ii) Construiţi baza ortonormată pornind de la baza $\{v_1, v_2\}$.

Răspuns. i) Fie θ unghiul dintre vectorii v_1 şi v_2. Atunci

$$\theta = \arccos \frac{< v_1, v_2 >}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{5}{26}.$$

ii) Baza ortonormată este

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.2.12. Se consideră forma biliniară $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ care are matricea de forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ în baza canonică.

i) Să se determine α astfel încât $(\mathbb{R}^3, g)$ să aibă o structură de spaţiu vectorial euclidian.

ii) Pentru $\alpha = 2$, $\overline{v} = (1,2,3)$, $\overline{w} = (1,-1,1)$ să se determine $\|\overline{v}\|$, $\|\overline{w}\|$, $pr_{\overline{w}}\overline{v}$.

Răspuns. i)$\alpha \neq 1$; ii) $\|\overline{v}\| = \sqrt{14}$, $\|\overline{w}\| = \sqrt{6}$, $pr_{\overline{w}}\overline{v} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Capitolul 5

Dreapta şi planul în spaţiu

5.1 Dreapta şi planul în spaţiu

5.1.1 Probleme rezolvate

5.1.1. Se dau punctele $A(3,-1,3)$, $B(2,1,-1)$ şi dreptele

$$d_1: \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2}.$$

Să se scrie:

i) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei AB;

ii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, ce trece prin A şi este paralelă cu dreapta d_1;

iii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, ce trece prin B şi este paralelă cu dreapta d_2.

Soluţie. i) Din ecuaţia dreptei determinată de două puncte $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$

$$AB : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \tag{5.1}$$

rezultă ecuaţiile carteziene ale dreptei AB

$$AB : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$$

iar din egalarea acestor rapoarte cu t, rezultă ecuaţiile parametrice ale dreptei AB

$$AB : \begin{cases} x = -t+3 \\ y = 2t-1 \\ z = -4t+3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ii) Dreapta d_1 fiind determinată de intersecţia a două plane are direcţia dată de produsul vectorial al normalelor la cele două plane, adică

$$\overline{d}_1 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}.$$

Dreapta d fiind paralelă cu dreapta d_1 are aceeaşi direcţie cu direcţia dreptei d_1, adică $\overline{d} = \overline{d}_1 = (1, 7, -5)$.

Din ecuaţia dreptei determinată de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ şi o direcţie $\overline{v} = (l, m, n)$

$$\frac{x-x_A}{l} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n} \tag{5.2}$$

rezultă ecuaţiile carteziene ale dreptei d

$$d : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-3}{-5}$$

şi ecuaţiile parametrice ale dreptei d

$$d : \begin{cases} x = t+3 \\ y = 7t-1 \\ z = -5t+3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

iii) Din ecuaţia dreptei determinată de un punct $A(x_A, y_A, z_A)$ şi o direcţie $\overline{v} = (l, m, n)$, rezultă direcţia dreptei d_2, $\overline{d}_2 = (1, 0, 2)$. Dreapta d fiind paralelă cu dreapta d_2 are aceeaşi direcţie cu direcţia dreptei d_2, adică $\overline{d} = \overline{d}_2 = (1, 0, 2)$.

Aşadar, conform ecuaţiei dreptei determinată de un punct şi o direcţie, (5.2) rezultă ecuaţiile carteziene ale dreptei d

$$d : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{2}$$

şi ecuaţiile parametrice ale dreptei d

$$d : \begin{cases} x = t+3 \\ y = -1 \\ z = 2t+3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.1.2. Se dau dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

i) Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei d.

ii) Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei d_2.

iii) Să se studieze poziţia dreptei d_1 faţă de dreapta d_2.

Soluţie. i) Dreapta d_1 se află la intersecţia planelor $P_1 : x + 2y - z - 1 = 0$ şi $P_2 : 2x - z - 3 = 0$. Astfel, fiecare dintre cele două normale N_1, N_2 ale planelor P_1, respectiv P_2 este perpendiculară pe dreapta d_1. Deoarece d_1 este perpendiculară simultan pe N_1,respectiv N_2 rezultă că direcţia ei este produsul vectorial al direcţiilor $\overline{N}_1 = (1, 2, -1)$, $\overline{N}_2 = (2, 0, -1)$

$$\overline{d}_1 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - \overline{j} - 4\overline{k}.$$

Se consideră $M(0, -1, -3)$ un punct ce aparţine dreptei d_1 (se fixează una dintre coordonatele x, y, z şi se determină celelalte două din ecuaţiile dreptei).

Cunoscând un punct al dreptei şi direcţia dreptei, în conformitate cu (5.2), ecuaţiile carteziene ale dreptei d_1 sunt:

$$d_1 : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-4}.$$

ii) În mod analog ca la i) se determină direcţia dreptei d_2

$$\overline{d}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$$

şi un punct $A(0, 1, 1)$ aparţinând dreptei.

Aşadar, ecuaţiile parametrice ale dreptei d_2 sunt: $\begin{cases} x = -t \\ y = t+1 \\ z = -3t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

iii) Deoarece $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-1}{1}$, dreptele nu sunt paralele. Studiem dacă cele două drepte sunt concurente. Aşadar, rezolvăm sistemul format cu ecuaţiile celor două drepte $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ matricea, respectiv matricea extinsă a sistemului neomogen.

Deoarece $rang(A) = 3 \neq rang(\overline{A}) = 4$ rezultă că sistemul este incompatibil. În concluzie dreptele nu sunt concurente, deci ele nu sunt coplanare.

5.1.3. Să se scrie ecuaţia dreptei (d) ce trece prin punctul de intersecţie al dreptelor

$(d_1) : x = t,\ y = -t,\ z = 2t - 2$

$(d_2) : x = s + 1,\ y = -s - 1,\ z = s$

şi este perpendiculară pe planul $2x + y - 3z - 3 = 0$.

Soluţie. Punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de intersecţie al dreptelor (d_1) şi (d_2) este dat de soluţia sistemului format din ecuaţiile celor două drepte:

$$\begin{cases} t = s + 1 \\ -t = -s - 1 \\ 2t - 2 = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \end{cases}$$

Deci M_0 are coordonatele $(1, -1, 0)$. Cum dreapta (d) este perpendiculară pe planul $2x + y - 3z - 3 = 0$, rezultă că direcţia dreptei (d) este dată de vectorul $\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$ şi prin urmare ecuaţia dreptei căutate este

$$(d) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

5.1.4. Să se studieze coliniaritatea punctelor M, N, P şi N, P, Q unde $M(1, 2, -3)$, $N(4, -2, -1)$, $P(-2, 6, -5)$, $Q(1, 1, -6)$.

Soluţie. Ecuaţia dreptei determinată de punctele M şi N este

$$(MN) : \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{2}.$$

Deoarece coordonatele punctului P verifică ecuaţia dreptei (MN) rezultă ca M, N, P sunt puncte coliniare.

Ecuaţia dreptei determinată de punctele N şi P este aceeaşi cu cea determinată de de M şi N, iar coordonatele punctului Q nu verifică ecuaţia dreptei (MN) rezultă ca N, P, Q nu sunt puncte coliniare.

5.1.5. Să se găsească ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a planelor $(P_1) : 2x - 3y - z + 1 = 0$ şi $(P_2) : x - y + 2z + 3 = 0$.

Soluţie. Se rezolvă sistemul format din ecuaţiile celor două plane:

$$\begin{cases} 2x-3y-z+1=0 \\ x-y+2z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=t-1 \\ x-y=-2t-3 \end{cases}, z=t.$$

Astfel, se obţine reprezentarea parametrică $x=-7t-8$, $y=-5t-5$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. Prin eliminarea parametrului t se obţin ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie dintre cele două plane, anume

$$\frac{x+8}{-7}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z}{1}.$$

5.1.6. Se dau punctele $A(3,-1,0)$, $B(-2,1,-1), C(1,1,-1)$ şi dreapta $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$.
Să se scrie:

i) Ecuaţia carteziană a planului P ce conţine punctele A, B şi C;

ii) Ecuaţia carteziană a planului P ce conţine punctul A şi este perpendicular pe dreapta d;

iii) Ecuaţia carteziană a planului P care conţine dreptele d şi AB.

Soluţie. i) Din ecuaţia carteziană a planului determinat de trei puncte $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ şi $C(x_C,y_C,z_C)$

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0, \tag{5.3}$$

rezultă ecuaţia carteziană a planului P

$$P:\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

echivalentă cu ecuaţia

$$P: y+2z+1=0.$$

ii) Planul P fiind perpendicular pe dreapta d rezultă că normala la plan este paralelă cu dreapta d, adică normala la plan şi dreapta d au aceeaşi direcţie, $\overline{N}_P=\overline{d}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$.

Din ecuaţia carteziană a planului determinat de un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi o normală $\overline{N}=A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{5.4}$$

rezultă ecuaţia carteziană a planului P

$$P:(x-3)-(y+1)+2z=0$$

echivalentă cu ecuaţia

$$P: x-y+2z-4=0.$$

iii) Utilizând formula ce stabileşte direcţia unei drepte determinată de două puncte $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$

$$\overline{AB}=(x_B-x_A)\overline{i}+(y_B-y_A)\overline{j}+(z_B-z_A)\overline{k} \tag{5.5}$$

se determină direcţia dreptei AB,

$$\overline{AB}=(-2-3)\overline{i}+(1-(-1))\overline{j}+(-1-0)\overline{k}=-5\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}.$$

Din ecuaţia carteziană a planului determinat de un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi două direcţii $\overline{v}_1=l_1\overline{i}+m_1\overline{j}+n_1\overline{k}, \overline{v}_2=l_2\overline{i}+m_2\overline{j}+n_2\overline{k}$,

$$P:\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \tag{5.6}$$

rezultă ecuaţia carteziană a planului P determinat de $A(3,-1,0)$, $\overline{d}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ şi $\overline{AB}=-5\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$

$$P:\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

echivalentă cu ecuaţia

$$P: x+3y+z=0.$$

5.1.7. Să se scrie:

i) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei ce trece prin punctul $M(-1,1,-2)$ şi este perpendiculară pe planul

$$P: x+2y-3z+4=0.$$

ii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, care se sprijină pe dreptele $d_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ şi $d_2: \frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ şi este paralelă cu planele P şi $Q: -x+y-2z+2=0$.

Soluţie. i) Dreapta d fiind perpendiculară pe planul P are aceeaşi direcţie cu direcţia normalei la plan, $\overline{d}=\overline{N}_P=(1,2,-3)$.

Aşadar, conform ecuaţiei dreptei determinată de un punct şi o direcţie, (5.2) rezultă ecuaţiile carteziene ale dreptei d

$$d: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-3}$$

şi ecuaţiile parametrice ale dreptei d

$$d: \begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+1 \\ z=-3t-2 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

ii) Fie $A(u-1,-u-1,3u+2)$, $u\in\mathbb{R}$ un punct arbitrar al dreptei d_1 şi $B(-v,2v-2,v+1)$, $v\in\mathbb{R}$ un punct arbitrar al dreptei d_2.

Fie d dreapta ce trece prin cele două puncte şi care se sprijină pe d_1 şi d_2,

$$d: \frac{x+v}{u+v-1}=\frac{y-2v+2}{-u-2v+1}=\frac{z-v-1}{3u-v+1}.$$

Deoarece dreapta d este paralelă cu planul P, înseamnă ca ea este perpendiculară pe normala la plan, $d\perp N_P$, adică direcţiile lor sunt ortogonale, iar din condiţia de ortogonalitate a doi vectori

$(u+v-1,-u-2v+1,3u-v+1)\cdot(1,2,-3)=0$ rezultă $u=-\frac{1}{5}$.

În mod analog, deoarece $\overline{d}\perp\overline{N}_Q$ din condiţia de ortogonalitate

$(u+v-1,-u-2v+1,3u-v+1)\cdot(-1,1,-2)=0$, rezultă $v=-8u=\frac{8}{5}$.

Aşadar, ecuaţiile carteziene ale dreptei d sunt

$$d: x+\frac{8}{5}=\frac{y-\frac{6}{5}}{-5}=\frac{z-\frac{13}{5}}{-3},$$

iar cele parametrice sunt

$$d: \begin{cases} x=t-\frac{8}{5} \\ y=-5t+\frac{6}{5} \\ z=-3t+\frac{13}{5} \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

5.1.8. i) Să se scrie ecuaţia planului Q ce trece prin intersecţia planelor $P_1: x-y+2z-1=0$ şi $P_2: 3x+y+2z-5=0$ şi conţine punctul $A(-1,0,2)$.

ii) Să se scrie ecuaţia planului R ce trece prin intersecţia planelor P_1 şi P_2 şi este perpendicular pe planul $P: x+2y-z-1=0$.

Soluţie. i) Intersecţia dintre cele două plane este dreapta de ecuaţii:

$$d: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ 3x+y+2z-5=0 \end{cases}.$$

Planul Q este planul ce conţine dreapta d şi punctul $A(-1,0,2)$.

Ecuaţia fascicolului de plane ce trece prin dreapta $d = P_1 \cap P_2$ este:

$$x - y + 2z - 1 + \lambda(3x + y + 2z - 5) = 0$$

Din ecuaţia fascicolului de plane determinat de dreapta d se obţine planul variabil

$$Q_\lambda : (1+3\lambda)x + (-1+\lambda)y + (2+2\lambda)z - 1 - 5\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(-1,0,2)$ să aparţină planului Q, adică A să verifice ecuaţia planului Q_λ. Înlocuind coordonatele lui A în ecuaţia planului Q_λ se obţine ecuaţia

$$(1+3\lambda)(-1) + (2+2\lambda) \cdot 2 - 1 - 5\lambda = 0,$$

cu soluţia $\lambda = \frac{1}{2}$.

Aşadar, planul căutat are ecuaţia carteziană $Q_{\frac{1}{2}} : 5x - y + 6z - 7 = 0$.

ii) Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât Q_λ să fie perpendicular pe planul P, adică vectorii lor normali $\overline{N}_{Q_\lambda} = (1+3\lambda, -1+\lambda, 2+2\lambda)$ şi $\overline{N}_P = (1,2,-1)$ să fie ortogonali. Din condiţia de ortogonalitate, adică produsul scalar al celor doi vectori egal cu zero, $(\overline{N}_{Q_\lambda}, \overline{N}_P) = 0$, rezultă

$$(1+3\lambda) + 2(-1+\lambda) - (2+2\lambda) = 0,$$

adică $\lambda = 1$.

Aşadar, planul căutat are ecuaţia carteziană $Q_1 : 2x + 2z - 3 = 0$.

5.1.9. i) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale ale punctului $M_1(-1,-1,2)$ pe planul $P : x + y + 3z + 7 = 0$.

ii) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M_1(-1,-1,2)$ faţă de planul $P : x + y + 3z + 7 = 0$.

Soluţie. i) Proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P este punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, care se găseşte la intersecţia planului P cu normala dusă prin M_1 la planul P. Aşadar, coordonatele punctului M_0 sunt soluţia sistemului determinat de ecuaţia normalei la planul P în punctul M_1 şi ecuaţia planului P. Din ecuaţia planului rezultă direcţia normalei la plan, $\overline{N}_P = (1,1,3)$. În conformitate cu (5.2) rezultă că ecuaţia normalei în punctul M_1 pe planul P este

$$N_P : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}.$$

Deci, coordonatele punctului $M_0 = pr_P M_1$ sunt soluţia sistemului

$$\begin{cases} \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3} \\ x + y + 3z + 7 = 0 \end{cases}.$$

Pentru rezolvarea sistemului se scriu ecuaţiile dreptei sub formă parametrică, $x = t-1, y = t-1, z = 3t+2$, se introduc în ecuaţia planului $x+y+3z+7=0$, se obţine ecuaţia $t - 1 + t - 1 + 3(3t+2) + 7 = 0$, cu soluţia $t = -1$. Soluţia sistemului este $t = -1, x = -2, y = -2, z = -1$.

Aşadar, proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P este punctul $M_0(-2,-2,-1)$.

ii) Dacă $M_2(x_2, y_2, z_2)$ este simetricului punctului $M_1(x_1, y_1, z_1)$ faţă de planul P, atunci punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, care este proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P, este mijlocul segmentului M_1M_2 şi, deci, au loc relaţiile

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{5.7}$$

Deoarece proiecţia ortogonală a punctului $M_1(-1,-1,2)$ pe planul P este punctul $M_0(-2,-2,-1)$, atunci în conformitate cu relaţiile (5.7) se determină coordonatele punctului M_2 din relaţiile

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_0 - x_1 = 2(-2) - (-1) = -3, \\ y_2 &= 2y_0 - y_1 = 2(-2) - (-1) = -3, \\ z_2 &= 2z_0 - z_1 = 2(-1) - 2 = -4. \end{aligned}$$

Deci, simetricul punctului $M_1(-1,-1,2)$ faţă de planul P este $M_2(-3,-3,-4)$.

5.1.10. Se consideră punctele $A(-3,-2,5)$, $B(-1,0,3)$, dreapta $(d) : \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-1}{-2}$ şi planul $(P) : 2x - 3y + z - 2 = 0$. Să se determine ecuaţia planului care trece prin mijlocul segmentului $[AB]$, este paralel cu dreapta (d) şi perpendicular pe planul (P).

Soluţie. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}, \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$, adică $M(-2,-1,4)$. Ecuaţia planului care trece prin M, este paralel cu dreapta (d) şi perpendicular pe planul (P) este

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x - y + z - 9 = 0.$$

5.1.11. i) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M(-1,-1,2)$ pe dreapta

$$d : x = t+4, \quad y = 2t-1, \quad z = -t+1, \quad t \in \mathbb{R}$$

ii) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M_1(-1,-1,2)$ faţă de dreapta d.

Soluţie. i) Proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe dreapta d este punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ care se găseşte la intersecţia dreaptei d cu planul P, plan ce conţine punctul M_1 şi are normală dreapta d. Din ecuaţiile parametrice ale

dreptei d rezultă direcţia dreptei $\overline{d} = (1,2,-1)$, deci a normalei la plan $\overline{N}_P = (1,2,-1)$. În conformitate cu (5.4) rezultă ecuaţia planului P

$$(x+1) + 2(y+1) - (z-2) = 0$$

echivalentă cu

$$P : x + 2y - z + 5 = 0.$$

Aşadar, coordonatele punctului M_0 sunt soluţia sistemului determinat de ecuaţia planului P şi ecuaţiile dreptei d,

$$\{M_0\} = P \cap d : \begin{cases} x + 2y - z + 5 = 0 \\ x = t+4, \quad y = 2t-1, \quad z = -t+1 \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia planului P ecuaţiile parametrice ale dreptei d, se obţine ecuaţia $t + 4 + 2(2t-1) - (-t+1) + 5 = 0$ şi soluţia sistemului $t = -1$, $x = 3$, $y = -3$, $z = 2$.

Deci, proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe dreapta d este punctul $M_0(3,-3,2)$.

ii) Dacă $M_2(x_2,y_2,z_2)$ este simetricului punctului $M_1(x_1,y_1,z_1)$ faţă de dreapta d, atunci punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$, care este proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe dreapta d, este mijlocul segmentului M_1M_2, deci au loc relaţiile (5.7).

Deoarece proiecţia ortogonală a punctului $M_1(-1,-1,2)$ pe dreapta d este punctul $M_0(3,-3,2)$, atunci în conformitate cu relaţiile (5.7) se determină coordonatele punctului M_2 din relaţiile

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_0 - x_1 = 2\cdot 3 - (-1) = 7, \\ y_2 &= 2y_0 - y_1 = 2(-3) - (-1) = -5, \\ z_2 &= 2z_0 - z_1 = 2\cdot 2 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Deci, simetricul punctului $M_1(-1,-1,2)$ faţă de dreapta d este punctul $M_2(7,-5,2)$.

5.1.12. i) Să se studieze poziţia relativă a dreptei

$$d : \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$$

faţă de planul $P : 3x + y - 2z - 3 = 0$.

ii) Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale ale dreptei d pe planul P.

Soluţie. i) Pentru a determina poziţia relativă a dreptei d faţă de planul P se rezolvă sistemul format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului:

$$d \cap P : \begin{cases} \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3} \\ 3x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Pentru rezolvarea sistemului se scriu ecuaţiile dreptei sub formă parametrică, sistemul fiind echivalent cu

$$d \cap P : \begin{cases} x = t+4, \quad y = t-1, \quad z = 3t+2, \quad t \in \mathbb{R} \\ 3x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases},$$

se introduc ecuaţiile parametrice ale dreptei în ecuaţia planului şi se obţine ecuaţia

$$3(t+4) + t - 1 - 2(3t+2) - 3 = 0.$$

Deoarece ultima ecuaţie are o singură soluţie, $t = 2$, înseamnă că dreapta d intersectează (înţeapă) planul P într-un singur punct, $M_1(6,1,8)$.

ii) Se consideră un punct M_0 aparţinând dreptei d, astfel: pentru un t fixat din ecuaţiile parametrice ale dreptei d se determină coordonatele punctului M_0.

Aşadar, pentru $t = -1$ se obţine $M_0(3,-2,-1)$ şi se determină proiecţia ortogonală M_2 a punctului M_0 pe planul P.

Deoarece dreapta d intersectează (înţeapă) planul P în punctul M_1 şi proiecţia ortogonală a punctului $M_0 \in d$ este M_2 rezultă că proiecţia ortogonală a dreptei d pe planul P este dreapta M_1M_2.

Proiecţia ortogonală $M_2 = pr_P M_0$ se găseşte la intersecţia planului P cu normala dusă prin M_0 pe planul P. Aşadar, coordonatele punctului M_2 sunt soluţia sistemul determinat de ecuaţia normalei pe planul P în punctul M_0 şi ecuaţia planului P. Din ecuaţia planului rezultă direcţia normalei la plan, $\overline{N}_P = (3,1,-2)$. În conformitate cu (5.2) rezultă că ecuaţia normalei în punctul M_0 pe planul P este

$$N_P : \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

Deci, coordonatele punctului $M_2 = pr_P M_0$ sunt soluţia sistemului

$$N_P \cap P : \begin{cases} \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{-2} \\ 3x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia planului P ecuaţiile parametrice ale normalei N_P, se obţine ecuaţia

$$3(3t+3) + (t-2) - 2(-2t-1) - 3 = 0$$

şi soluţia sistemului $t = -\frac{3}{7}, x = \frac{12}{7}, y = -\frac{17}{7}, z = -\frac{1}{7}$.

Deci, proiecţia ortogonală a punctului M_0 pe planul P este punctul $M_2\left(\frac{12}{7}, -\frac{17}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.

Prin urmare, în conformitate cu relaţiile (5.1) se determină proiecţia ortogonală a dreptei d pe planul P,

$$M_1M_2 : \frac{x-6}{10} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-8}{19}.$$

5.1.13. i) Să se studieze poziţia relativă a dreptei

$$d : \begin{cases} 3x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

faţă de planul $P : 3x - 2z + 3 = 0$.

ii) Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei d pe planul P.

Soluţie. i) Pentru a determina poziţia relativă a dreptei d faţă de planul P se rezolvă sistemul format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului:

$$d\cap P:\begin{cases}3x-3y+2z-5=0\\ 2x-y+5=0\\ 3x-2z+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3y+2z=5\\ 2x-y=-5\\ 3x-2z=-3\end{cases}.$$

Deoarece determinantul sistemului, liniar şi neomogen, este zero

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-3&2\\2&-1&0\\3&0&-2\end{vmatrix}=0$$

şi există un determinant principal de ordinul doi nenul, $\Delta_{princ}=\begin{vmatrix}3&-3\\2&-1\end{vmatrix}=3$, cu determinantul caracteristic de asemenea nenul,

$$\Delta_{car}=\begin{vmatrix}3&-3&5\\2&-1&-5\\3&0&-3\end{vmatrix}=51,$$

rezultă că sistemul format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului este incompatibil, adică nu are nici o soluţie. Prin urmare dreapta d nu intersectează (înţeapă) planul P, adică d este paralelă cu planul P, $d\|P$.

ii) Deoarece dreapta d este paralelă cu planul P rezultă că proiecţia ortogonală a ei pe plan este o dreaptă d_1 paralelă cu d, conţinută în planul P.

Pentru determinarea ecuaţiilor dreptei $d_1\|d$ se procedează astfel:

- se consideră un punct M_1 aparţinând dreptei d şi se determină proiecţia ortogonală M_0 a punctului M_1 pe planul P.

- se scriu ecuaţiile dreptei determinată de M_0 şi direcţia dreptei d.

Dreapta d fiind dată ca intersecţie de două plane, pentru determinarea coordonatelor unui punct oarecare de pe dreaptă se fixează una dintre cordonatele x,y,z şi se determină celelalte două din ecuaţiile dreptei. Pentru determinarea coordonatelor lui $M_1\in d$ se fixează $x=0$, se determină din ecuaţiile dreptei $y=5, z=10$, şi se obţine $M_1(0,5,10)$.

Proiecţia ortogonală $M_0=pr_PM_1$ se găseşte la intersecţia planului P cu normala dusă prin M_1 pe planul P. Aşadar, coordonatele punctului M_0 sunt soluţia sistemul determinat de ecuaţia normalei pe planul P în punctul M_1 şi ecuaţia planului P. Din ecuaţia planului rezultă direcţia normalei la plan, $\overline{N}_P=(3,0,-2)$. În conformitate cu (5.2) rezultă că ecuaţia normalei în punctul M_1 pe planul P este

$$N_P:\frac{x}{3}=\frac{y-5}{0}=\frac{z-10}{-2}.$$

Deci, coordonatele punctului $M_0=pr_PM_1$ sunt soluţia sistemului

$$N_P\cap P:\begin{cases}\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-5}{0}=\dfrac{z-10}{-2}\\ 3x-2z+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3t, y=5, z=-2t+10, & t\in\mathbb{R}\\ 3x-2z+3=0\end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia planului P ecuaţiile parametrice ale normalei N_P, se obţine ecuaţia

$$3\cdot 3t-2(-2t+10)+3=0$$

şi soluţia sistemului $t=\dfrac{17}{13}, x=\dfrac{51}{13}, y=5, z=\dfrac{96}{13}$.

Aşadar, proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P este punctul $M_0\left(\dfrac{51}{13},5,\dfrac{96}{13}\right)$.

Proiecţia ortogonală d_1, a dreptei d pe planul P, este dreapta ce trece prin M_0 şi este paralelă cu d, adică are aceeaşi direcţie cu d, $\overline{d}_1=\overline{d}$.

Dreapta d fiind dată ca intersecţie de două plane, direcţia ei este dată de produsul vectorial al normalelor la cele două plane

$$\overline{d}_1 = \overline{d} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}.$$

Prin urmare, în conformitate cu relaţiile (5.2) se determină proiecţia ortogonală a dreptei d pe planul P,

$$d_1 : \frac{13x-51}{2} = \frac{13y-65}{4} = \frac{13z-96}{3}.$$

5.1.2 Probleme propuse

5.1.14. Se dau punctele $A(1,-1,2)$, $B(2,1,-1)$ şi dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases} \qquad d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Să se scrie:

i) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei AB;

ii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, ce trece prin A şi este paralelă cu dreapta d_1;

iii) Ecuaţiile carteziene şi parametrice ale dreptei d, ce trece prin B şi este paralelă cu dreapta d_2.

5.1.15. Se dau punctele $A(1,-1,0)$, $B(-1,0,-1)$, $C(-1,1,-1)$ şi dreapta

$$d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Să se scrie:

i) Ecuaţia carteziană a planului P ce conţine punctele A, B şi C;

ii) Ecuaţia carteziană a planului P ce conţine punctul A şi este perpendicular pe dreapta d;

iii) Ecuaţia carteziană a planului P conţine dreaptele d şi AB.

5.1.16. Să se găsească ecuaţia planului determinat de dreptele

$$d_1 : \begin{cases} 2x+3y-z-1=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} x+5y+4z-3=0 \\ x+2y+2z-1=0 \end{cases}.$$

5.1.17. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi punctul A, dacă:

i) $d : \begin{cases} x-y+1=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases}$ şi $A(-1,1,-2)$.

ii) $d : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-5}{0} = \dfrac{z-1}{-2}$ şi $A(2,-1,1)$.

5.1.18. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi este perpendicular pe planul P, dacă:

i) $d : \begin{cases} x-y+1=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases}$ şi $P : x+2y-z-1=0$.

ii) $d : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ şi $P : 2x-2y-z-4=0$.

5.1.19. i) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M(-1,2,-2)$ pe planul $P : -2x+2y-3z+1=0$;

ii) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M(-1,2,-2)$ faţă de planul $P : -2x+2y-3z+1=0$.

5.1.20. i) Să se găsească coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $M(-1,0,-2)$ pe dreapta $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$;

ii) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $M(-1,0,-2)$ faţă de dreapta $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

5.1.21. Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei d pe planul P dacă:

$$d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1} \text{ şi } \quad P:-2x+y-z+1=0.$$

5.1.22. i) Să se studieze poziţia relativă a dreptei

$$d:\begin{cases} x-y+2z-2=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$$

faţă de planul $P: x-2z+2=0$.

ii) Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei d pe planul P.

5.1.23. Să se calculeze distanţa dintre dreptele
i) $(d_1):\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$, $(d_2):\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$;
ii) $(d_1'):\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, $(d_2'):\frac{x+5}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-5}{-5}$.
Răspuns. i) 9; ii) 13.

5.1.24. Să se calculeze coordonatele punctului M de intersecţie al dreptei $(d):\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ cu planul $(P): 3x+5y-z-2=0$ şi să se scrie ecuaţia planuluice trece prin $A(2,-3,4)$ este paralel cu dreapta (d) şi perpendicular pe planul (P).

Răspuns. $M(0,0,-2)$, $-8x+12y+11z+8=0$.

5.1.25. Să se arate că dreapta $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ este paralelă cu planul $3x-3y+2z-5=0$.

Răspuns. $\overline{N}\cdot\overline{v}=0$.

5.2 Probleme de distanţe şi unghiuri

5.2.1 Probleme rezolvate

5.2.1. i) Să se determine distanţa dintre punctele $A(1,-1,2)$ şi $B(5,1,-2)$.

ii) Să se determine distanţa de la punctul $M_0(1,-2,4)$ la planul $P:-x+2y-2z+1=0$.

iii) Să se determine distanţa de la punctul M_0 la dreapta AB.

Soluţie. i) Din formula distanţei dintre două puncte $A(x_A,y_A,z_A)$ şi $B(x_B,y_B,z_B)$,

$$d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2} \tag{5.8}$$

rezultă

$$d(A,B)=\sqrt{(1-5)^2+(-1-1)^2+(2+2)^2}=6.$$

ii) Din formula distanţei de la un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ la un plan $P: Ax+By+Cz+D=0$,

$$d(M_0,P)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{5.9}$$

rezultă

$$d(A,P)=\frac{|-1+2(-2)-2\cdot 4+1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{12}{6}=2.$$

iii) Din formula distanţei de la un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ la un o dreaptă d

$$d(M_0,d)=\frac{||\overline{AM}_0\times\overline{d}||}{||\overline{d}||} \tag{5.10}$$

unde A este un punct al dreptei d, rezultă

$$d(M_0,AB)=\frac{||\overline{AM}_0\times\overline{AB}||}{||\overline{AB}||}.$$

În conformitate cu formula (5.5) se calculează vectorii :

$\overline{AM}_0 = (1-1)\overline{i} + (-2+1)\overline{j} + (4-2)\overline{k} = 0\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$

$\overline{AB} = (5-1)\overline{i} + (1-(-1))\overline{j} + (-2-2)\overline{k} = 4\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$,

apoi produsul vectorial $\overline{AM}_0 \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 8\overline{j} + 4\overline{k}$, şi normele

$||\overline{AM}_0 \times \overline{AB}|| = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}$, $||\overline{AB}|| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = 6$.

Aşadar, distanţa de la punctul M_0 la dreapta AB este

$$d(M_0, AB) = \frac{||\overline{AM}_0 \times \overline{AB}||}{||\overline{AB}||} = \frac{4\sqrt{5}}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

5.2.2. i) Să se calculeze distanţa dintre planele $P: 3x - y - 2z + 1 = 0$ şi $Q: 6x - 2y - 4z - 3 = 0$.

ii) Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele
$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-6}{3}$ şi $d_2: \frac{x+5}{4} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-3}{6}$.

iii) Să se calculeze distanţa dintre dreptele necoplanare

$d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$ şi $d_2: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$.

Soluţie. i) Deoarece direcţiile normalelor la cele două plane $\overline{N}_P = (3, -1, -2)$, $\overline{N}_Q = (6, -2, -4)$ sunt paralele, $\overline{N}_Q || \overline{N}_P$, rezultă că cele două plane sunt paralele. Astfel, distanţa dintre cele două planele P, Q este egală cu distanţa de la un punct oarecare al planului P la planul Q şi se calculează cu formula (5.9). Pentru determinarea coordonatelor unui punct oarecare din planul P se fixează două dintre cordonatele x, y, z şi se determină cea de-a treia coordonată din ecuaţia planului P. Pentru determinarea coordonatelor lui $M_0 \in P$ se fixează $x = 0$, $z = 0$, se determină din ecuaţia planului $y = 1$ şi se obţine $M_0(0, 1, 0) \in P$. În conformitate cu formula (5.9) se calculează distanţa de la punctul M_0 la planul Q

$$d(P, Q,) = d(M_0, Q) = \frac{|6 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

ii) Deoarece cele două drepte sunt paralele înseamnă că distanţa dintre ele este egală cu distanţa de la un punct oarecare al dreptei d_2 la dreapta d_1 (sau invers) şi se calculează cu formula (5.10). Din ecuaţiile carteziene ale dreptelor d_1, d_2 se observă că $M_1(1, 0, 6)$ aparţine dreptei d_1 şi $M_2(-5, 1, 3)$ aparţine dreptei d_2.

În conformitate cu formula (5.10) se calculează distanţa de la punctul M_2 la dreapta d_1

$$d(M_2, d_1) = \frac{||\overline{M_1M_2} \times \overline{d}_1||}{||\overline{d}_1||}$$

Utilizând formula (5.5) se calculează vectorul $\overline{M_1M_2} = -6\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$.

Din ecuaţia carteziană a dreptei d_1 se deduce direcţia dreptei $\overline{d}_1 = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$ şi se calculează produsul vectorial $\overline{M_1M_2} \times \overline{d}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -6 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15\overline{i} + 12\overline{j} - 26\overline{k}$ şi normele $||\overline{M_1M_2} \times \overline{d}_1|| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 26^2} = \sqrt{1045}$, $||\overline{d}_1|| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29}$.

Aşadar, distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 este egală cu distanţa de la $M_2 \in d_2$ la dreapta d_1 adică

$$d(d_1, d_2) = d(M_2, d_1) = \frac{||\overline{M_1M_2} \times \overline{d}_1||}{||\overline{d}_1||} = \frac{\sqrt{1045}}{\sqrt{29}}.$$

iii) Pentru calculul distanţei dintre două drepte d_1 şi d_2 se utilizează formula

$$d(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{M_1M_2}; \overline{d}_1; \overline{d}_2)|}{||\overline{d}_1 \times \overline{d}_2||} \tag{5.11}$$

unde $M_1 \in d_1$ şi $M_2 \in d_2$.

Deoarece dreapta d_2 este dată ca intersecţie de două plane, direcţia ei este daterminată de produsul vectorial al normalelor la cele două plane

$$\overline{d}_2 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k},$$

iar un punct M_2 aparţinând dreptei d_2, se determină din ecuaţiile dreptei. Fixând $x = 0$ se obţine $y = 3, z = 1$ şi $M_2(0, 3, 1)$.

Din ecuaţiile carteziene ale dreptei d_1 se observă că $M_1(-1, 0, 2)$ aparţine dreptei d_1 şi direcţia dreptei este $\overline{d}_1 = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$.

Cu ajutorul formulei (5.5) se calculează $\overline{M_1M_2} = \overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$.

Acum, se poate calcula produsul mixt

$$(\overline{M_1M_2}; \overline{d_1}; \overline{d_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

produsul vectorial

$$\overline{d}_1 \times \overline{d}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k},$$

norma $\left\|\overline{d}_1 \times \overline{d}_2\right\| = \sqrt{35}$ şi distanţa dintre dreptele d_1, d_2

$$d(d_1, d_2) = \frac{\left|(\overline{M_1M_2}; \overline{d_1}; \overline{d_2})\right|}{\left\|\overline{d}_1 \times \overline{d}_2\right\|} = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

5.2.3. Să se determine

i) unghiul dintre dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad d_2 \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

ii) unghiul dintre planele $P_1 : x + 2y - 2z - 1 = 0$ şi $P_2 : x + y + 1 = 0$.

iii) unghiul dintre dreapta d_1 şi planul P_2.

Soluţie. i) Unghiul dintre cele două drepte este unghiul θ format de direcţiile celor două drepte, $\theta = \widehat{(d_1, d_2)} = \widehat{(\overline{d}_1, \overline{d}_2)}$. Deoarece cele două drepte sunt determinate de intersecţia a două plane, direcţiile lor sunt date de produsul vectorial al normalelor la cele două plane

$$\overline{d}_1 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\overline{i} - 4\overline{k}, \ \left\|\overline{d}_1\right\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\overline{d}_2 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + 3\overline{j}, \ \left\|\overline{d}_2\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Utilizând formula cu care se poate calcula unghiul format de doi vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2$

$$\cos\theta = \frac{(\overline{v}_1, \overline{v}_2)}{\left\|\overline{v}_1\right\| \cdot \left\|\overline{v}_2\right\|} \tag{5.12}$$

se obţine

$$\cos\theta = \frac{(\overline{d}_1, \overline{d}_2)}{\left\|\overline{d}_1\right\| \cdot \left\|\overline{d}_2\right\|} = \frac{(4, 0, -4) \cdot (-3, 3.0)}{4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2},$$

de unde rezultă că unghiul dintre cele două drepte este $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

ii) Unghiul dintre cele două plane este unghiul θ format de direcţiile normalelor la cele două plane, $\theta = \widehat{(P_1, P_2)} = \widehat{(\overline{N}_{P1}, \overline{N}_{P2})}$.

Deoarece $\overline{N}_{P_1} = (1, 2, -1)$ şi $\overline{N}_{P_2} = (1, 1, 0)$ rezultă în conformitate cu (5.12)

$$\cos\theta = \frac{(\overline{N}_{P1}, \overline{N}_{P2})}{\left\|\overline{N}_{P1}\right\| \cdot \left\|\overline{N}_{P2}\right\|} = \frac{(1, 2, -1) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi unghiul dintre cele două plane este $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

iii) Unghiul dintre drepta d_1 şi planul P_2 este unghiul θ format de dreapta d_1 cu proiecţia ei pe planul P_2. Deoarece $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{(\overline{d}_1, \overline{N}_{P2})}{\|\overline{d}_1\| \cdot \|\overline{N}_{P2}\|}$ avem $\sin\theta = \frac{(4,0,-4)\cdot(1,1,0)}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ şi unghiul $\theta = \frac{\pi}{6}$.

5.2.4. Fie dreapta

$$d: \begin{cases} 3x - y - 2z + 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

şi planul $P: x + y - 2z + 3 = 0$.

Se cere:

i) Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi este perpendicular pe planul P;

ii) Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi face un unghi de 60^0 cu planul P;

iii) Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi formează un unghi de 30^0 cu dreapta $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$;

iv) Să se scrie ecuaţiile simetricei dreaptei d faţă de planul P.

Soluţie. i) Din ecuaţia fascicolului de plane determinat de dreapta d

$$3x - y - 2z + 2 + \lambda(2x - y + 2z - 1) = 0$$

se obţine planul variabil

$$P_\lambda: (3+2\lambda)x - (1+\lambda)y + (-2+2\lambda)z + 2 - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât P_λ să fie perpendicular pe planul P, adică vectorii lor normali $\overline{N}_{P_\lambda} = (3+2\lambda, -1-\lambda, -2+2\lambda)$ şi $\overline{N}_P = (1,1,-2)$ să fie ortogonali. Din condiţia de ortogonalitate, adică produsul scalar al celor doi vectori egal cu zero, $(\overline{N}_{P_\lambda}, \overline{N}_P) = 0$, rezultă

$$(3+2\lambda)\cdot 1 + (-1-\lambda)\cdot 1 + (-2+2\lambda)\cdot(-2) = 0,$$

adică $\lambda = 2$.

Aşadar, planul căutat are ecuaţia carteziană $7x - 3y + 2z = 0$.

ii) Din ecuaţia fascicolului de plane determinat de dreapta d

$$3x - y - 2z + 2 + \lambda(2x - y + 2z - 1) = 0$$

se obţine planul variabil

$$P_\lambda: (3+2\lambda)x - (1+\lambda)y + (-2+2\lambda)z + 2 - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât unghiul format de planele P_λ şi P de să fie un unghi $\theta = 60^0$.Unghiul dintre cele două plane este unghiul $\theta = \frac{\pi}{3}$ format de direcţiile normalelor la cele două plane, $\theta = \widehat{(P_\lambda, P)} = \widehat{(\overline{N}_\lambda, \overline{N}_P)}$.

Deoarece $\overline{N}_{P_\lambda} = (3+2\lambda, -1-\lambda, -2+2\lambda)$ şi $\overline{N}_P = (1,1,-2)$, în conformitate cu (5.12) rezultă

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{(\overline{N}_{P\lambda}, \overline{N}_P)}{\|\overline{N}_{P\lambda}\| \cdot \|\overline{N}_P\|}, \text{ adică } \frac{1}{2} = \frac{(3+2\lambda, -1-\lambda, -2+2\lambda)\cdot(1,1,-2)}{\sqrt{(3+2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2}\cdot\sqrt{6}}$$

echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{1}{2} = \frac{-3\lambda + 6}{\sqrt{6}\sqrt{9\lambda^2 + 6\lambda + 14}}$$

care prin ridicare la pătrat devine

$$3\lambda^2 + 30\lambda - 10 = 0,$$

cu soluţiile $\lambda_1 = \frac{-15+\sqrt{255}}{3}$ şi $\lambda_2 = \frac{-15-\sqrt{255}}{3}$, care se înlocuiesc în ecuaţia fascicolului şi se obţin două plane.

iii) Se scrie acelaşi fascicol de plane ca la punctele i) , ii) şi se determină $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât unghiul format de planul variabil P_λ şi dreapta d_1 să fie un unghi $\theta = 30^0$.Unghiul dintre dreapta d_1 şi planul P_λ este unghiul θ format de dreaptă cu proiecţia ei pe plan.

Din $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{(\overline{d}_1,\overline{N}_{P\lambda})}{\|\overline{d}_1\|\cdot\|\overline{N}_{P\lambda}\|}$ şi $\overline{d}_1=(1,1,-1),\overline{N}_{P_\lambda}=(3+2\lambda,-1-\lambda,-2+2\lambda)$ se obţine $\sin\theta=\frac{(1,1,-1)\cdot(3+2\lambda,-1-\lambda,-2+2\lambda)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{9\lambda^2+6\lambda+14}}$ echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{1}{2}=\frac{-\lambda+4}{\sqrt{3}\sqrt{9\lambda^2+6\lambda+14}}$$

care prin ridicare la pătrat devine

$$23\lambda^2+50\lambda-22=0$$

cu soluţiile λ_1şi λ_2 care se înlocuiesc în ecuaţia fascicolului şi se obţin două plane.

iv) Fie $\{M_0\}=P\cap d:\begin{cases}x+y-2z+3=0\\3x-y-2z+2=0\\2x-y+2z-1=0\end{cases}$, adică $M_0\left(-\frac{2}{3},-\frac{7}{6},\frac{7}{12}\right)$.

Deoarece $P\cap d=\{M_0\}$ rezultă că simetrica dreptei d faţă de planul P este o dreaptă d_1 care conţine punctul M_0.

Se consideră un punct $M_1\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\in d$, $M\neq M_1$ şi se determină simetricul M_2 a lui M_1 faţă de planul P.

Fie M_3 proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P. M_3 se găseşte la intersecţia planului P cu normala dusă prin M_1 la planul P. Aşadar, coordonatele punctului M_3 sunt soluţia sistemul determinat de ecuaţia normalei pe planul P în punctul M_1 şi ecuaţia planului P. Din ecuaţia planului rezultă direcţia normalei la plan, $\overline{N}_P=(1,1,-2)$. În conformitate cu (5.2) rezultă că ecuaţia normalei pe planul P în punctul M_1 este

$$N_P:\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-\frac{3}{4}}{-2}.$$

Deci, coordonatele punctului $M_3=pr_PM_1$ sunt soluţia sistemului

$$\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-\frac{3}{4}}{-2}\\x+y-2z+3=0\end{cases}$$

Pentru rezolvarea sistemului se scriu ecuaţiile dreptei sub formă parametrică, $x=t$, $y=t+\frac{1}{2}$, $z=-2t+\frac{3}{4}$. Se introduc ecuaţiile parametrice ale normalei în ecuaţia planului şi se obţine ecuaţia $t+t+\frac{1}{2}-2(-2t+\frac{3}{4})+3=0$, şi soluţia sistemului $t=-\frac{1}{3},x=-\frac{1}{3},y=\frac{5}{3},z=\frac{17}{12}$.

Aşadar, proiecţia ortogonală a punctului M_1 pe planul P este punctul $M_3\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{17}{12}\right)$.

Ţinând cont că proiecţia ortogonală M_3 este mijlocul segmentului M_1M_2, atunci în conformitate cu relaţiile (5.7) se determină coordonatele punctului M_2 din relaţiile

$$\begin{aligned}x_2&=2x_3-x_1=2\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3},\\y_2&=2y_3-y_1=2\cdot\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{17}{6},\\z_2&=2z_3-z_1=2\cdot\frac{17}{12}-\frac{3}{4}=\frac{25}{12}\end{aligned}$$

Simetricul punctului $M_1\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ faţă de planul P este $M_2\left(-\frac{2}{3},\frac{17}{6},\frac{25}{12}\right)$, iar simetrica dreptei d faţă de planul P este dreapta d_1 determinată de punctele M_0 şi M_2

$$d_1:\frac{x+\frac{2}{3}}{0}=\frac{y+\frac{7}{6}}{4}=\frac{z-\frac{7}{12}}{\frac{3}{2}}.$$

5.2.5. Se dau dreptele

$$d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{2}\text{ şi }d_2:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{1}$$

şi punctul $M(1,1,-2)$. Se cere:

i) Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune dreptelor d_1 şi d_2.

ii) Să se calculeze distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2;

iii) Să se determine distanţa de la M la d_2.

Soluţie. i) Fie d perpendiculara comună a celor două drepte. Deoarece $d \perp d_1$ şi $d \perp d_2$ rezultă ca direcţia perpendicularei comune este

$$\overline{d} = \overline{d}_1 \times \overline{d}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}.$$

Perpendiculara comună se găseşte la intersecţia planului P_1, determinat de $M_1(1,-2,-1) \in d_1$, de dreapta d_1 şi direcţia perpendicularei comune $\overline{d}$ cu planul P_2, determinat de $M_2(-1,2,1) \in d_2$, de dreapta d_2 şi direcţia perpendicularei comune $\overline{d}$ şi are ecuaţiile

$$d : \begin{cases} P_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ P_2 : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow d : \begin{cases} 7x + y - 4z - 9 = 0 \\ 3x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases}.$$

ii) Pentru a calcula distanţa dintre cele două drepte se utilizează formuala (5.11). Astfel, se calculează $\overline{M_1M_2} = -2\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k}$, $||\overline{M_1M_2}|| = 2\sqrt{6}$,

$||\overline{d}_1 \times \overline{d}_2|| = \sqrt{11}$, $(\overline{M_1M_2}; \overline{d_1}; \overline{d_2}) = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$ şi se obţine distanţa

dintre cele două, $d(d_1, d_2) = \dfrac{|(\overline{M_1M_2}; \overline{d_1}; \overline{d_2})|}{||\overline{d}_1 \times \overline{d}_2||} = \dfrac{12\sqrt{11}}{11}$.

iii) În conformitate cu formula (5.10) se calculează distanţa de la punctul M la dreapta d_1

$$d(M, d_2) = \frac{||\overline{M_2M} \times \overline{d}_2||}{||\overline{d}_2||}.$$

Pentru aceasta, utilizând formula (5.5) se calculează $\overline{M_2M} = 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$,

$$\overline{M_2M} \times \overline{d}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + \overline{j} - \overline{k},\ ||\overline{M_2M} \times \overline{d}_2|| = \sqrt{3},\ ||\overline{d}_2|| = \sqrt{2} \text{ şi}$$

se obţine, $d(M, d_2) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

5.2.6. Se dau punctele $A(-1,1,0)$, $B(0,-2,1)$. Se cere:

i) Ecuaţia dreptei ce trece prin origine şi e paralelă cu dreapta (AB);

ii) Distanţa de la punctul B la dreapta (AC) unde $C(1,2,-3)$.

Soluţie. i) Ecuaţia dreptei determinată de punctele A şi B este

$$(AB): \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1},$$

deci vectorul direcor al dreptei (AB) este $\overline{v} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$. Atunci ecuaţia dreptei ce trece prin origine şi este paralelă cu dreapta (AB) este

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

ii) Ecuaţia dreptei determinată de punctele A şi C este

$$(AC): \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Ecuaţia planului care conţine pe B şi este perpendiculară pe dreapta (AC) este $(P): 2(x-0) + 1(y+2) - 3(z-1) = 0$, adică $(P): 2x + y - 3z + 5 = 0$. Fie M punctul de intersecţie dintre dreapta (AC) şi planul (P). Atunci coordanetele lui M sunt soluţia sistemului $\begin{cases} 2x+y-3z+5=0 \\ x=2t-1 \\ y=t+1 \\ z=-3t \end{cases}$. Se obţine $t=\frac{2}{7}$, deci $M\left(-\frac{3}{7},\frac{9}{7},-\frac{6}{7}\right)$.

Distanţa de la B la dreapta (AC) este egală cu distanţa de la B la M, adică

$$d(B,(AC))=d(B,M)=\sqrt{\left(-\frac{3}{7}-0\right)^2+\left(\frac{9}{7}+2\right)^2+\left(-\frac{6}{7}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{707}{7}}.$$

5.2.7. Se consideră dreptele

$$(d_1):\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2},\quad (d_2):\ \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ -x-y+z-1=0 \end{cases}$$

şi punctul $A(1,0,-1)$. Se cere:

i) Ecuaţia dreptei ce trece prin A şi e paralelă cu dreapta (d_2).

ii) Distanţa de la A la dreapta (d_1).

iii) Unghiul dintre dreptele (d_1) şi (d_2).

Soluţie. i) Vectorul director al dreptei (d_2) este

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\bar{i}+\bar{j}.$$

Ecuaţia dreptei ce trece prin A şi e paralelăcu dreapta (d_2) este

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+1}{0}.$$

ii) Fie punctul $M(1,1,1)$ care aparţine dreptei (d_1) şi $\overline{v_1}=-\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$ vectorul director al dreptei (d_1). Avem $\overline{AM}=\bar{j}+2\bar{k}$, deci

$$\overline{AM}\times\overline{v_1}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-6\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}.$$

Atunci $\|\overline{AM}\times\overline{v_1}\|=\sqrt{36+4+1}=\sqrt{41}$, $\|\overline{v_1}\|=\sqrt{3}$ deci distanţa de la punctul A la dreapta (d_1) este

$$d(A;d_1)=\frac{\|\overline{AM}\times\overline{v_1}\|}{\|\overline{v_1}\|}=\frac{\sqrt{41}}{3}.$$

iii) Fie θ unghiul dintre dreptele (d_1) şi (d_2). Avem

$$\cos\theta=\frac{(-1)(-1)+2\cdot 1+(-2)\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

deci $\theta=\frac{\pi}{4}$.

5.2.2 Probleme propuse

5.2.8. i) Să se determine distanţa dintre punctele $A(2,-1,1)$ şi $B(3,1,-2)$.

ii) Să se determine distanţa de la punctul $M_0(1,2,-1)$ la planul $P:-2x+y-2z+3=0$.

5.2.9. Să se calculeze distanţa dintre planele

i) $P: x-y+2z+1=0$ şi $Q: x-2y-3z-1=0$.

ii) $P: x-3y+2z-2=0$ şi $Q: 2x-6y+4z+3=0$.

5.2.10. Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele

i) $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ şi $d_2:\frac{x+1}{-3}=\frac{y}{6}=\frac{z-2}{3}$.

ii) $d_1: x=t+2,\ y=3t-1,\ z=-t+3$ şi

$d_2 : x = t - 4,\ \ y = 3t + 1,\ z = -t - 3,\quad t \in \mathbb{R}$

5.2.11. Să se calculeze distanţa dintre dreptele

i) $d_1 : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ şi $d_2 : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}.$

ii) $d_1 : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$ şi $d_2 : \begin{cases} 3x + 8y - 4 = 0 \\ 3x - 8y - 68 = 0 \end{cases}.$

5.2.12. Să se determine distanţa de la punctul $M_0(3,-1,2)$ la dreapta

$$d : \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

5.2.13. Să se calculeze unghiul dintre dreptele

i) $d_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$ şi $d_2 : \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z-2}{3}.$

ii) $d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ şi $d_2 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}.$

5.2.14. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta d de ecuaţie

$$d : \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

care face un unghi de 45° cu planul de ecuaţie $P : x - 4y - 8z + 12 = 0.$

Capitolul 6

Sfera. Cuadrice

6.1 Sfera şi cercul în spaţiu

6.1.1 Probleme rezolvate

6.1.1. Se dau punctele $A(1,-1,2)$ şi $B(-1,-3,3)$ şi $P : x - 2y + 2z + 1 = 0$ un plan:

i) Să se scrie ecuaţia sferei S_1 de diametru AB.

ii) Să se scrie ecuaţia sferei S_2 cu centrul în A şi care trece prin B.

iii) Să se scrie ecuaţia sferei S_3 cu centrul în A şi tangentă la planul P.

Soluţie. Deoarece AB este diametru sferei rezultă ca centrul sferei $C(a,b,c)$ este mijlocul segmentului $\overline{AB}$, iar raza sferei R est egală cu jumătate din lungimea segmentului $\overline{AB}$, adică $R = \dfrac{\|\overline{AB}\|}{2}$.

Din $\|\overline{AB}\| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3+1)^2 + (3-2)^2} = 3$ rezultă $R = \dfrac{3}{2}$. Mijlocul segmentului $\|\overline{AB}\|$, care este centrul sferei, se calculează cu formulele (5.7) şi se obţine $C\left(0,-2,\dfrac{5}{2}\right)$.