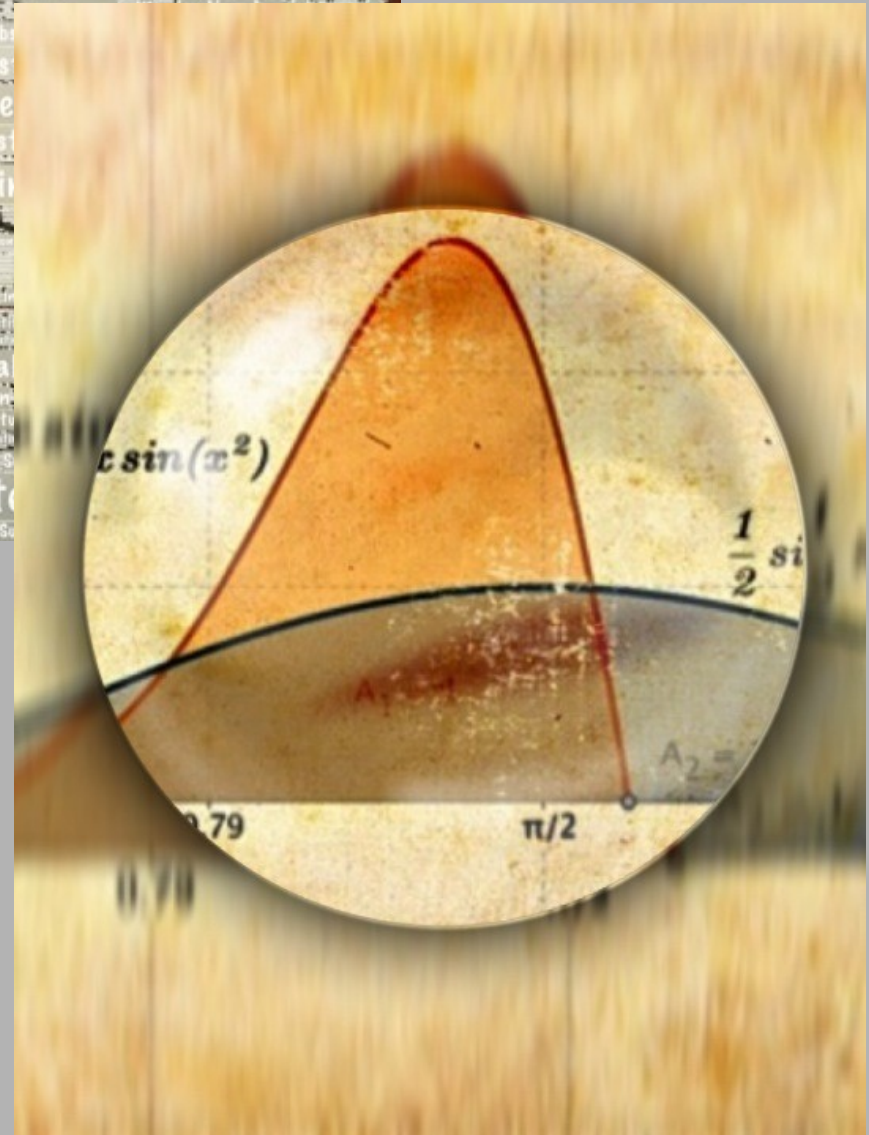


*Substitution bei bestimmten Integralen*



Was wir wissen:

Wann berechnet man Integrale mit Hilfe einer Substitution?

Wie berechnet man Integrale durch Substitution?

Was werden wir wissen?

Wie ändert man die Integrationsgrenzen bei einer Substitution.

Es gibt zwei Methoden bestimmte Integralen mit Hilfe einer Substitution zu berechnen.

Die erste Methode besteht darin, eine Stammfunktion mit einer Substitution zu bestimmen und dann ein bestimmtes Integral durch Einsetzen der Integrationsgrenzen zu berechnen:

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

$$u = g(x), \quad du = g'(x) dx$$

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$



## Substitution bei bestimmten Integralen

Bei der zweiten Methode werden Integrationsgrenzen entsprechend der neuen Variablen geändert und das bestimmte Integral ohne Rücksubstitution berechnet:

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

$$u = g(x), \quad du = g'(x) dx$$

$$u_1 = g(a), \quad u_2 = g(b), \quad a \leq x \leq b, \quad u_1 \leq u \leq u_2$$

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du = [F(u)]_{u_1}^{u_2} = F(u_2) - F(u_1)$$

Diese Formel zeigt, wie sich die Integrationsgrenzen ändern, wenn die Integrationsvariable durch Substitution geändert wird.

## Substitution bei bestimmten Integralen: Beispiel 1

Im Folgenden berechnen wir das bestimmte Integral  $I$  mit beiden Integrationsmethoden durch Substitution

$$I = \int_1^2 \sqrt{3x - 2} \, dx$$

Erste Methode: Wir berechnen zuerst die Stammfunktion  $F(x)$  des Integranden

$$\int \sqrt{3x - 2} \, dx \stackrel{u=3x-2}{=} \frac{1}{3} \int \sqrt{u} \, du = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$u = 3x - 2, \quad \frac{du}{dx} = 3, \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$= \frac{2}{9} (3x - 2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (3x - 2) \sqrt{3x - 2} + C = F(x) + C$$

$$F(x) = \frac{2}{9} (3x - 2) \sqrt{3x - 2}$$

## Substitution bei bestimmten Integralen: Beispiel 1

Das bestimmte Integral  $I$  wird durch Einsetzen der Integrationsgrenzen in die Stammfunktion  $F(x)$  berechnet:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \sqrt{3x-2} \, dx = [F(x)]_1^2 = \frac{2}{9} \left[ (3x-2)\sqrt{3x-2} \right]_1^2 = \\ &= \frac{2}{9} \left[ (3 \cdot 2 - 2)\sqrt{3 \cdot 2 - 2} - (3 \cdot 1 - 2)\sqrt{3 \cdot 1 - 2} \right] = \\ &= \frac{2}{9} \left[ 4\sqrt{4} - 1 \right] = \frac{14}{9} \simeq 1.56 \end{aligned}$$

$$I = \int_1^2 \sqrt{3x-2} \, dx = \frac{14}{9}$$

## Substitution bei bestimmten Integralen: Beispiel 1

Zweite Methode: Wir berechnen das bestimmte Integral mit neuen Variablen und neuen Integrationsgrenzen:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \sqrt{3x-2} \, dx = \frac{1}{3} \int_1^4 \sqrt{u} \, du = \frac{1}{3} \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{2}{9} \left[ u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \\ &= \frac{2}{9} \left[ u \sqrt{u} \right]_1^4 = \frac{2}{9} \left[ 4 \sqrt{4} - 1 \right] = \frac{14}{9} \simeq 1.56 \end{aligned}$$

$$u = 3x - 2, \quad \frac{du}{dx} = 3, \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$x = 1: \quad u_1 = 3 - 2 = 1, \quad x = 2: \quad u_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$u_1 \leq u \leq u_2 : \quad 1 \leq u \leq 4$$



## Substitution bei bestimmten Integralen: Beispiel 2

Wir berechnen das bestimmte Integral  $I$  mit beiden Integrationsmethoden durch Substitution

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$$

Erste Methode: Wir berechnen zuerst die Stammfunktion  $F(x)$  des Integranden

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx \stackrel{u = \sin x}{=} \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C, \quad F(x) = \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$u = \sin x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad du = \cos x \, dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \left[ \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

Zweite Methode: Wir berechnen das bestimmte Integral mit neuen Variablen und neuen Integrationsgrenzen:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx \stackrel{u = \sin x}{=} \int_0^1 u^2 \, du = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$u = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} : \quad 0 \leq u \leq 1$$

## Substitution bei bestimmten Integralen: Beispiel 2

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3}$$

Da die Funktion  $y = \sin^2 x \cos x$  im Intervall  $x = [0, \pi/2]$  und die Funktion  $y = u^2$  im Intervall  $u = [0, 1]$  nur positive Werte besitzen, beschreiben die Integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx, \quad \int_0^1 u^2 \, du$$

Flächen unter den Funktionen in den entsprechen Intervallen. Diese Flächen sehen nicht gleich aus, haben aber gleiche Flächeninhalte, was in den beiden folgenden Abbildungen gezeigt wird.

## Substitution bei bestimmten Integralen: Beispiel 2

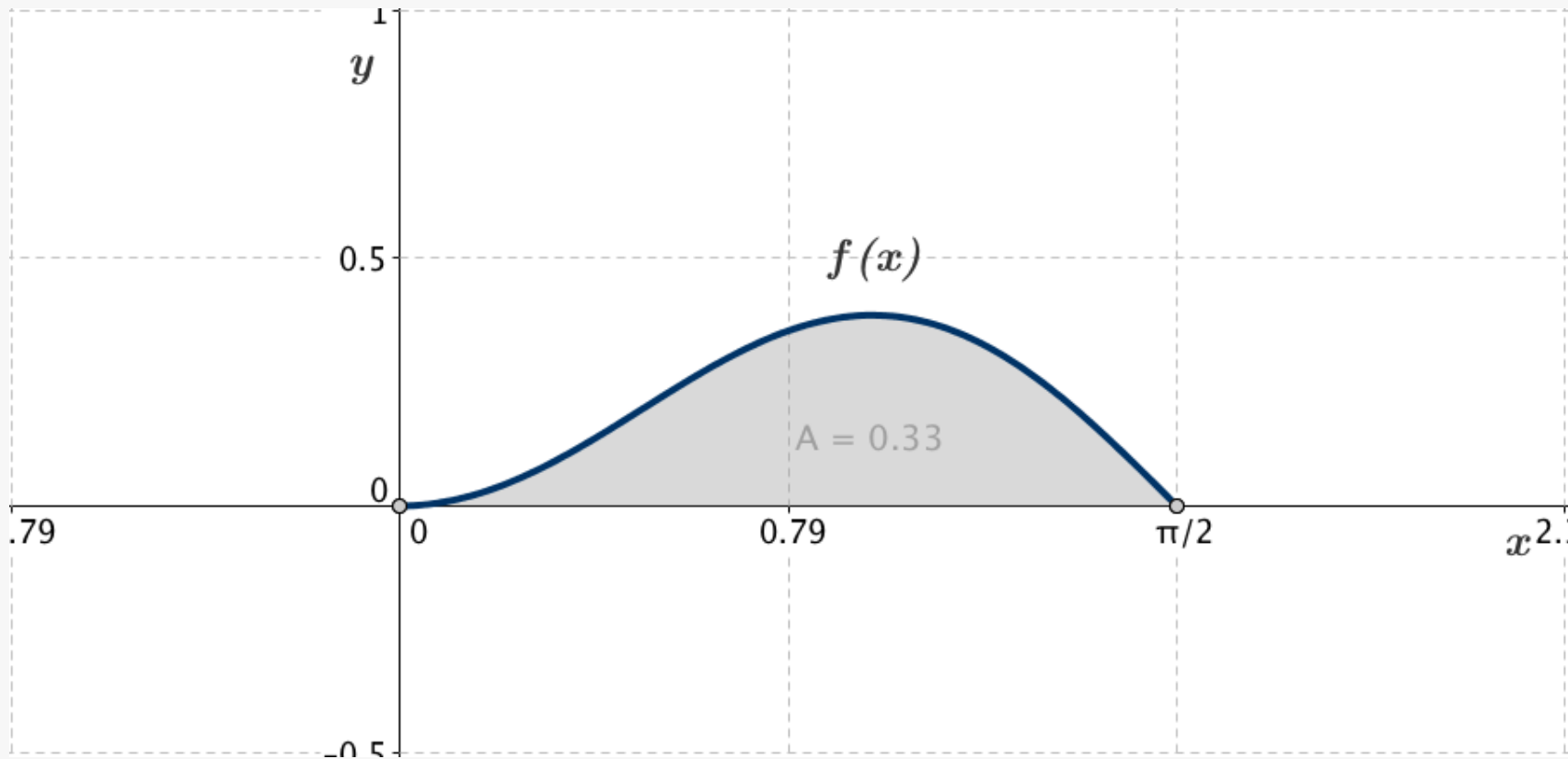


Abb. B2-1: Die Fläche  $A$  unter der Funktion  $y = f(x)$  im Intervall  $x = [0, \pi/2]$  ist gleich  $1/3$

$$f(x) = \sin^2 x \cos x, \quad x = [0, \pi/2]$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \text{ FE}$$

## Substitution bei bestimmten Integralen: Beispiel 2

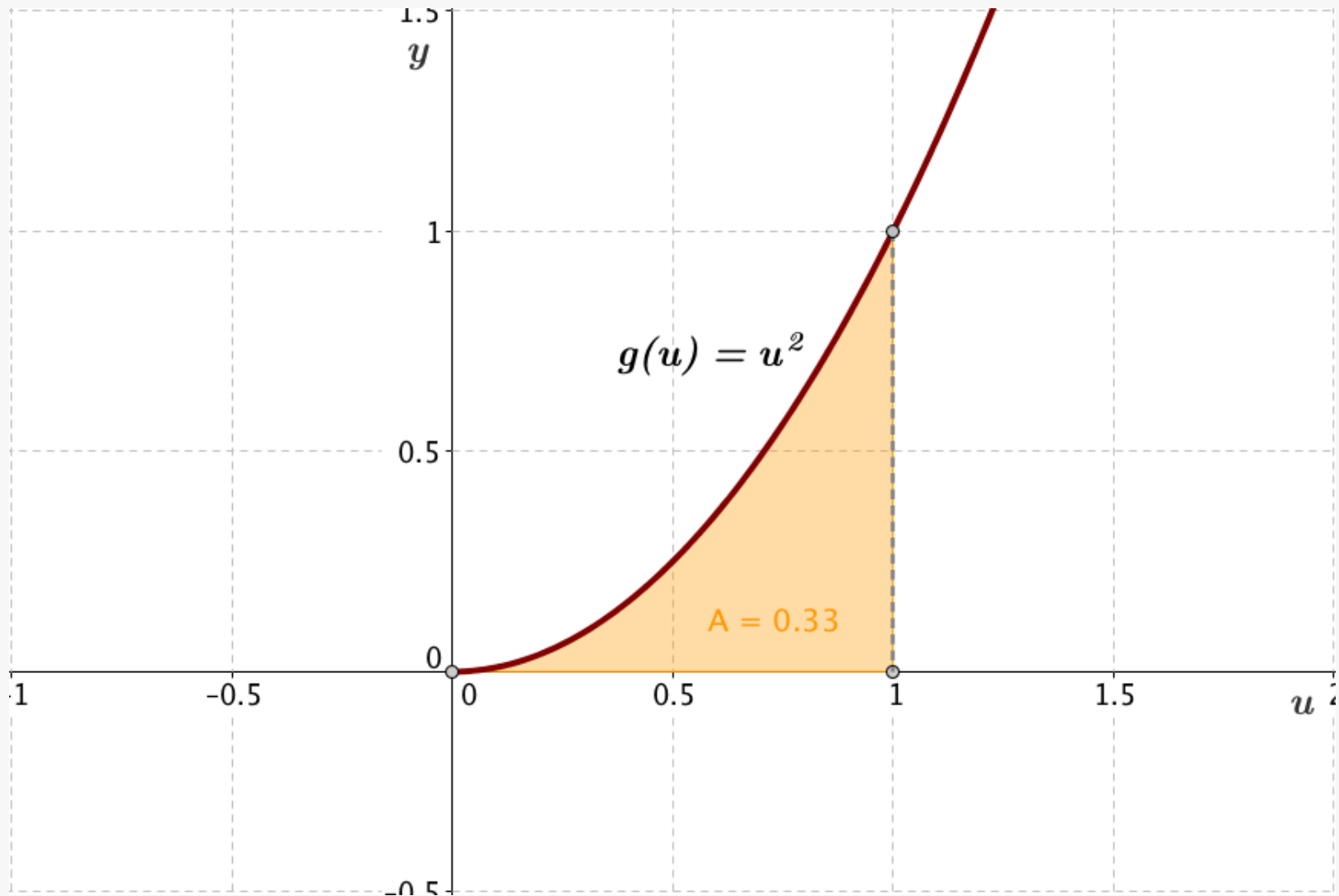


Abb. B2-2: Die Fläche  $A$  unter der Funktion  $y = f(u)$  im Intervall  $x = [0, 1]$  ist gleich  $1/3$

$$f(u) = u^2, \quad I = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

Aufgabe 1:  $I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx$ ,  $I_2 = \int_0^1 e^{-x+1} dx$ ,  $I_3 = \int_0^1 e^{2x} dx$

Aufgabe 2:  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x) dx$

Aufgabe 3:  $I_1 = \int_0^1 x(x^2 + 2)^3 dx$ ,  $I_2 = \int_0^1 (2x - 1)(x^2 - x + 1)^4 dx$

Aufgabe 4:  $I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx$ ,  $I_2 = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx$

Aufgabe 5:  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 + 4 \sin x} dx$

Aufgabe 6:  $I_1 = \int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ ,  $I_2 = \int_3^6 \sqrt{x-2} dx$

Lösung 1:

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}, \quad I_2 = \int_0^1 e^{-x+1} dx = e \int_0^1 e^{-x} dx = e - 1$$

$$I_3 = \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} [e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

Lösung 2:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} [\sin(2x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x) dx = -\frac{1}{4} [\sin(4x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

Lösung 3:

$$I_1 = \int_0^1 x(x^2 + 2)^3 dx = \frac{1}{8} [(x^2 + 2)^4]_0^1 = \frac{65}{8}$$

$$I_2 = \int_0^1 (2x - 1)(x^2 - x + 1)^4 dx = \frac{1}{5} [(x^2 - x + 1)^5]_0^1 = 0$$



Lösung 4:  $I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e-1}{2}$

$$I_2 = \int_0^1 x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2-1}]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{e-1}{2e}, \quad I_2 = \frac{1}{e} I_1$$

Lösung 5:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 + 4 \sin x} dx = \frac{1}{4} [\ln(1 + 4 \sin x)]_0^{\pi/6} = \frac{1}{4} \ln 3$$

Lösung 6:  $I_1 = \int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} \Big|_3^8 = 2$

$$I_2 = \int_3^6 \sqrt{x-2} dx = \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3}$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit beiden Integrationsmethoden:

Aufgabe 7:  $I = \int_1^2 (2x - 1)^3 dx$

Aufgabe 8:  $I = \int_{-1}^0 x^2(x^3 + 1)^4 dx$

Aufgabe 9:  $I = \int_0^1 \frac{2e^x}{1 + e^x} dx$

$$I = \int_1^2 (2x - 1)^3 dx$$

Method 1:

$$\int (2x - 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} (2x - 1)^4 + C = F(x) + C$$

$$F(x) = \frac{1}{8} (2x - 1)^4$$

$$u = 2x - 1, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$I = \int_1^2 (2x - 1)^3 dx = [F(x)]_1^2 = \frac{1}{8} [(2x - 1)^4]_1^2 = \frac{1}{8} [3^4 - 1] = 10$$

Method 2:

$$x = 1: u_1 = 1, \quad x = 2: u_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$I = \int_1^3 (2x - 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 du = \left[ \frac{u^4}{8} \right]_1^3 = 10$$

$$I = \int_{-1}^0 x^2 (x^3 + 1)^4 dx$$

Methode 1:

$$\begin{aligned} \int x^2 (x^3 + 1)^4 dx &= \frac{1}{3} \int u^4 du = \frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{15} + C \\ &= \frac{(x^3 + 1)^5}{15} + C = F(x) + C, \quad F(x) = \frac{(x^3 + 1)^5}{15} \end{aligned}$$

$$u = x^3 + 1, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2, \quad x^2 dx = \frac{du}{3}$$

$$I = \int_{-1}^0 x^2 (x^3 + 1)^4 dx = [F(x)]_{-1}^0 = \left[ \frac{(x^3 + 1)^5}{15} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{15} [1 - 0] = \frac{1}{15}$$

Methode 2:

$$I = \int_{-1}^0 x^2 (x^3 + 1)^4 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 u^4 du = \left[ \frac{u^5}{15} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{15}$$

$$u = x^3 + 1, \quad -1 \leq x \leq 0 : \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$I = \int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x} dx$$

Methode 1:

$$\int \frac{2e^x}{1+e^x} dx = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln |u| + C = 2 \ln |1+e^x| + C$$

$$u = 1 + e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad e^x dx = du$$

$$I = \int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x} dx = 2 \left[ \ln |1+e^x| \right]_0^1 = 2 (\ln |1+e| - \ln |2|) = 2 \ln \left| \frac{1+e}{2} \right|$$

Methode 2:

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x} dx = 2 \int_2^{1+e} \frac{du}{u} = 2 \left[ \ln |u| \right]_2^{1+e} = 2 \ln \left| \frac{1+e}{2} \right| \simeq 1.24$$

$$u = 1 + e^x, \quad 0 \leq x \leq 1 : \quad 2 \leq u \leq 1 + e$$

Berechnen Sie die Integrale der folgenden Aufgaben mit der zweiten Integrationsmethode entsprechend der Formel:

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du = [F(u)]_{u_1}^{u_2} = F(u_2) - F(u_1)$$

Zeichnen Sie dabei die Fläche unter der Funktion  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  im Intervall  $x = [a, b]$  und der Funktion  $f(u)$  im Intervall  $u = [u_1, u_2]$ .

Aufgabe 10:  $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$

Aufgabe 11:  $I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \cos(x^2) dx$



# Substitution bei bestimmten Integralen: Lösung 10

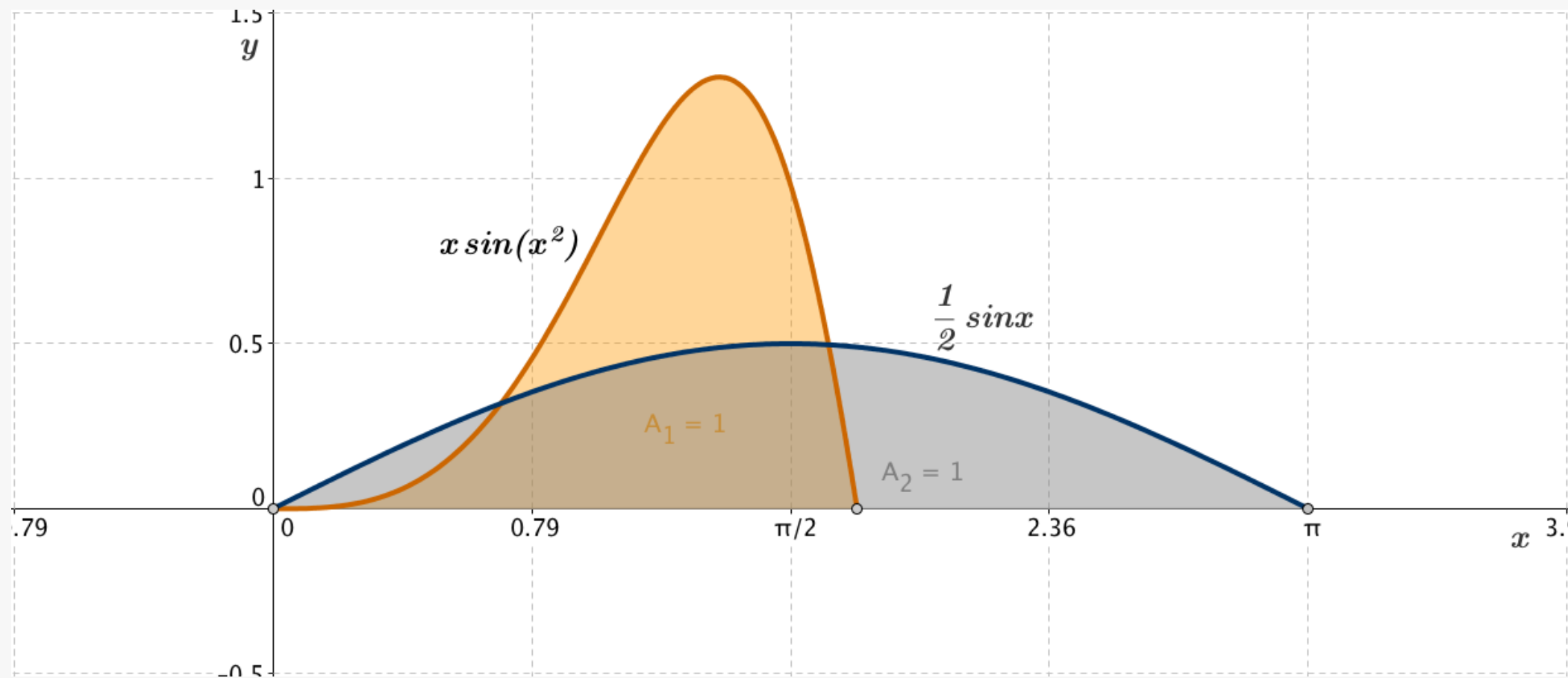


Abb. L10: Die Flächen unter der Funktion  $y = x \sin(x^2)$  im Intervall  $x = [0, \sqrt{\pi}]$  und der Funktion  $y = (1/2) \sin x$  im Intervall  $x = [0, \pi]$

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u du = -\frac{1}{2} [\cos u]_0^{\pi} = -\frac{1}{2} (-1 - 1) = 1$$

$$u = x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad x dx = \frac{du}{2}$$

$$u = x^2, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\pi} : \quad 0 \leq u \leq \pi$$

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} z \cos z dz$$

Integration durch Substitution:

$$z = x^2, \quad \frac{dz}{dx} = 2x, \quad x dx = \frac{dz}{2}$$

$$z = x^2, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad : 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$$

Partielle Integration:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = z, \quad du = dz, \quad dv = \cos z dz, \quad v = \int \cos z dz = \sin z$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} z \cos z dz = \frac{1}{2} \left( [z \sin z]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin z dz \right) = \frac{1}{2} (z \sin z + \cos z)_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 - \cos 0 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{1}{4} (\pi - 2) \simeq 0.29 \end{aligned}$$

# Substitution bei bestimmten Integralen: Lösung 11

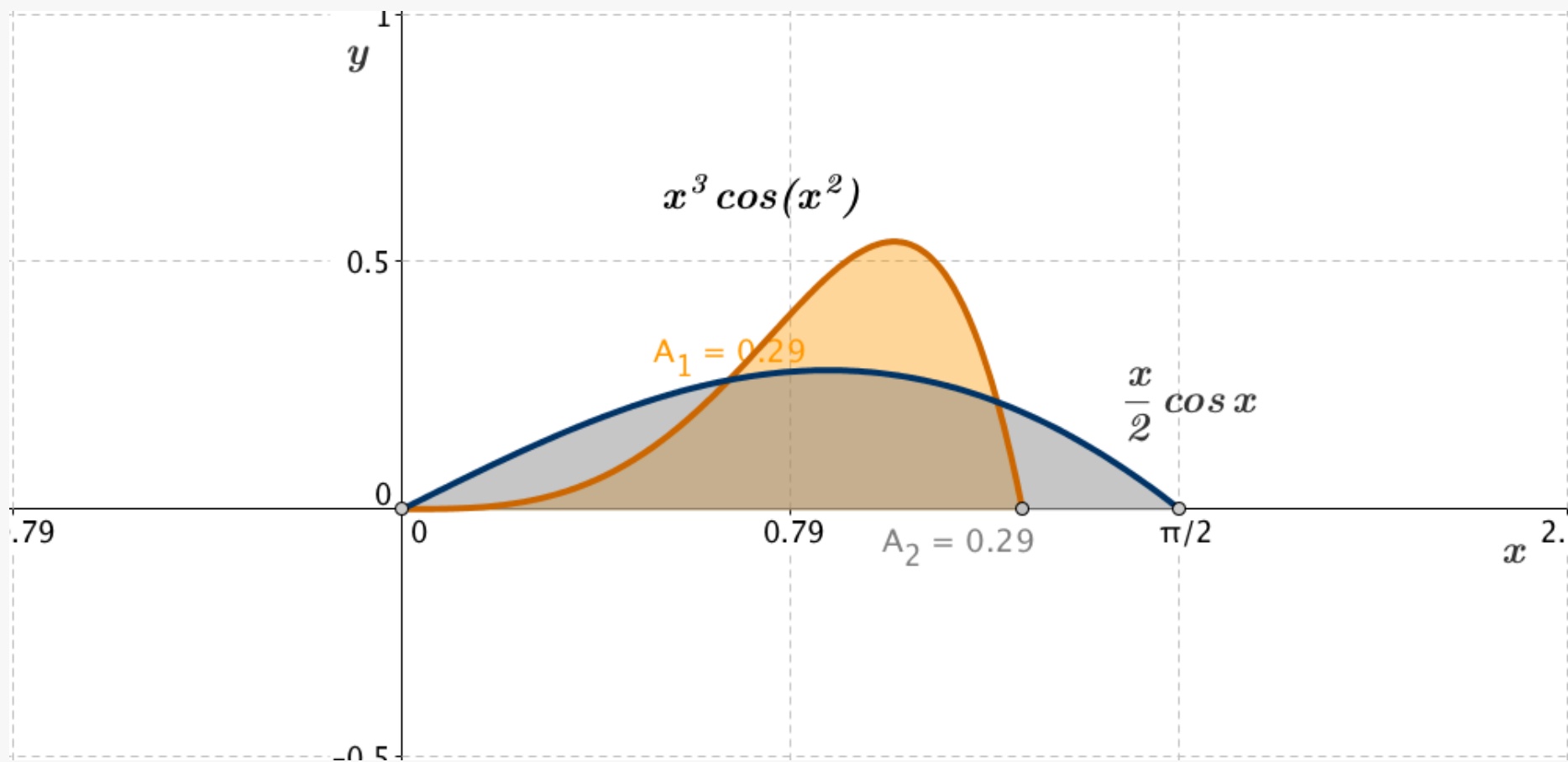


Abb. L11: Die Flächen unter der Funktion  $y = x^3 \sin(x^2)$  im Intervall  $x = [0, \sqrt{\pi/2}]$  und der Funktion  $y = (x/2) \cos x$  im Intervall  $x = [0, \pi/2]$

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} z \cos z dz = \frac{1}{4} (\pi - 2) \simeq 0.29$$

