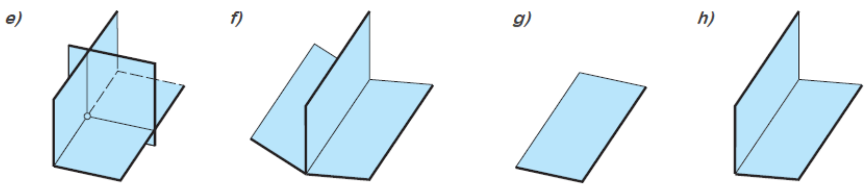
$$ax + by + cz = d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

asadar a rezolva sistemul inseamna a studia daca cele trei plane, descrise prin ecuatiile de mai sus, au o intersectie comuna.

Vom investiga mai jos toate situatiile posibile care pot aparea (pozitiile relative a trei plane):




In cazul **a)** planele descrise de cele trei ecuatii sunt paralele $\Longrightarrow$ nu exista puncte comune (sistem incompatibil). In cazul **b)** planele se intersecteaza doua cate doua dar nu au o interesectie comuna $\Longrightarrow$ sistem incompatibil. La fel si in cazul **c)**. In situatia descrisa in **d)** doua plane coincid iar al treilea este paralel cu cele doua $\Longrightarrow$ sistem incompatibil.




In cazul **e)** planele se intersecteaza intr-un unic punct. Este exact cazul care corespunde situatiei $\Delta \neq 0$, cand sistemul poate fi rezolvat prin metoda

Cramer. In situatia de la **f)** cele trei plane au o infinitate de puncte in intersectia lor comuna $\implies$ sistem compatibil nedeterminat. La fel si in situatiile descrise la **g)** si **h)**

Care este diferenta dintre cazul **f)** si **g)** ? Se poate argumenta usor ca un sistem compatibil nedeterminat cu trei ecuatii si trei necunoscute nu poate avea decat o variabila secundara $\alpha$ sau doua variabile secundare $\alpha$ si $\beta$.

In primul caz toate necunoscutele $x, y$ si $z$ se vor exprima in functie de $\alpha$, obtinand o infinitate de puncte, toate situate pe o dreapta. Ne putem imagina dreapta ca fiind traiectoria unei particule care se deplaseaza cu viteza constanta iar $\alpha$ reprezinta timpul. Precizand timpul scurs stim unde se afla particula pe dreapta (coordonatele $x, y, z$ ale punctului)

In cazul in care avem doua variabile secundare, punctele comune $A$ vor avea coordonatele depinzand de $\alpha$ si $\beta$ si vor descrie un obiect 2-dimensional: un plan. Putem compara aceasta situatie cu cea a unui punct de pe globul pamantesc care poate fi exprimat prin coordonatele sale in spatiu $(x, y, z)$ dar si prin latitudine si longitudine. Ne putem imagina $\alpha$ ca fiind latitudinea si $\beta$ longitudinea.

- In cazul general $n$-dimensional un sistem de ecuatii liniare este o colectie de ecuatii de tipul:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

Acum din punct de vedere geometric fiecare ecuatie reprezinta de fapt ecuatia unui hiperplan in spatiul euclidian $n$-dimensional. Aceste hiperplane sunt imposibil de vizualizat de catre oameni (nu percepem decat trei dimensiuni), fiind generalizari multi-dimensionale ale planelor. Asadar pentru sisteme cu mai mult de trei variabile abordarea geometrica esueaza si algebra isi recastiga terenul pierdut.

## Rezolvarea sistemelor liniare:

Sa revenim la sistemul considerat anterior:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2z + z = 4 \end{cases}$$

In practica, atunci cand culegem informatii despre un fenomen, pot aparea doua situatii:

1. Unele ecuatii pot contine informatii redundante (nefolositoare) care pot fi recuperate din informatiile oferite de catre celelalte ecuatii ale sistemului

2. Unele ecuatii pot contine informatii care contrazic informatiile codificate in celelalte ecuatii

Astfel abordarea naturala trebuie sa contina urmatorii trei pasi:

**Pas 1: Identificarea ecuatiilor independente informational (care contin informatii ce nu pot fi recuperate din celelalte ecuatii) si eliminarea ecuatiilor redundante**

• determinantul unei matrice testeaza independenta informationala a liniilor (coloanelor) matricei:

↳ daca $\det A \neq 0$ atunci liniile (coloanele) lui $A$ sunt independente, fiecare contine informatii care nu pot fi recuperate din informatiile continute in celelalte

↳ daca $\det A = 0$ atunci liniile (coloanele) sunt dependente, cel putin una dintre ele va putea fi recuperata din continutul celorlalte

Revenind la sistemul dat vom stoca toate informatiile in matricea sistemului:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Fiecare linie corespunde unei ecuatii din sistem. Dorim sa testam daca exista ecuatii nefolositoare (redundante) si incepem prin a testa daca toate cele trei ecuatii sunt independente informational:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

deci cel putin una poate fi dedusa din celelalte. Vom testa acum cate doua dintre ecuatii. Alegem primele doua si formam determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +1 \neq 0$$

asadar primele doua linii sunt independente si a treia poate fi recuperata din informatiile condificate in aceastea doua. Intradevar se poate observa ca:

$$L_3 = 3L_1 - L_2$$

**Observatie:** Daca am fi testat ultimele doua linii obtineam ca acestea sunt independente si prima linie poate fi recuperata din ele. De fapt oricare doua linii sunt independente si a treia va fi recuperata din informatiile codificate in aceastea.

• rangul unei matrice= numarul maxim de linii (coloane) independente informational, prin urmare $rang\ A = 2$.

Folosind informatiile obtinute mai sus a treia ecuatie este redundanta si trebuie eliminata Matricea cu determinant nenul de mai sus corespunde necunoscutelor $x, y$ care vor fi numite necunoscute principale iar necunoscuta $z$ ramasa va capata un rol secundar si va fi numita necunoscuta secundara. Pentru a evidentia acest lucru se renoteaza $z = \alpha$. Astfel din sistemul initial vom pastra doar sistemul redus care contine ecuatiile independente informational:

$$\begin{cases} x - y + \alpha = 1 \\ 2x - y + 2\alpha = -1 \end{cases}$$

**Observatie:** Sistemul redus obtinut la primul pas poate fi intotdeauna rezolvat folosind regula lui Cramer. Din aceasta cauza putem sa denumim intreaga metoda ca fiind: metoda lui Cramer generalizata.

**Pasul 2: Inainte de a rezolva sistemul redus trebuie sa ne asiguram ca sistemul initial nu contine informatii contradictorii, adica este compatibil**

• In acest moment exista riscul ca ecuatia eliminata sa contrazica informatiile continute in primele doua ecuatii.

Pentru a testa compatibilitatea trebuie sa apelam la rodul muncii unor matematicieni:

Kronecker-Capelli: sistemul este compatibil $\Longleftrightarrow rangA = rang\bar{A}$

Acest rezultat poate fi exprimat mai elegant in modul urmator:

Rouché: sistemul este compatibil $\Longleftrightarrow$ toti minorii caracteristici sunt zero

• Minor caracteristic= determinant care se obtine din determinantul nenul gasit anterior (cel care decide rangul matricei A) prin lipirea de elemente din coloana termenilor liberi

In cazul nostru matricea extinsa este:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

Matricea care trebuie bordata este evidentiata cu albastru iar elementele din care putem alege sunt cele in rosu care corespund termenilor liberi.

Putem forma un singur minor caracteristic:

$$m_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Prin urmare sistemul este compatibil si putem trece la pasul urmator.

**Pasul 3: Rezolvarea sistemului redus gasit**

Sistemul redus gasit:

$$\begin{cases} x - y + \alpha = 1 \\ 2x - y + 2\alpha = -1 \end{cases}$$

are solutiile $x = -\alpha - 2$, $y = -3$, $z = \alpha$ si prin urmare multimea solutiilor sistemului este $S = \{(-\alpha - 2, -3, \alpha) : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Conform celor spuse intr-o sectiune anterioara multimea solutiilor sistemului contine punctele $A(-\alpha - 2, -3, \alpha)$ care se vor situa toate pe o dreapta, asadar cele trei plane descrise de ecuatiile sistemului se intersecteaza dupa o dreapta. Situatia corespunzatoare acestui sistem este descrisa la pagina 4, varianta **f)**.

## Rezolvarea sistemelor liniare voluminoase:

• In practica studiul anumitor fenomene poate duce la sisteme cu foarte multe ecuatii si necunoscute. Pentru astfel de sisteme se recomanda o abordare diferita numita metoda lui Gauss (vezi sectiunea: Probleme rezolvate).

• in principiu Gauss si-a imaginat un caz particular in care sistemele sunt usor de rezolvat (tehnica obisnuita de problem-solving). Acest caz corespunde situatiei in care matricea extinsa a sistemului are doar zerouri sub diagonala principala:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & \vdots & * \\ 0 & * & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \vdots & * \end{pmatrix}$$

• orice sistem poate fi adus la forma superior triunghiulara de mai sus printr-o combinatie de transformari elementare pe linie:

1. schimbarea a doua linii intre ele
2. inmultirea unei linii cu un numar real nenul
3. adunarea unei linii inmultite cu un numar la o alta linie

## Probleme rezolvate

**Problema 1.** *Rezolvati problema dietei, propusa in Introducere*

*Solutie:* Afisam din nou tabelul:

| Continut mg/100 grame | | | |
|---|---|---|---|
| Lapte | 75 Ca | 20 vit. A | 210 Mg |
| Suc | 50 Ca | 10 vit. A | 130 Mg |
| Broccoli | 25 Ca | 40 vit. A | 170 Mg |

• Prima sarcina a nutrionistului este sa realizeze o dieta tinand cont de necesarul zilnic de Ca, Mg si vit. A. Notam cu $x$ cantitatea de lapte raportata la 100 de grame. De exemplu 220 de grame va corespunde lui $x = 2,2$. Notam la fel $y$ cantitatea de suc de portocale si cu $z$ pe cea de broccoli, raportate la 100 de grame. Atunci obtinem urmatoarele ecuatii:

Necesarul de calciu:

$$105 = 75x + 50y + 25z$$

Necesarul de vitamina A:

$$30 = 20x + 10y + 40z$$

Necesarul de magneziu:

$$300 = 210x + 130y + 170z$$

Sistemul rezultat este:

$$\begin{cases} 75x + 50y + 25z = 105 \\ 20x + 10y + 40z = 30 \\ 210x + 130y + 170z = 300 \end{cases}$$

care va livra urmatoarea formula de calcul a dietei:

$$x = \frac{9}{5} - 7\alpha, \quad y = 10\alpha - \frac{3}{5} \quad \text{si} \quad z = \alpha.$$

• Pentru a tine cont de intoleranta la lactoza trebuie sa impunem conditia $x \leq 1$ (caci ne raportam la 100 de grame) care conduce la $\alpha \geq \frac{4}{35}$.

**Problema 2.** *Rezolvati sistemul liniar de mai jos folosind metoda lui Gauss:*

$$\begin{cases} y + z - 2t + 3 = 0 \\ x + 2y - 2 - z = 0 \\ 2x + 4y + z - 3t = -2 \\ x - 4y - 7z - t = -19 \end{cases}$$

*Solutie:* Intai aducem sistemul la forma standard in care variabilele sunt plasate in stanga semnului " = " iar termenii liberi in dreapta:

$$\begin{cases} y + z - 2t = -3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 4y + z - 3t = -2 \\ x - 4y - 7z - t = -19 \end{cases}$$

Vom inmagazina toate informatiile oferite de sistem in matricea extinsa a sistemului:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c c} L_1 & \multirow{4}{*}{$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right]$} \\ L_2 & \\ & \\ & \end{array}$$

Schimba $L_1$ cu $L_2$ pentru ca prima coloana sa aiba 1 pe diagonala principala a matricei

$$\begin{array}{r} \\ \\ -2L_1+L_3\rightarrow \\ -L_1+L_4\rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right]$$

Realizeaza operatii elementare pe linii astfel ca prima coloana sa contina doar 0-uri sub pivotul 1

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ 6L_2+L_4\rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right]$$

Pentru a doua coloana avem deja 1 pe diagonala principala si un 0 sub el, va trebui sa mai obtinem unul pe $L_4$

Motivul pentru care obtinem 1 pe diagonala principala este practic: vom aduna si scadea mai usor linia respectiva in dorinta de a forma 0-uri sub diagonala principala.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{3}L_3\rightarrow \\ -\frac{1}{13}L_4\rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

In acest moment mai avem doar sa transformam cele doua elemente, 3 si $-13$, de pe diagonala (vezi deasupra) in 1-uri

In final obtinem sistemul:

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ y+z-2t=-3 \\ z-t=-2 \\ t=3 \end{cases}$$

care rezolvat de jos in sus conduce la solutia unica $x=-1, y=2, z=1$ si $t=3$.

**Observatie:** Interpretarea rezultatelor reprezinta singura dificultate tehnica a acestei metode. Va trebui sa stim cum sa ”citim” informatiile obtinute cu ajutorul metodei Gauss.

### ***Exemple instructive:***

- Daca o linie intreaga este formata din 0-uri dar termenul liber este nenul atunci sistemul este incompatibil

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Aceasta forma scara contine o ultima linie care conduce la ecuatia $0=5$, contradictie, deci sistemul este incompatibil

• Prezenta unei linii formata in totalitate din 0-uri inseamna o pierdere de informatii si conduce in general la necesitatea de a introduce variabile secundare pentru a fi in stare sa rezolvam sistemul.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Daca notam variabilele cu $x, y, z, u, v, w$ observam ca din start avem insuficiente informatii si mai pierdem una in ultima linie.

Linia 3 ne livreaza informatia $w = \frac{1}{3}$ iar linia 2 inseamna $z + 2u = 0$ adica $z = -2u$ si apare necesitatea de a nota $u = \alpha$, asadar $z = -2\alpha$. Despre $v$ nu avem in acest moment nicio informatie. Prima linie se traduce prin $x+3y+4u+2v = 0$ si tot ce putem face este sa extragem pe $x$ pentru a obtine:

$$x = -3y - 4u - 2v = -3y - 4\alpha - 2v$$

apoi sa notam $v = \beta$ si $y = \gamma$. Deci in final:

$$\begin{cases} x = -3\gamma - 4\alpha - 2\beta \\ y = \gamma \\ z = -2\alpha \\ u = \alpha \\ v = \beta \\ w = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\square$

• Solutia exprimata mai sus poate varia ca forma. In ecuatia

$$x + 3y + 4u + 2v = 0$$

avem libertatea de a alege variabila pe care o vom extrage si implicit variabilele care vor capata un rol secundar. De exemplu $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}u - \frac{2}{3}v$ si se impune sa notam $x = \gamma, v = \beta$.

## Probleme propuse

### A. Consolidare cunostinte

**Problema A.1.** *Adevarat sau fals ?*

- *Daca numarul de ecuatii ale unui sistem liniar depaseste numarul de necunoscute atunci sistemul este incompatibil.*
- *O ecuatie liniara cu doua sau mai multe necunoscute are o infinitate de solutii*
- *O matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rang 1 are liniile proportionale*

- *Daca matricea extinsa a sistemului $\bar{A}$ are mai multe coloane decat linii atunci sistemul este compatibil*
- *Un sistem omogen cu mai multe variabile decat ecuatii are o infinitate de solutii*

## B. Tehnica de calcul

**Problema B.1.** *Rezolvati sistemele liniare:*

*i)*

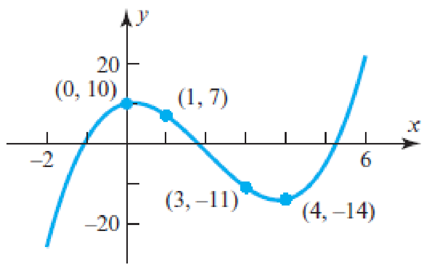
$$\begin{cases} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 = 9 \\ I_1 - 2I_3 + 7I_4 = 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 = 8 \\ -I_1 + 2I_2 + 2I_3 - I_4 = 1 \end{cases}$$

*ii)*

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\mathrm{tg}\gamma = 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\mathrm{tg}\gamma = 2 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \mathrm{tg}\gamma = 9 \end{cases}$$

*unde* $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$.

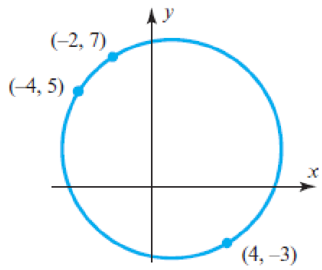
**Problema B.2.** *Aflati coeficientii* $a, b, c, d$ *pentru care curba de ecuatie* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *traverseaza punctele afisate in figura de mai jos:*




**Problema B.3.** *Studiati compatibilitatea sistemului a carui matrice extinsa este:*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -6 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 2 & \vdots & -0.5 \\ 0 & 1.5 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Problema B.4.** *Intrucat orice cerc este unic determinat de trei puncte distincte ale sale, aflati ecuatia cercului afisat in figura de mai jos:*




*Indicatie:* Ecuatia generala a unui cerc este $x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$

**Problema B.5.** *Matricea de mai jos este matricea extinsa a unui sistem liniar:*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$$

Pentru ce valori ale lui $a$ si $b$:

i) sistemul are o solutie unica ?

ii) sistemul este compatibil si are o necunoscuta secundara ?

iii) sistemul este compatibil si are doua necunscute secundare ?

iv) sistemul este incompatibil ?

### C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

**Problema C.1.** *Aflati intensitatile curentilor in circuitele de mai jos:*